# வகுப்பு IX

# கணிதம்

## பகுதி - 2

## PART - 2

**MATHEMATICS**
**STD 9**
**Tamil Medium**

கேரள அரசு
கல்வித்துறை

மாநிலக் கல்வி ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT), கேரளம்
2016

## தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா,
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா,
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா,
உச்சல ஜலதி தரங்கா,
தவ சுப நாமே ஜாகே,
தவ சுப ஆசிஸ மாகே,
காகே தவ ஜய காதா
ஜனகண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா.
ஜய ஹே, ஜயஹே, ஜயஹே
ஜய ஜய ஜய ஜயஹே!

## உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறந்தோர். எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன். அதன் வளம்வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமை கொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்து கொள்வேன். என் பெற்றோர், ஆசிரியர், மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். நான் எனது நாட்டினுடையவும், நாட்டு மக்களுடையவும் வளத்திற்காகவும், இன்பத்திற்காகவும் முயற்சி செய்வேன்.

*Prepared by :*
**State Council of Educational Research and Training (SCERT)**
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

*Website* : www.scertkerala.gov.in
*E-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

அன்பு மாணவர்களே,

அளவுகள் அவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்புகள் ஆகியவற்றின் கற்றலாகவே கணிதம் தொடங்குகிறது. அளவுகளைச் சாதாரண எண்களாகவும், பொருட்களை வடிவியல் வடிவங்களாகவும் பார்க்கத் தொடங்கும்போது, கணிதத்தின் கருத்துத்தளம் உருவாக்கம் பெறுகிறது. எண் தொடர்புகள் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகள் ஆகின்றன. புதுச் சூழல்களைக் கணிதம் சார்ந்து விளக்குவதற்குப் புதிய எண்களும் குறியீடுகளும் அவசியமாகின்றன. பொருட்களின் காரணகாரியத் தொடர்பு கருத்துகளின் அறிவுப் பூர்வமான வளர்ச்சியாக உருப்பெறுகிறது. கணித அறிவியலும் வளர்கிறது. அதன் அடுத்தப் படிநிலையை வரவேற்போம்.

முனைவர். பி. ஏ. பாத்திமா
இயக்குநர்
எஸ்.ஸி.இ.ஆர்.டி

## Text Book Development Committee

### Participants in workshop

**T.V. Prakasan**
GHSS, Vazhakkadu
Malappuram.

**Unnikrishnan. M.V.**
GHSS, Kumbala
Kasaragod.

**Vijayakumar. T.K.**
GHSS, Cherkula
Kasaragod.

**Ramanujam. R**
MNKMGHSS, Pulapatta
Palakkad.

**Anilkumar.M.K.**
SKNJHSS, Kalpatta
Vyanad

**Ubaidhulla.K.C**
SOHSS, Areacode.
Malappuram.

**Ramesan. N.K.**
RGMHSS, Mokeri. Kannur.

**Jabir.K**
GVHSS, Mogran, Kasaragod.

**SreeKumar. T**
Govt GHSS, Karamana
Thiruvananthapuram.

**K.J. Prakash**
GMGHSS, Pattom
Thiruvananthapuram.

**Anil. C. Ushas**
GHS, Nedumbram
Thiruvalla, Pathanamthitta.

**Shijo David. C**
CMSHSS,
Thrissur.

**Froid Francis**
VHSS, Valanchery
Malappuram.

**Krishna Prasad. M**
VMSAVHSS,
Chappanangadi,
Malappuram.

**Balagangadharan. V.K.**
AEO, Parappanangadi.
Malappuram.

### Cover

**Rajivan. N.T**
GHSS, Thariode, Vyanad.

### Expert

**Dr. E. Krishnan**
Rtd Prof. University College
Thiruvananthapuram.

**Dr. Rameshkumar. P**
Asst.Prof., Kerala University.

**Venugopalan. C**
Asst. Prof., Govt College of Teacher
Education, Thiruvananthapuram.

**Dr. Sara Chandran**
Rtd., Dy. of Collegiate Education
Kottayam.

### Accordamic co-ordinator

**Sujithkumar. G**
Research Officer, SCERT.

---

### TAMIL VERSION

**Dr. Kanchana**
Former Prof. & Head,
Dept. of Tamil,
University of Kerala.

**T.Kumaradhas**
Headmaster (Retd.),
GHS Kozhippara,
Palakkad.

**Accordamic co-ordinator**

**Dr. D. Sahayadhas**
Research Officer, SCERT.

**M.J. David**
Headmaster (Retd.),
GHS Meenakshipuram,
Palakkad.

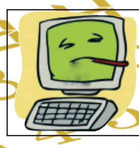
**S.C. Edwin Daniel**
Headmaster (Retd.),
GHS Pambanar,
Idukki.

---

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Vidhyabhavan, Poojapura. Thiruvananthapuram - 695 012

# Contents

இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காக, சில

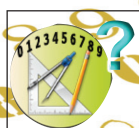


ஐ.சி.டி. வாய்ப்பு

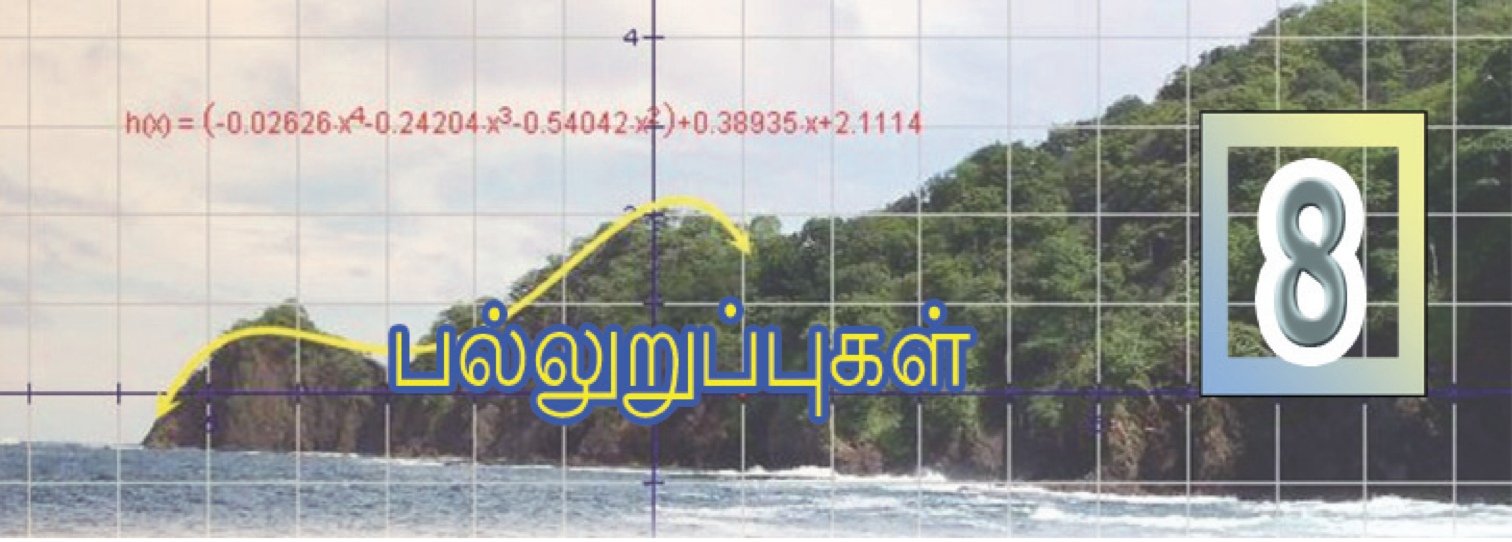
கணக்கைச் செய்து பார்க்கலாம்

ஆராய்வோம்


மீள்பார்வை



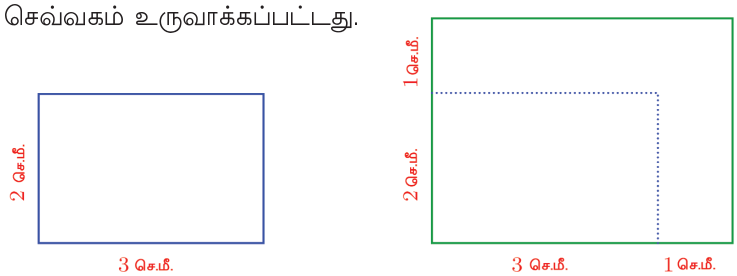
கலந்துரையாடலாம்




# 8 பல்லுறுப்புகள்

## அளவுகளின் இயற்கணிதம்

பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் அனைத்திலும் 1 சென்டிமீட்டர் வீதம் நீட்டி, சற்று பெரிய செவ்வகம் உருவாக்கப்பட்டது.




புதிய செவ்வகத்தின் சுற்றளவு என்ன?

இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் 4 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் ஆகும்; சுற்றளவு 14 சென்டிமீட்டர்.

வேறொரு முறையில் சிந்திக்கலாம்:

முதலில் செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 10 சென்டிமீட்டர், நான்கு பக்கங்களிலும் 1 சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தது; மொத்தம் 4 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தது. புதிய சுற்றளவு $10 + 4 = 14$ சென்டிமீட்டர்.

பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தது எனிலோ? இரண்டாவது கூறியதைப் போன்று சிந்தித்தால், ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் 2 சென்டிமீட்டர் வீதம், மொத்தம் அதிகரித்த நீளம் $4 \times 2 = 8$ சென்டிமீட்டர்; புதிய சுற்றளவு $10 + 8 = 18$ சென்டிமீட்டர்.

இவ்வாறு கணக்கீடு செய்வது எளிது அல்லவா. அதிகரித்த நீளம் $2\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் எனில் பெரிய செவ்வகத்தின் சுற்றளவு,

$$\left(4 \times 2\frac{1}{2}\right) + 10 = 20 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

பொதுவாகக் கூறினால், ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் அதிகரித்தது எத்தனை சென்டிமீட்டர் ஆயினும், அதன் நான்கு மடங்கை 10 சென்டிமீட்டருடன் கூட்டினால், புதிய சுற்றளவு கிடைக்கும்.

இதை இயற்கணித முறையில் எழுதலாம்; ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் அதிகரித்தது $x$ சென்டிமீட்டர் என்றும், புதிய சுற்றளவு $p$ சென்டிமீட்டர் என்றும் எழுதினால்,

$$p = 4x + 10$$

இனி, பல நீளங்கள் அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப மாறுகின்ற சுற்றளவுகளை உடனடியாக எழுதலாம்.

3 சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தால் சுற்றளவு 22 சென்டிமீட்டர்

$3\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தால், சுற்றளவு 24 சென்டிமீட்டர்

$3\frac{3}{4}$ சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தால், சுற்றளவு 25 சென்டிமீட்டர்

இயற்கணித முறையில் இதைச் சற்றுச் சுருக்கி எழுதலாம்;

$x = 3$ என எடுத்தால் $p = 22$

$x = 3\frac{1}{2}$ என எடுத்தால் $p = 24$

$x = 3\frac{3}{4}$ என எடுத்தால் $p = 25$

இதை இன்னும் சுருக்கி எழுத ஓர் இயற்கணித முறை உள்ளது;

$$p(3) = 22$$

$$p\left(3\frac{1}{2}\right) = 24$$

$$p\left(3\frac{3}{4}\right) = 25$$

பொதுவாக இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$p(x) = 4x + 10$$

இந்தச் சுருக்கெழுத்தை மேலும் பார்க்கலாம். முதலில் நமது கணக்கைச் சாதாரண மொழியில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

> பக்கங்களின் நீளம் இரண்டு சென்டிமீட்டரும், மூன்று சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் அனைத்தும் ஒரே போல் அதிகரித்து, பெரிய செவ்வகம் உருவாக்கினால் அந்தச் செவ்வகத்தின் சுற்றளவு, அதிகரித்த நீளத்தின் நான்கு மடங்கைப் பத்துடன் கூட்டியதாகும். எடுத்துக்காட்டாக, பக்கங்கள் எல்லாம் ஒன்றரை சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தால், சுற்றளவு பதினாறு சென்டிமீட்டராகும்.

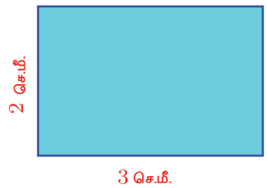
இதை இயற்கணித முறையில் இவ்வாறு சுருக்கி எழுதலாம்;

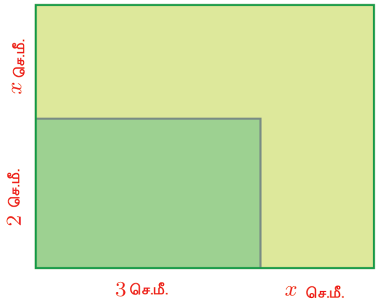
> பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் அனைத்திலும் $x$ சென்டிமீட்டர் அதிகரித்து பெரிய செவ்வகம் உருவாக்கினால் அதன் சுற்றளவு $p$ சென்டிமீட்டர் என எழுதினால், $p = 4x + 10$. எ.கா, $x = 1\frac{1}{2}$ என எடுத்தால், $p = 16$

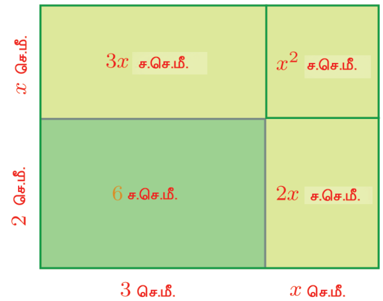
இதில் $x$ மாறுவதற்கு ஏற்ப $p$ மாறுகிறது எனத் தெளிவுபடுத்த $p$ என்று மட்டும் எழுதுவதற்குப் பதிலாக $p(x)$ என எழுதலாம்; அப்போது முன்னர் எழுதியதை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்;

> பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் உடைய ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் அனைத்திலும் $x$ சென்டிமீட்டர் அதிகரித்து, பெரிய செவ்வகம் உருவாக்கியதன் சுற்றளவு $p(x) = 4x + 10$.
>
> எடுத்துக்காட்டாக, $p\left(1\frac{1}{2}\right) = 16$

இனி, இந்தக் கணக்கிலேயே பரப்பளவு மாறுவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். பல நீளங்கள் அதிகரிக்கும் போது பரப்பளவு மாறுவதை ஒவ்வொன்றாகப் பார்ப்பதற்குப் பதிலாக பொதுவாக அதிகரிக்கும் நீளம் $x$ சென்டிமீட்டர் என எடுத்துக் கொண்டு தொடங்கலாம்:




படத்திலிருந்து, புதிய பரப்பளவு

$$6 + 2x + 3x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

(எட்டாம் வகுப்பில் **சமன்பாடுகள்** என்ற பாடம்)

சுற்றளவு கணக்கில் பார்ப்பதைப் போன்று, பக்கங்கள் அனைத்தையும் $x$ சென்டிமீட்டர் அதிகரிக்கும் போது உள்ள பரப்பளவினை $a(x)$ என எழுதினால்,

$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$

இதிலிருந்து

$$a(1) = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$a\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6 = 15\frac{3}{4}$$

$$a(2) = 4 + 10 + 6 = 20$$

என இவ்வாறு கணக்கிடலாம். இவை அனைத்தையும் சாதாரண மொழியில் இவ்வாறு எழுதலாம்:

பக்கங்கள் அனைத்திலும், 1 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தால், பரப்பளவு 12 சதுர சென்டிமீட்டர்.

பக்கங்கள் அனைத்திலும் $1\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தால், பரப்பளவு $15\frac{3}{4}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

பக்கங்கள் எல்லாம் 2 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தால், பரப்பளவு 20 சதுர சென்டிமீட்டர்.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டாக, பக்கங்களின் நீளங்கள் 1, 2, 3 சென்டிமீட்டராக உள்ள கன சதுரக்கட்டையின் பக்கங்களை எல்லாம் ஒன்று போல் அதிகரித்து பெரிய கனசதுரக்கட்டை உருவாக்கினால், கனஅளவு எவ்வாறு மாறும் என்று பார்ப்போம். அதிகரித்த நீளம் $x$ சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், பெரிய கட்டையின் கனஅளவு $(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3)$ கனசென்டிமீட்டர். இதை விரித்து எழுதினால், முன்னர் பார்த்ததைப் போன்று

$$(x + 2)\;(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

என எழுதலாம். இனி இதை $x + 1$ ஆல் பெருக்க வேண்டும். அதற்கு முதல் தொகையின் மூன்று எண்களில் ஒவ்வொன்றையும், இரண்டாவது தொகையின் ஒவ்வொரு எண்ணாலும் பெருக்கிக் கூட்ட வேண்டும்.

$$(x + 1)\,(x^2 + 5x + 6) = x^3 + 5x^2 + 6x + x^2 + 5x + 6 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

விளக்கமாகக் கூறினால்,

பக்கங்களின் நீளம் 1 சென்டிமீட்டர், 2 சென்டிமீட்டர், 3 சென்டிமீட்டர் உடைய கனசதுரக்கட்டையின் பக்கங்கள் அனைத்திலும் $x$ சென்டிமீட்டர் அதிகரித்து, பெரிய கனசதுரக்கட்டை உருவாக்கினால் கனஅளவு $v\,(x)$ கன சென்டிமீட்டர் என எழுதினால், $v\,(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

வேறுபட்ட வேறொரு சூழலைப் பார்ப்போம். 49 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் நேராக மேல்நோக்கி எறியப்படும் ஒரு பொருளின் மேல் நோக்கியுள்ள பயணத்தில், ஒவ்வொரு வினாடியிலும் வேகம் 9.8 மீட்டர்/வினாடி என்ற வீதத்தில் குறையும் என்றும், 5 வினாடிகள் ஆகும்போது வேகம் 0 ஆவதுடன் தொடர்ந்து ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 9.8 மீட்டர்/ வினாடி என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கும் வேகத்தோடு கீழ்நோக்கி விழும் என்றும் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. (எட்டாம் வகுப்பில் **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில், **குறைவேகம்** என்ற பகுதி) நேரத்திற்கும் தூரத்திற்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பின் சமன்பாடு தெரியும். $x$ வினாடியில் வேகம், இப்போது செய்வது போல் $s(x)$ மீட்டர் / வினாடிஎன எழுதினால்

$$s\,(x) = 49 - 9.8x$$

வெவ்வேறு நேரங்களின் வேகத்தை இதிலிருந்து கணக்கிடலாம்.

| நேரம் $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| வேகம் $s(x)$ | 49 | 39.2 | 29.4 | 19.6 | 9.8 | 0 | –9.8 | –19.6 | –29.4 | –39.2 | –49 |

இதில் கீழ் வரிசையில் பூஜ்யத்தின் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே எண்கள் குறையாக வருகின்ற கணக்கு என்ன? இதன் இயற்பியல் சார்ந்த விளக்கம் என்ன?

(1) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் மற்ற பக்கத்தின் நீளத்தை விட 1 சென்டிமீட்டர் குறைவான செவ்வகங்களில், சிறிய செவ்வகத்தின் நீளம் $x$ சென்டிமீட்டர் என எடுக்கவும்.

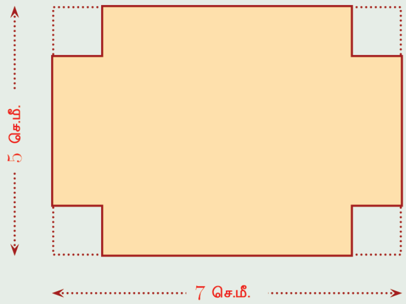
i) இவற்றின் சுற்றளவுகள் $p(x)$ என எடுத்து, $x$ க்கும் $p(x)$ க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதவும்.

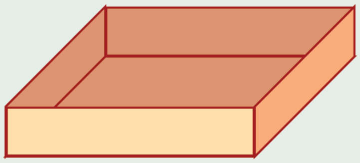
ii) இவற்றின் பரப்பளவுகள் $a(x)$ சதுர சென்டிமீட்டர் என எடுத்து $x$ க்கும் $a(x)$ க்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

iii) $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடவும். ஏதேனும் வரிசை காணப்படுகிறதா?

iv) $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$, $a(5)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடவும். ஏதேனும் வரிசை காணப்படுகிறதா?

(2) படத்தில் காட்டியிருப்பதைப் போன்று, ஒரு செவ்வகத்தின் நான்கு மூலைகளிலிருந்தும் சிறிய சதுரங்களை வெட்டி மாற்றி, மேல்நோக்கி மடித்து ஒரு பெட்டி உருவாக்கப்படுகிறது.



i) வெட்டி எடுக்கப்படுகின்ற சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $x$ சென்டிமீட்டர் என எடுத்து, பெட்டியின் மூன்று அளவுகளும் எழுதவும்.

ii) பெட்டியின் கனஅளவு $v(x)$ என எடுத்து, $x$ க்கும் $v(x)$ க்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதவும்.

iii) $v\left(\frac{1}{2}\right)$, $v(1)$, $v\left(1\frac{1}{2}\right)$ என்பனவற்றைக் கணக்கிடவும்.

(3) ஒரு மீட்டர் நீளம் உள்ள கயிறால் உருவாக்கக்கூடிய செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $x$ செண்டிமீட்டர் என்றும், செவ்வகத்தின் உள்ளே உள்ள பரப்பளவு $a(x)$ சதுர செண்டிமீட்டர் என்றும் எடுக்கவும்.

i) $x$ க்கும் $a(x)$ க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதவும்.

ii) $a(10)$, $a(40)$ இவை ஒரே எண் ஆவது ஏன்?

iii) $x$ என இரு வேறுபட்ட எண்களை எடுக்கும்போது $a(x)$ என ஒரே எண்ணே கிடைக்க, இந்த எண்களின் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

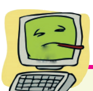
## சிறப்பு வாக்கியங்கள்

பல்வேறு அளவுகளின் இடையே உள்ள தொடர்பை இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளாக எழுதவதைப் பார்த்தோம் அல்லவா. சாதாரண எண்களின் செயல்களாகவும் இவற்றைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, முதல் செவ்வகக் கணக்கில் பக்கங்களின் நீளத்தை நீட்டியதற்கும் புதிய சுற்றளவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

$$p(x) = 4x + 10$$

என எழுதி, செவ்வகத்தின் சுற்றளவைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய செயல் என்பதற்கு அப்பால் பொதுவாக எண்களை 4 ஆல் பெருக்கி 10 ஐக் கூட்டவும் என்ற செயலாகவும் இதைக் காணலாம். இதைப் போன்று முன்னர் செய்து பார்த்த பல தொடர்புகளையும் சோதித்துப் பார்க்கலாம்.

- $a(x) = x^2 + 5x + 6$
- $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $s(x) = 49 - 9.8x$



செவ்வகத்திலிருந்து வெட்டி உருவாக்கிய இத்தகைய ஒரு பெட்டியை ஜியோஜிப்ராவில் உருவாக்குவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். Min = 0, Max = 2.5 வரும்படி ஒரு ஸ்லைடர் a உருவாக்கவும். பக்கங்களின் நீளம் 7 − 2a, 5 − 2a வருமாறு ஒரு செவ்வகம் வரையவும். இனி ஜியோஜிப்ராவில் 3D Graphics திறக்கவும். (View ⟶ 3D Graphics) நாம் வரைந்த செவ்வகத்தை 3D Graphics இல் காணலாம். Extrude to Prism or Cylinder ஐப் பயன்படுத்தி இந்தச் செவ்வகத்தில் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் பெட்டியின் உயரமாக ஸ்லைடரின் பெயர் அளிக்கவும். Volume பயன்படுத்திப் பெட்டியின் கனஅளவை அடையாளப் படுத்தலாம். ஸ்லைடர் நீக்கி a ஐ மாற்றும் போது பெட்டியும் கனஅளவும் எவ்வாறு மாறுகிறது எனப் பார்க்கவும்.

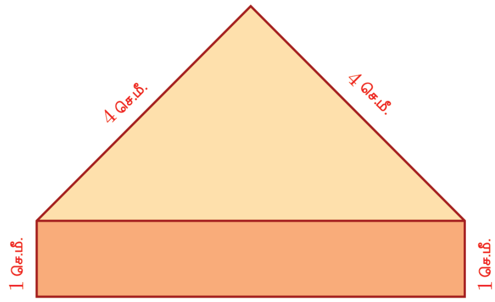
இவற்றை எண்களின் செயல்களாகக் காணும்போது அவற்றின் பொதுவான சில தன்மைகளைக் காணலாம். $x$ என்ற எண்ணின் பல நிலைகளில் உள்ள அடுக்குகளைக் குறிப்பிட்ட எண்களால் பெருக்குவதும், அத்தகைய பெருக்கற் பலன்களைக் கூட்டுவதும் கழிப்பதும் மட்டுமே இவை அனைத்திலும் செய்யப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய செயல்கள் மட்டும் உட்படும் இயற்கணித வாக்கியத்தின் பொதுவான பெயரே பல்லுறுப்பு (polynomial)

எண்களில் இத்தகையன அல்லாத செயல்கள் செய்யும் சூழல்களும் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பக்கம் மற்றப் பக்கத்தை விட 1 செண்டிமீட்டர் அதிகமான செவ்வகங்களில் மூலைவிட்டங்களின் நீளத்தைப் பார்ப்போம். சிறிய பக்கம் $x$ செண்டிமீட்டர் என எடுத்தால் மூலைவிட்டத்தின் நீளம்

$$\sqrt{x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \text{ செ.மீ.}$$

இதில் எண்களின் வர்க்கமூலம் எடுக்கவும் என்ற செயல் உள்ளபடியால் நமது வரையறைப்படி இது ஒரு பல்லுறுப்பு அல்ல.

இனி இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.




ஓர் இரு சமப்பக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தில் செவ்வகம் சேர்த்து வைத்த இந்த வடிவத்தின் பரப்பளவு என்ன?

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 8 சதுர செண்டிமீட்டர் என்று எளிதாகக் காணலாம். செவ்வகத்தின் பெரிய பக்கம் இரு சமப்பக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் ஆனதால் $4\sqrt{2}$ செண்டிமீட்டர். அப்போது செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $4\sqrt{2}$ சதுர செண்டி மீட்டர்; மொத்தம் $8 + 4\sqrt{2}$ சதுர செண்டி மீட்டர்.

செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோணப் பக்கங்களின் நீளம் வேறு ஏதேனும் எண் எனிலோ? இந்த நீளத்தை $x$ செண்டிமீட்டர் என எடுத்தால், மொத்தப்பரப்பளவு

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\,x$$

சதுர செண்டிமீட்டர் எனக் காணலாம். இதில் 2 இன் வர்க்கமூலம் உண்டு. ஆனால் மாறுகின்ற எண்களில் செய்யும் செயல்களில் வர்க்கம் எடுப்பதும், $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ ஆகிய குறிப்பிட்ட எண்களைக் கொண்ட பெருக்கல் மட்டும் உள்ளது. அப்படியானால் இதுவும் ஒரு பல்லுறுப்புதான்.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம். பரப்பளவு 25 சதுர செண்டிமீட்டர் உள்ள செவ்வகங்களில் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $x$ என எடுத்தால் சுற்றளவு,

$$2x + \frac{50}{x} \text{ செ.மீ.}$$

இதில் மாறுகின்ற எண்களின் தலைகீழி எடுக்கும் செயல் உள்ளதால் இது ஒரு பல்லுறுப்பு அல்ல.

ஒரு பல்லுறுப்பில், மாறுகின்ற எண்களின் அடுக்குகளே எடுக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு வரும் மிகப்பெரிய அடுக்கைப் பல்லுறுப்பின் படி (degree of the polynomial) எனக்கூறுவர். அப்போது மேலே கூறிய பல்லுறுப்புகளில் முதல் பல்லுறுப்பின் படி 2, இரண்டாவது பல்லுறுப்பின் படி 3, மூன்றாவது பல்லுறுப்பின் படி 1.

படி 1 ஆன பல்லுறுப்பு என்பதற்குப் பதிலாக ஒரு படி பல்லுறுப்பு (first degree polynomial), படி 2 ஆன பல்லுறுப்பு என்பதற்குப் பதிலாக இரு படி பல்லுறுப்பு (second degree polynomial) என இவ்வாறு கூறலாம்.

படிகளின் அடிப்படையில் பல்லுறுப்பின் பொதுவடிவத்தை எழுதலாம்.

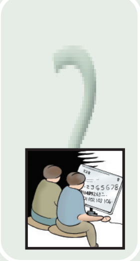
ஒரு படி பல்லுறுப்பு : $ax + b$

இரு படி பல்லுறுப்பு : $ax^2 + bx + c$

மூன்றாம் படி பல்லுறுப்பு : $ax^3 + bx^2 + cx + d$

இங்கு $a, b, c, d$ ஆகிய எழுத்துக்கள், மாறாத எண்களைக் குறிக்கின்றன. அதாவது, $x$ என பல எண்களை எடுக்கும் போது $a, b, c, d$ என இவ்வாறு எழுதியிருக்கும் எண்களுக்கும் மாற்றம் இல்லை.

இந்த எண்கள், எண்ணல் எண்களோ, பின்ன எண்களோ, பின்னமல்லாத எண்களோ, குறை எண்களோ எதுவும் ஆகலாம். இவற்றைப் பல்லுறுப்பின் குணகங்கள் (Coefficients) என்று கூறுவோம்.

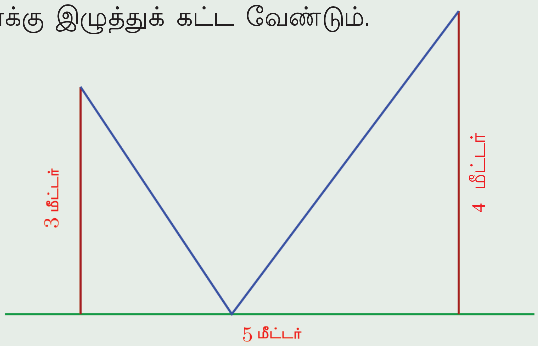


(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளில் எல்லாம் கூறப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை இயற்கணிதத்தில் எழுதி பல்லுறுப்பா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும். உறுதிப்படுத்துவதன் காரணமும் எழுதுக.

i) சதுரவடிவத்தில் உள்ள ஒரு மைதானத்தைச் சுற்றி 1 மீட்டர் அகலத்தில் ஒரு பாதை உள்ளது. மைதானத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கும், பாதையின் பரப்பளவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

ii) 7 லிட்டர் தணணீரும், 3 லிட்டர் அமிலமும் சேர்ந்த திரவத்தில் மீண்டும் சேர்க்கும் அமிலத்தின் அளவிலும் திரவத்தில் உள்ள அமிலத்தின் சதவீதத்திலும் ஏற்படும் மாற்றமும்.

iii) 3 மீட்டர், 4 மீட்டர் உயரம் உள்ள இரு கம்புகள் 5 மீட்டர் இடைவெளியில் தரையில் செங்குத்தாக நடப்பட்டுள்ளன. ஒரு கம்பின் மேல் முனையிலிருந்து ஒரு கயிறு இழுத்து தரையில் கட்டப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து இரண்டாவது கம்பின் மேல் முனைக்கு இழுத்துக் கட்ட வேண்டும்.




ஒரு கம்பின் அடியிலிருந்து தரையில் கயிறு கட்டப்பட்டுள்ள இடத்திற்கு உள்ள தூரத்திற்கும் கயிறின் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு.

(2) கீழே கூறப்பட்டுள்ள செயல்கள் ஒவ்வொன்றையும் இயற்கணித வாக்கியமாக எழுதவும். எவையெல்லாம் பல்லுறுப்பு என விளக்கவும்.

i) எண், அதன் தலைகீழி என்பவனவற்றின் தொகை.

ii) எண் அதன் வர்க்கமூலம் என்பவனவற்றின் தொகை.

iii) எண்ணுடன் அதன் வர்க்கமூலம் கூட்டியதற்கும், எண்ணிலிருந்து அதன் வர்க்கமூலம் கழித்ததற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கற்பலன்.

(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள முறையில் உள்ள பல்லுறுப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

i) $p(1) = 1$ உம் $p(2) = 3$ உம் உள்ள ஓர் ஒரு படி பல்லுறுப்பு

ii) $p(1) = -1$ உம் $p(-2) = 3$ உம் உள்ள ஓர் ஒரு படி பல்லுறுப்பு

iii) $p(0) = 0, p(1) = 2, p(2) = 6$ உள்ள ஓர் இரு படி பல்லுறுப்பு

iv) $p(0) = 0, p(1) = 2,$ உள்ள மூன்று வேறுபட்ட இரு படி பல்லுறுப்புகள்

## பல்லுறுப்புச் செயல்கள்

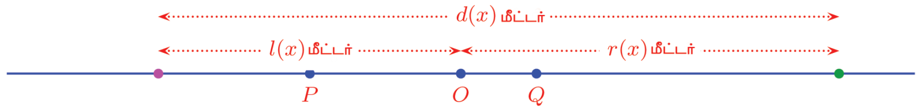
நீளமான ஒரு கோட்டில் $O$ என ஒரு புள்ளியும் அதன் 2 மீட்டர் இடப் பக்கம் $P$ என ஒரு புள்ளியும் இருப்பதாகக் கருதவும். $P$ இல் இருந்து ஒரு பொருள் கோட்டின் வழியாக இடப்பக்கம் நோக்கி நகர்கிறது எனவும் கருதவும். வேகம் எப்போதும் 1 மீட்டர்/வினாடி ஆகும். ஒரு வினாடிக்குப் பின்னர் இந்தப் பொருள் $O$ க்கு இடப்பக்கம் எத்தனை மீட்டரில் இருக்கும்? $2\frac{1}{2}$ வினாடி ஆகும்போது?

இதை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி எழுதிப் பார்ப்போம். $x$ வினாடியில், $O$ இன் $l(x)$ மீட்டர் இடப்பக்கம் என எடுத்தால்,

$$l(x) = x + 2$$

இனி $O$ இன் 1 மீட்டர் வலப்பக்கத்திலிருந்து வேறொரு பொருள் 2 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் நகர்கிறது என்றும் கருதவும். இதன் தூரத்தின் கணக்கையும் ஒரு பல்லுறுப்பாக எழுதலாம்: $x$ வினாடிகளில் இது $O$ இன் $r(x)$ மீட்டர் வலப்பக்கம் என எடுத்தால்,

$$r(x) = 2x + 1$$




5 வினாடிகள் ஆகும் போது இந்தப் பொருட்களின் இடையிலுள்ள தூரம் என்னவாகும்?

இடப்பக்கம் போன பொருள் $O$ இன் $l(5)$ மீட்டர் இடப்பக்கமும் வலப்பக்கம்

போனது, $O$ இன் $r\,(5)$ மீட்டர் வலப்பக்கமும் ஆகும். அப்போது அவற்றின் இடையிலுள்ள தூரம் $l\,(5) + r\,(5)$ மீட்டர்,

$$l\,(5) = 5 + 2 = 7$$

$$r\,(5) = (2 \times 5) + 1 = 11$$

$$l\,(5) + r\,(5) = 7 + 11 = 18$$

அதாவது, 5 வினாடிகள் ஆகும்போது பொருட்களின் இடையில் 18 மீட்டர் தூரம் இருக்கும். 10 வினாடிகள் ஆகும்போது?

ஒவ்வொரு நேரத்திலும் $l\,(x)$, $r\,(x)$ எனும் இவற்றைத் தனித்தனியாகக் கணக்கிட்டுக் கூட்டுவதற்குப் பதிலாக, பொருட்களின் இடையிலுள்ள தூரத்தையும் ஒரு இயற்கணித வாக்கியமாக உருவாக்கினால்?

$x$ வினாடிகளில் பொருட்களின் இடையிலுள்ள தூரம் $d\,(x)$ மீட்டர் என எடுத்தால்,

$$d(x) = (x + 2) + (2x + 1) = 3x + 3 = 3(x + 1)$$

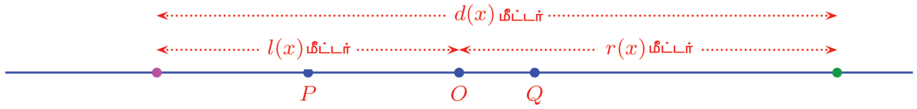
அப்படியானால் இனி 10 வினாடிகளில் பொருட்களின் இடையிலுள்ள தூரத்தைக் கணக்கிட, 10 உடன் 1 ஐக் கூட்டி 3 மடங்கு எடுத்தால் போதாதா?

$$d\,(10) = 3 \times 11 = 33 \text{ மீட்டர்}$$

எண்கள் மட்டுமாகக் கூறினால், $x$ எந்த எண் எனினும்

$$d(x) = l\,(x) + r\,(x)$$

அல்லவா. அப்போது $d(x)$ என்ற பல்லுறுப்பு, $l(x)$, $r(x)$ ஆகிய பல்லுறுப்புகளின் தொகை எனக் கூறலாம்.




இதைப்போன்று எந்த இரு பல்லுறுப்புகளின் தொகையையும் கண்டுபிடிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$p(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$q(x) = 2x^2 + 5x - 1$$

என எடுத்தால்,

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^2 - 2x + 3) + (2x^2 + 5x - 1) \\ &= (x^2 + 2x^2) + (5x - 2x) + (3 - 1) \\ &= 3x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

கூட்டுவதைப் போன்று கழிக்கவும் செய்யலாம்.

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (x^2 - 2x + 3) - (2x^2 + 5x - 1) \\ &= (x^2 - 2x + 3) - 2x^2 - 5x + 1 \\ &= (x^2 - 2x^2) - (2x + 5x) + (3 + 1) \\ &= -x^2 - 7x + 4 \end{aligned}$$

பெருக்கவும் செய்யலாம்.

$$\begin{aligned} p(x)\, q(x) &= (x^2 - 2x + 3)\,(2x^2 + 5x - 1) \\ &= (2x^4 + 5x^3 - x^2) - (4x^3 + 10x^2 - 2x) \\ &\quad + (6x^2 + 15x - 3) \\ &= (2x^4) + (5x^3 - 4x^3) + (6x^2 - 10x^2 - x^2) \\ &\quad + (15x + 2x) - 3 \\ &= 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 17x - 3 \end{aligned}$$

**அடுக்கும் வரிசையும்**

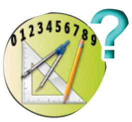
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ என எட்டாம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா. $(x + 1)^3$ கண்டுபிடிக்க, $x^2 + 2x + 1$ ஐ $(x + 1)$ ஆல் பெருக்கினால் போதும்.

$$\begin{aligned} (x + 1)^3 &= (x^2 + 2x + 1)\,(x + 1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. இதை $x + 1$ ஆல் பெருக்கினால் $(x + 1)^4$ கிடைக்கும். (செய்து பார்க்கவும்). $x + 1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$ ... இவற்றில் எல்லாம் வரும் எண்களை வரிசையாக எழுதிப் பார்க்கவும்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| 1 | 2 | 1 | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... |

ஏதேனும் வரிசை காணப்படுகிறதா? $(x + 1)^5$ என்ன என்று பெருக்கிப் பார்க்காமல் கூறலாமா?




ஏதேனும் இரு பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் ஓர் எண் ஆகுமா?

(1) $p(x) = 2x^2 + 3x + 5$, $q(x) = x^2 + 4x + 1$, $s(x) = p(x) + q(x)$ என எடுத்து, $p(10)$, $q(10)$, $s(10)$, $p(10) + q(10)$ ஆகிய எண்களைக் கணக்கிடவும்.

(2) $x^2 + 4x - 5$ என்ற பல்லுறுப்புடன் எந்தப் பல்லுறுப்பைக் கூட்டினால் $2x^2 - 3x + 1$ என்ற பல்லுறுப்பு கிடைக்கும்?

(3) $x^2 + 4x - 5$ என்ற பல்லுறுப்பிலிருந்து எந்தப் பல்லுறுப்பைக் கழித்தால் $2x^2 - 3x + 1$ என்ற பல்லுறுப்பு கிடைக்கும்?

(4) $p(x) + q(x) = x^2 - 4x + 1$, $p(x) - q(x) = x^2 + 5x - 2$ ஆகின்ற. $p(x)$, $q(x)$ ஆகிய பல்லுறுப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) $p(x) = 3x^2 - 2x + 4$ என எடுத்து, கீழே கூறப்படும் பல்லுறுப்புகளைக் கணக்கிடவும்.

i) $(x + 1)\,p(x) + (x - 1)\,p(x)$

ii) $(x + 1)\,p(x) - (x - 1)\,p(x)$

iii) $\frac{1}{2}(x + 1)\,p(x) - \frac{1}{2}(x - 1)\,p(x)$

## ஆய்வு

- எந்த ஒரு பல்லுறுப்பையும் $(x - 1)$ ஆல் பெருக்கிக் கிடைக்கும் பல்லுறுப்பின் குணகங்களின் சிறப்புத்தன்மை என்ன? $(x + 1)$ ஆல் பெருக்கினால்? $(x^2 - 1)$ ஆல் ஆனால்?

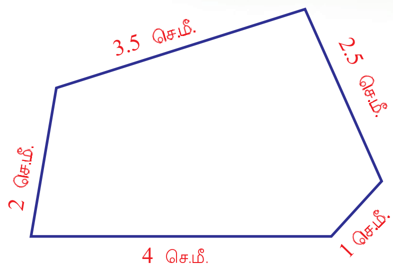
## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | என்னால் முடியும் | ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்பட வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • மாறும் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள மாறாத தொடர்புகளை இயற்கணித வாக்கியங்களாக எழுதுவதுடன் அவற்றின் பல்லுறுப்புகளைப் பகுத்தறிதல்.<br>• பல்லுறுப்புகளைச் சாதாரண எண்களின் செயல்களாகக் காண்பதுடன் அவற்றின் சிறப்புத்தன்மைகளைப் பகுத்தறிதல்.<br>• பல்லுறுப்புகளின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் பெருக்கற்பலனையும் கண்டுபிடிக்க வேண்டிய சூழல்களைப் பகுத்தறிந்து செய்தல். | | | |

# 9 வட்டங்களின் அளவுகள்

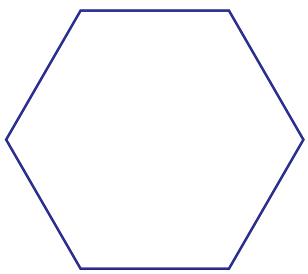
## வட்டமும் பலகோணங்களும்

ஒரு பலகோணத்தின் சுற்றளவு கணக்கிடுதல் எளிதாகும். பக்கங்களின் நீளங்களைக் கூட்டினால் போதும்:




சுற்றளவு $4 + 1 + 2.5 + 3.5 + 2 = 13$ செ.மீ.

ஒழுங்கு பலகோணம் எனில் மிக எளிதாகும்:

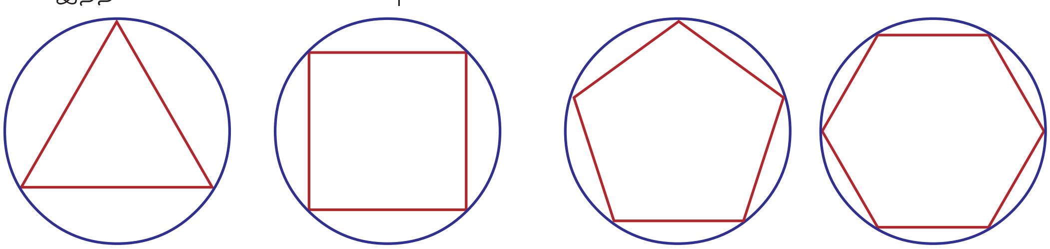



சுற்றளவு $6 \times 2 = 12$ செ.மீ.

வட்டமானாலோ?

நூல் அல்லது கயிறு வைத்து அளக்கலாம். அளக்காமல் காண்பது அல்லவா கணிதச்சுவை.

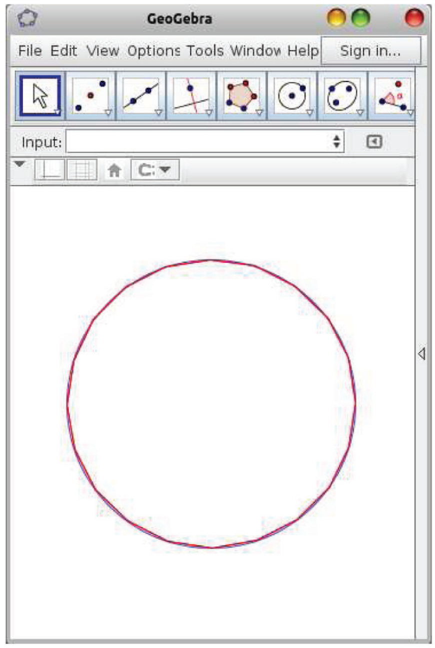
இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்.



வட்டத்தினுள் அமையும் ஒழுங்கு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடுந்தோறும் அது வட்டத்துடன் நெருங்குகிறது அல்லவா?

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.

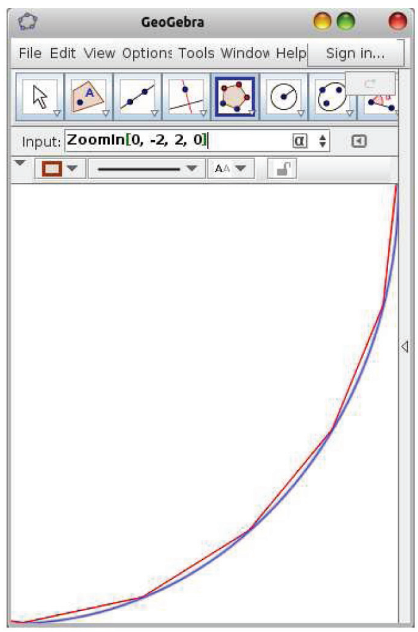
வட்டத்தினுள் 20 பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தை GeoGebra இல் வரைந்ததாகும் இது. வட்டத்தையும் பலகோணத்தையும் பகுத்தறிய இயலவில்லை அல்லவா?




**வட்டமும் பலகோணமும்**

ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்தி ஒரு வட்டத்தினுள் ஒழுங்கு பலகோணங்களை வரையலாம். Min = 3, Max = 100 ஆகுமாறு n என்ற Integer Slider உருவாக்கவும். வட்டம் வரைந்து அதில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Angle with Given Size ஐப் பயன்படுத்தி வட்டத்திலுள்ள புள்ளியிலும் வட்ட மையத்திலும் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கின்ற சாளரத்தில் கோண அளவாக $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ என்று எழுதவும். அப்போது வட்டத்தில் வேறு ஒரு புள்ளியும் கிடைக்கும். Regular Polygon ஐப் பயன்படுத்தி வட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளிலும் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கின்ற சாளரத்தில் உச்சிகளின் எண்ணிக்கையை n என்று அளிக்கவும். n பக்கம் உள்ள பலகோணம் கிடைக்கும். Distance or Length ஐப் பயன்படுத்திப் பலகோணத்திற்குள் கிளிக் செய்தால் அதன் சுற்றளவு கிடைக்கும். ஆரம் $\frac{1}{2}$ ஆன வட்டத்திற்குள் இத்தகைய வரிசையான பலகோணங்கள் வரைந்து அவற்றின் சுற்றளவைக் குறிக்கவும். பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் போது சுற்றளவிற்கு ஏற்படும் மாற்றம் என்ன?

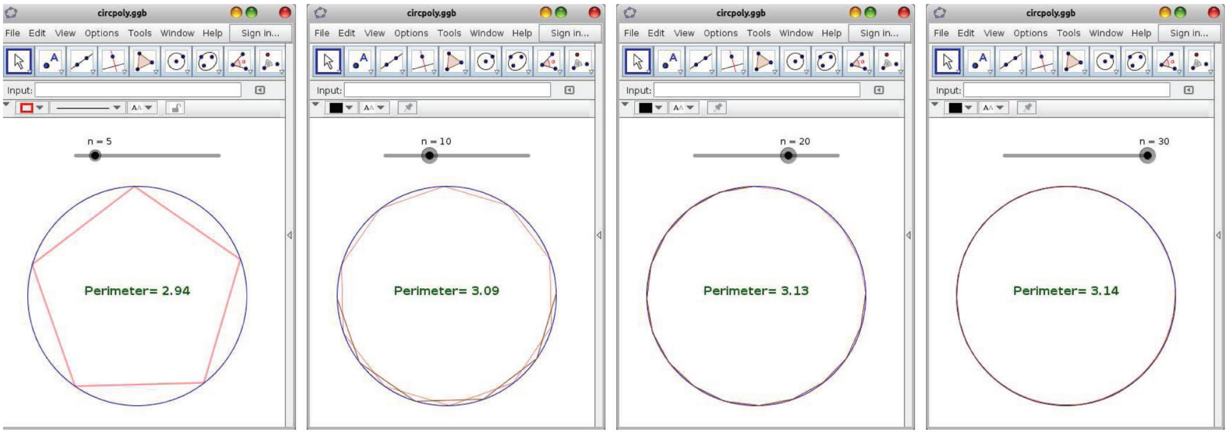
படத்தின் ஒரு பகுதியைப் பெரியதாக ஆக்கிக் காண்பிக்கப் பட்டுள்ளதே இந்தப் படம்.




அப்படியானால் பக்கங்கள் எவ்வளவு அதிகரித்தாலும் பலகோணம் வட்டம் ஆகாது. மிக நெருங்கி வருகிறது என்பது மட்டுமே.

எதுவாயினும் இந்தப் பலகோணங்களின் சுற்றளவு வட்டத்தின் சுற்றளவினை நெருங்கி வருகிறது அல்லவா. பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடுந்தோறும் அதில் நெருங்கவும் செய்யும். பண்டைய காலம் முதலே கணிதம்சார் பணியாளர்கள் வட்டத்தின் சுற்றளவைக் காண இந்த முறையையே பயன்படுத்தினர்.

இன்று இதன் கணக்கைச் சரியாக எழுதிக்கொடுத்தால், கணிதச் செயல்களைக் கணினியைப் பயன்படுத்திச் செய்யலாம். விட்டம் 1 சென்டி மீட்டர் உள்ள வட்டத்தில் 5, 10, 20, 30 பக்கங்கள் உள்ள பலகோணங்களின் சுற்றளவுகளை ஜியோஜிப்ரா கணக்கிட்டதன் படங்களைப் பார்க்கவும்.

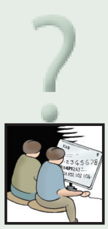



இந்த எண்கள், விட்டம் 1 ஆன (சென்டிமீட்டர், மீட்டர், எதுவாக இருந்தாலும்) வட்டத்தின் சுற்றளவுடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது என அறியலாம். அப்படியானால் சில வினாக்கள் உள்ளன.

- 2.94, 3.09, 3.13, 3.14, . . . எனத் தொடர்கின்ற இந்த எண்கள் எந்த எண்ணின் அருகே நகர்கின்றன?
- இந்த எண்ணிலிருந்து விட்டம் 1 அல்லாத வட்டங்களின் சுற்றளவை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

இரண்டாவது வினாவிற்கு முதலில் பதில் கூறலாம்.

அதன் முன்னர் சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.



(1) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம், அதன் மையக்குத்து கோடுகள் சந்திக்கின்ற புள்ளியாகும் என்று தெளிவுபடுத்தவும்.

i) விட்டம் 1 ஆன வட்டத்தின் மூன்று புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கின்ற சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

ii) அத்தகைய ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடுக.

(2) ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகள் எல்லாம் விட்டம் 1 உடைய வட்டத்தில் ஆகும். சதுரத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடுக.

(3) விட்டம் 1 உடைய வட்டத்தின் புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கின்ற ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

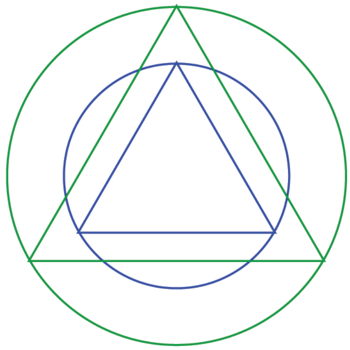
### பலகோணங்கள் வழியே

வட்டத்தின் சுற்றளவும், பரப்பளவும் சதுரத்தினுடையவும் அறுகோணத்தினுடையவும் அளவுகளுடன் ஒப்புமை செய்கின்ற கணக்குகளை முற்காலத்திலேயே காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கி.மு. 1600 இல் உள்ளது எனக் கருதப்படுகின்ற பாபிலோனியாவில் உள்ள ஒரு களிமண் பலகையில், வட்டத்தின் உள்ளேயுள்ள அறுகோ ணத்தின் சுற்றளவு, வட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$ பாகமாகும் என்று கூறப்பட்டுள்ளது. அதாவது $\frac{24}{25}$ பாகம். இது ஏறக்குறைய சரியாகவும் உள்ளது.

வட்டத்தை ஒவ்வொரு பலகோணங்களுடன் ஒப்புமை செய்வதற்குப் பதிலாக, பல கோணங்களின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்துக் கொண்டிருந்தால், படிப்படியாக வட்டத்தை நெருங்கலாம் என்ற சிந்தனை தோன்றியது. கி.மு. ஐந்தாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த 'ஆண்டிபோன்' வெளியிட்ட இந்தக் கருத்தை நான்காம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்திருந்த 'யூடோக்சஸ்'. மேலும் மேம்படுத்தினார். இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தின் சுற்றளவைக் காண்பதற்கு உரிய ஒரு செயல்முறையை உருவாக்கியவர். கி.மு. இரண்டாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்திருந்த, உலகில் எக்காலத்திலும் மிகப் புகழ்பெற்ற அறிவியல் அறிஞரில் ஒருவரான ஆர்க்கிமிடீஸ் ஆவார்.

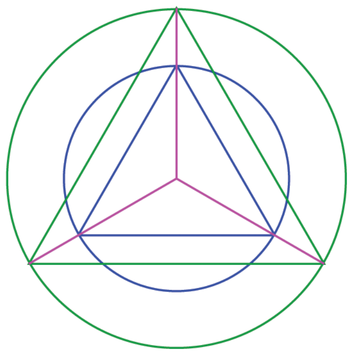
## விட்டமும் சுற்றளவும்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



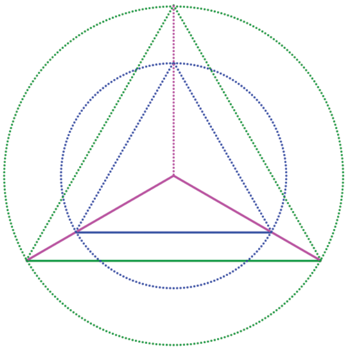
ஒரே மையத்தைக் கொண்ட இரு வட்டங்களில் அமைந்த சமபக்க முக்கோணங்கள். முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளம் மாறுவதன் கணக்கு என்ன?

முக்கோணங்களின் உச்சிகளையும் வட்ட மையத்தையும் இணைத்துப் பார்க்கலாம்.



இந்தக் கோடுகள் இரு முக்கோணங்களையும் மூன்று சிறு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றன அல்லவா.

கீழே உள்ள ஒரு ஜோடி முக்கோணங்களை மட்டும் பார்க்கலாம். இந்த முக்கோணங்கள் வடிவொப்புமை உடையன.

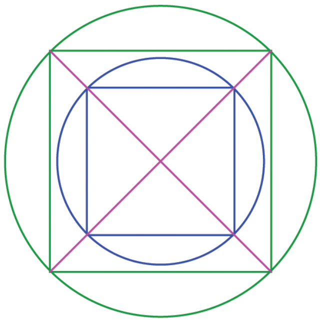


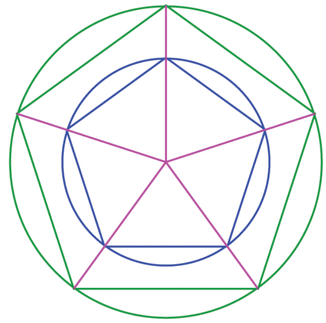
(காரணம்?) இடது அல்லது வலது பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம், வட்டங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் ஆகும். எனவே, கீழே உள்ள பக்கங்களும் இதே விகிதத்தில் ஆகும்.

வேறு இரண்டு சிறிய முக்கோணங்களிலும் இதைப் போன்றே உள்ளன அல்லவா. அப்போது வட்டங்களிலுள்ள முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகள்

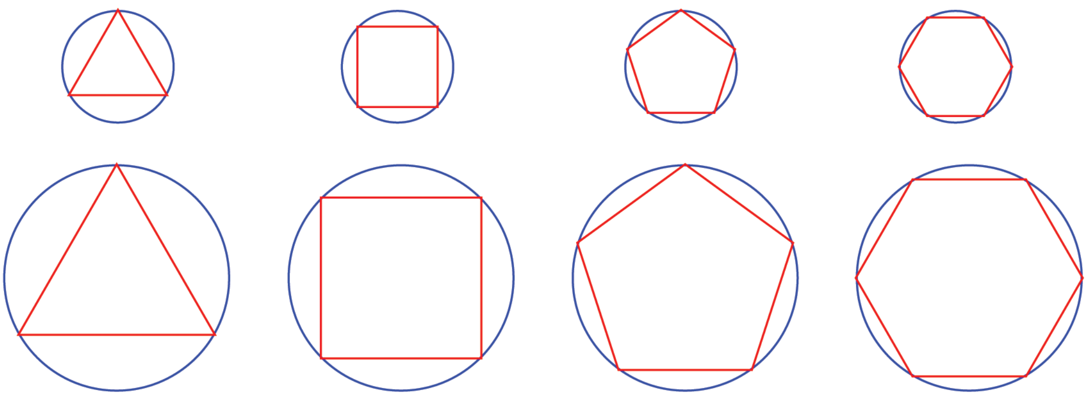
ஆரங்களின் விகிதத்தில் ஆகும். ஆரங்களின் விகிதமே, விட்டங்களின் விகிதமும் ஆகும்.

முக்கோணங்களுக்குப் பதிலாக வேறு பலகோணங்கள் எடுத்தாலும், இதைப்போன்றே முக்கோணங்களாகப் பிரித்து சுற்றளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதமே, விட்டங்களின் இடையே உள்ள விகிதம் எனக் காணலாம்.





இனி ஒரு வட்டத்திலும், விட்டம் இரு மடங்கு ஆன வட்டத்திலும் பலகோணங்கள் வரைகிறோம் என்று கருதவும்.



பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள், அந்தந்த வட்டத்தின் சுற்றளவை நோக்கியே நெருங்குகிறது. பெரிய வட்டத்தின் விட்டம் இரு மடங்கு என்பதால், அதில் அமைந்துள்ள எல்லாப் பலகோணங்களின் சுற்றளவு, சிறிய வட்டத்திலுள்ள பலகோணங்களின் சுற்றளவின் இரு மடங்காகும்.

இதை எண் அடிப்படையில் பார்ப்போம். சிறிய வட்டத்திலுள்ள முக்கோணத்தின் சுற்றளவு $p_1$, சதுரத்தின் சுற்றளவு $p_2$, ஐங்கோணத்தின் சுற்றளவு $P_3$, என இவ்வாறு எடுப்போம். சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு $c$ என்றும் எடுப்போம். அப்போது $p_1$, $p_2$, $p_3$, . . . என இவ்வாறு தொடர்கின்ற எண்கள் $c$ என்ற எண்ணை நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.

பெரிய வட்டத்தில் பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள் $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$, . . . என்றல்லவா. $p_1$, $p_2$, $p_3$, . . . என்ற எண்கள் $c$ ஐ

ஜியோஜிப்ராவில் a என்ற பெயரில் ஒரு ஸ்லைடரும் m, n என்ற பெயரில் இரண்டு Interger Slider களும் உருவாக்கவும். ஆரம் a எனக் கொண்டு ஒரு வட்டமும் ma எனக் கொண்டு வேறொரு வட்டமும் வரையவும். இரு வட்டங்களிலும் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை n ஆகுமாறு ஒழுங்கு பலகோணங்கள் வரைந்து அவற்றின் சுற்றளவுகளைக் குறிக்கவும். m = 2 ஆகும்போது (பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் சிறியதன் இரு மடங்கு). சுற்றளவுகளின் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? பலகோணங்களின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை மாற்றிப் பார்க்கவும். m = 3 என ஆகும்போது முதல் வட்டத்தின் ஆரம் எதுவாயினும் இந்தத் தொடர்புகள் நிலை நிற்கிறதா? a ஐ மாற்றிப் பார்க்கவும்.

நெருங்குவதால் $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ என்ற எண்கள் $2c$ ஐ நெருங்கி வருகின்றன. அதாவது சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவின் இரு மடங்கு.

வடிவியல் முறையில் பார்க்கும்போது பெரிய பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள் பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவை நெருங்குகிறது என்று காண இயல்கிறது. எண்ணியல் முறையில் சிந்தித்தால் அவை சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவின் இரு மடங்கை நெருங்குகிறது என்று கிடைக்கிறது. அவ்வாறு பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவின் இரு மடங்கு எனவும் வருகிறது.

இரண்டாவது வட்டத்தின் விட்டம் இரு மடங்கிற்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் மடங்கோ, பாகமோ ஆகுமெனில், சுற்றளவும் அதே அளவில் மாறும். இதைப் போன்று காணலாம்.

**வட்டங்களின் சுற்றளவுகள் மாறுவது, விட்டங்களின் அளவு வீதத்தில் ஆகும்.**

இதை இப்படியும் கூறலாம்;

**வட்டங்களின் சுற்றளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் விட்டங்களின் விகிதமே ஆகும்.**

அப்போது விட்டம் 1 ஆன வட்டத்தின் சுற்றளவைக் கண்டுபிடித்துவிட்டால், எந்த வட்டத்தின் சுற்றளவையும் கணக்கிடுவதற்கு இந்த எண்ணை விட்டத்தால் பெருக்கினால் போதும்.

அவ்வாறு முதல் பகுதியில் கேட்கப்பட்ட இரண்டாவது வினாவுக்கு விடை கிடைத்தது.

(1) ஒரு வட்டத்தில் அமைந்த புள்ளிகளை இணைத்து வரைந்த ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் சுற்றளவு 24 சென்டிமீட்டர்.

i) இதே வட்டத்தில் உச்சிகளை எடுத்து வரைந்த சதுரத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு சென்டிமீட்டர் ஆகும்.?

ii) இந்த வட்டத்தின் இரு மடங்கு விட்டம் உள்ள வட்டத்தில் உச்சிகள் எடுத்து வரைகின்ற சதுரத்தின் சுற்றளவு என்ன?

iii) இதன் பாதி விட்டம் உள்ள வட்டத்தில் உச்சிகள் எடுத்து வரைகின்ற சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு?

(2) ஒரு கம்பியை வளைத்து 4 சென்டி மீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டம் உருவாக்கப்பட்டது. இதன் பாதி நீளம் உள்ள கம்பியை வளைத்து உருவாக்கும் வட்டத்தின் விட்டம் எவ்வளவு?

(3) விட்டம் 2 மீட்டர் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவு தோராயமாக 6.28 மீட்டர் என அளந்து கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. விட்டம் 3 மீட்டர் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவை அளக்காமல் எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

## புதிய ஓர் எண்

விட்டம் 1 ஆன வட்டத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு என்ற முதல் வினாவைச் சிந்தித்துப் பார்ப்போம்.

முதல் பகுதியில் கண்டதைப் போன்று இவ்வாறு ஒரு வட்டத்திற்குள் வரைகின்ற பலகோணங்களின் சுற்றளவை ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்திக் கணக்கிட்டால், இந்த எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான எண்களின் தசம எண் வடிவம் கிடைக்கும். சாதாரணமாக ஜியோஜிப்ராவில் இரண்டு தசம எண் இடங்கள் வரை துல்லியமாக எண்கள் கிடைக்கின்றன. இதைப் பதினைந்து தசம எண் இடங்கள் வரை நீட்டலாம். (Options $\rightarrow$ Rounding) நான்கு தசம எண் இடங்கள் வரை எடுத்தால் இந்த எண்கள் இவ்வாறு கிடைக்கும்:

| பக்கங்கள் | சுற்றளவு | பக்கங்கள் | சுற்றளவு |
|---|---|---|---|
| 3 | 2.5981 | 15 | 3.1187 |
| 4 | 2.8284 | 20 | 3.1287 |
| 5 | 2.9389 | 25 | 3.1333 |
| 6 | 3.0000 | 30 | 3.1359 |
| 7 | 3.0372 | 35 | 3.1374 |
| 8 | 3.0615 | 40 | 3.1384 |
| 9 | 3.0782 | 45 | 3.1390 |
| 10 | 3.0902 | 50 | 3.1395 |

அப்போது விட்டம் 1 ஆன வட்டத்தின் சுற்றளவு தோராயமாக 3.14 இன் அருகில் உள்ள ஓர் எண்ணாகும் எனக் காணலாம்.

பக்கத்தின் நீளம் 1 ஆன சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் போன்று, விட்டம் 1 ஆன வட்டத்தின் சுற்றளவை ஒரு பின்ன எண்ணாக எழுத இயலாது. மூலைவிட்டக் கணக்கு போன்று இதைத் தெளிவுபடுத்துவது எளிதன்று. எட்டாம் நூற்றாண்டில்தான் ஒரு தெளிவு உருவானது.

$\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$ எனும் எண்களிலிருந்து இந்த எண்ணிற்கு ஒரு முக்கியமான வேறுபாடு உள்ளது. இதை எண்ணல் எண்களின் அல்லது எண்களின் மூலங்களைப் பயன்படுத்தி எழுத இயலாது. கணிதத்தில் இந்த எண்ணைக் குறிப்பிட ஒரு தனித்த அடையாளம் உள்ளது: $\pi$

கிரேக்க மொழியில் “பை” (pi) என்ற எழுத்தாகும் இது.

அதாவது, விட்டம் 1 செ.மீ. உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவு $\pi$ செ.மீ. ஆன விட்டம்

2 செ.மீ. ஆன வட்டத்தின் சுற்றளவு $2\pi$ செ.மீ. விட்டம் $1\frac{1}{2}$ செ.மீ. ஆன வட்டத்தின் சுற்றளவு $\frac{3}{2}\pi$ செ.மீ. என இவ்வாறு ஆகும். சுருக்கமாகக் கூறினால்,

**வட்டத்தின் சுற்றளவு, அதன் விட்டத்தின் $\pi$ மடங்காகும்.**

பலநேரங்களிலும் வட்டம் வரைவது குறிப்பிட்ட ஆரத்திலானதால், இதை ஆரத்தின் கணக்காகவே சாதாரணமாகக் கூறுகிறோம்.

**வட்டத்தின் சுற்றளவு, அதன் ஆரத்தின் $2\pi$ மடங்காகும்.**

### பெயர் வந்த வழி

வட்டத்தின் சுற்றளவு மாறுவது, விட்டத்தின் அளவு வீதத்திலாகும் என்று அறிந்ததன் வழியாக, எந்த வட்டத்தின் சுற்றளவும் விட்டத்தின் ஒரே மடங்காகும் எனப் பகுத்தறிய முடிந்தது. எவ்வளவு மடங்கு என்பதே பின்னர் நடந்த தேடல். முற்காலத்தில் இந்த எண்ணின் தோராய மதிப்புகளாக பின்ன எண்களையே பயன் படுத்தினர். பல்வேறு நாடுகளில், பல்வேறு காலங்களில் இத்தகைய தோராயமான மதிப்புகள் மேலும் மேம்படுத்தப்பட்டன. இந்த எண்ணை ஒரு பின்ன எண்ணாக எழுத இயலாது என்று நீண்ட காலத்திற்குப் பின் நிறுவப்பட்டது எனினும் இந்தக் கருத்தை முன்னரே பகுத்தறிந்திருக்க வேண்டும்.

இந்த வட்ட எண்ணிற்கு $\pi$ எனப் பெயரிட்டது. கி.பி. 1707 இல் இங்கிலாந்தின் வில்லியம் ஜோன்ஸ் என்ற (பெரிய புகழ் பெறாத) கணித அறிஞர் ஆவார்.

சுவிட்சர்லாந்தில் பிறந்த புகழ்பெற்ற கணித அறிஞரான லியோன் ஹார்டு ஆய்லர் (Leonhard Euler) அவரின் படைப்புகளில் பயன்படுத்தத் தொடங்கியதுடன். இந்தச் சின்னத்திற்குப் பிரச்சாரம் கிடைத்தது; உறுதிப்படுத்தப் பட்டது.

பின்ன எண் அல்லாததால், $\pi$ க்குத் தோராயமாகச் சமமான பின்ன எண்களைக் கணக்கிடவே இயலும். கி.மு. 3ஆம் நூற்றாண்டில் கிரேக்க அறிஞர் ஆர்க்கிமிடீஸ் என்பவர் 96 பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தைப் பயன்படுத்தி, வட்டத்தின் சுற்றளவு, விட்டத்தின் $3\frac{10}{71}$ மடங்கைவிடக் அதிகமும் $3\frac{1}{7}$ மடங்கைவிடக் குறைவும் ஆகும் எனக் கணக்கிட்டுள்ளார். இன்றைய முறையில் கூறினால், நான்கு தசம இடங்கள் வரை.

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$

(ஆர்க்கிமிடீஸ் உறுதிப்படுத்திய $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ தான் நீண்டகாலமாக வட்டத்தின் சுற்றளவு காண்பதற்குப் பயன் படுத்தினர்)

கி.பி. பதினான்காம் நூற்றாண்டில் கேரளாவில் மாதவன் எவ்வளவு துல்லியமாகவும் $\pi$ ஐக் கணக்கிடுவதற்கு வடிவியலைப் பயன்படுத்தாமல் முழுமையாக எண்ணியல் முறையில் ஒரு வழிமுறையைக் கண்டுபிடித்தார். இதைப் பயன்படுத்தி,

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

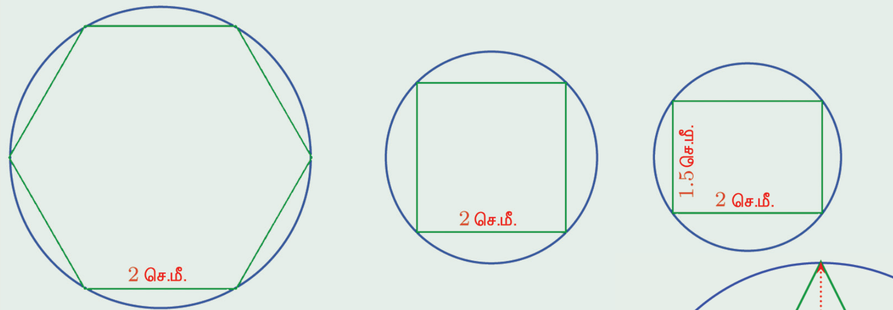
என்றெல்லாம் கணக்கிடலாம்.

நடைமுறைப் பிரச்சினைகளில் சாதாரணமாக நான்கு தசம எண்கள் வரை மட்டுமே $\pi$ பயன்படுத்த வேண்டி வருகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஆரம் 5 மீட்டர் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவை மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாகக் கணக்காக்கினால்,

$$\pi \times 2 \times 5 \approx 31.416 \text{ மீட்டர்}$$

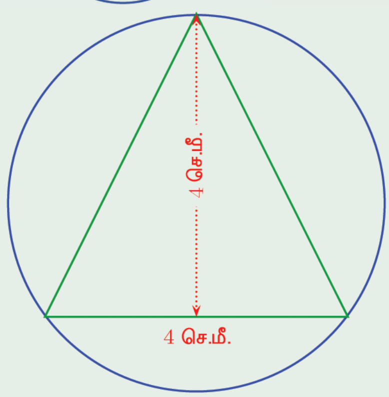
கீழ்க்காணும் கணக்குகள் அனைத்திலும் சுற்றளவை $\pi$ இன் மடங்காக எழுதினால் போதும்.

(1) கீழே உள்ள படங்களில் உச்சிகளெல்லாம் வட்டங்களில் அமைந்த ஒழுங்கு அறுகோணம், சதுரம், செவ்வகம் ஆகியன வரையப் பட்டுள்ளன. வட்டங்களின் சுற்றளவுகளைக் கணக்கிடுக.

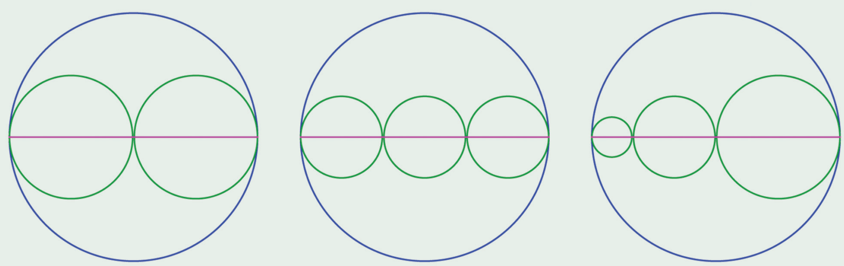



(2) படத்தில் வட்டத்தின் மூன்று புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு சமப்பக்க முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.

வட்டத்தின் சுற்றளவு என்ன?

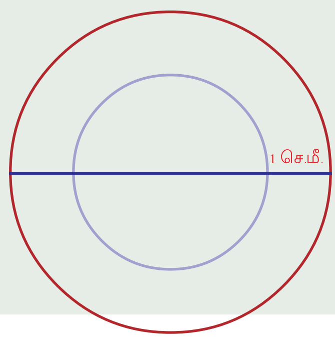



(3) கீழ்க்காணும் படங்களிலெல்லாம், வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே நேர் கோட்டில் உள்ளன. முதல் இரு படங்களில், ஒவ்வொன்றிலும் சிறிய வட்டங்களுக்கு ஒரே விட்டம் ஆகும்:



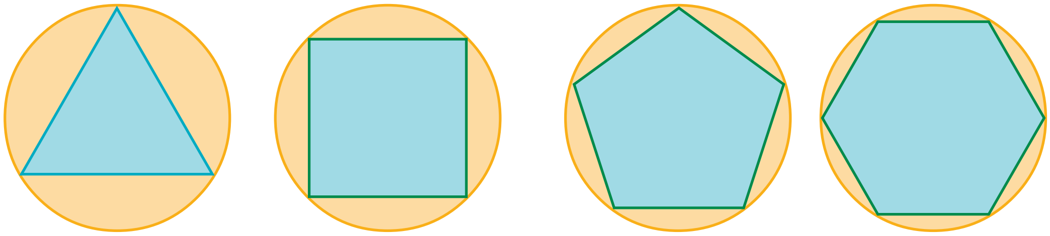
எல்லாப் படங்களிலும், சிறிய வட்டங்களின் சுற்றளவுகளின் தொகையே பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு எனத் தெளிவுபடுத்துக.

(4) படத்தில், ஒரே மையம் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. படத்தில் காணும் கோடு பெரிய வட்டத்தின் விட்டம் ஆகும். பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவை விட எவ்வளவு கூடுதலாகும்?

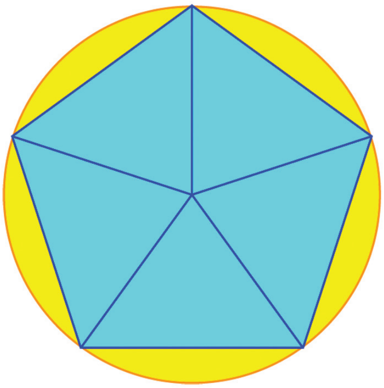


## பரப்பளவு

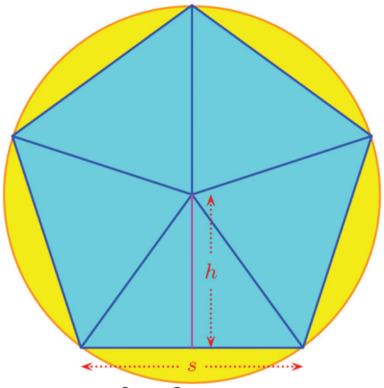
வட்டத்தினுள் அமைந்துள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடுவதற்கு ஏற்ப அதன் சுற்றளவு வட்டத்தின் சுற்றளவுடன் நெருங்குவது போல, அதன் பரப்பளவும் வட்டத்தின் பரப்பளவுடன் நெருங்குகிறது:



வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட வேண்டுமெனில், அதற்குள் அமைந்த ஒழுங்கு பலகோணங்களின் பரப்பளவு எவ்வாறு அதிகரிக்கிறது என்று கணக்கிட்டால் போதும். வட்டத்தின் மையத்தையும், பலகோணத்தின் உச்சிகளையும் இணைத்து பலகோணங்களைச் சமஅளவு உள்ள முக்கோணங் களாகப் பிரிக்கலாம். இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டினால் பலகோணத்தின் பரப்பளவு கிடைக்கும்.



ஐங்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $s$ என்றும் வட்ட மையத்திலிருந்து, ஐங்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் $h$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}sh$

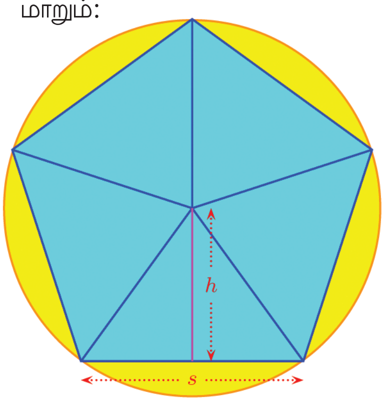


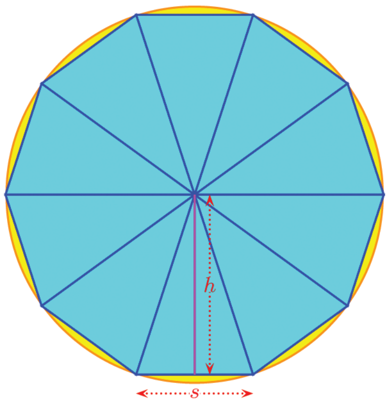

இத்தகைய ஐந்து முக்கோணங்கள் சேர்ந்ததே ஐங்கோணம்; அவற்றின் மொத்தப் பரப்பளவு

$$5 \times \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2} \times 5s \times h$$

இதில் $s$ என்பது ஐங்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளமானதால், $5s$ என்பது ஐங்கோணத்தின் சுற்றளவு ஆகும்; இதை $p$ என எழுதினால் ஐங்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}ph$

ஒழுங்கு ஐங்கோணத்திற்குப் பதிலாக எந்த ஒழுங்கு பலகோணத்தை எடுத்தாலும் அதன் பரப்பளவு, இதைப்போன்று சுற்றளவு, மையப்புள்ளியிலிருந்துள்ள செங்குத்துக் கோடு என்பவற்றின் பெருக்கற்பலனின் பாதி என்று காணலாம். வட்டத்திற்குள் பலகோணம் மாறும்போது சுற்றளவும், இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமும் மாறும்:




வட்டத்திற்குள் வரையப்படும் ஒழுங்கு பலகோணம் முதல் உள்ள பலகோணங்களின் சுற்றளவுகளை வரிசையாக $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என்றும், வட்டமையத்திலிருந்து ஒரு பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் $h_1, h_2, h_3, \ldots$ என்று எடுத்துக்கொண்டால், பரப்பளவுகள் $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ என்றாகும்.

இவைகளில் $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என்ற சுற்றளவுகள் வட்டத்தின் சுற்றளவுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்; $h_1, h_2, h_3, \ldots$ போன்ற செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள், வட்டத்தின் ஆரத்தை நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன. அதனால், இவற்றின் பெருக்கற்பலன் வட்டத்தின் சுற்றளவு, ஆரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலனுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும். பெருக்கற்பலன்களின் பாதியோ?

சுருக்கமாகக் கூறினால், வடிவியல் முறையில் பார்த்தால் வட்டத்தில் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் பரப்பளவுகள் வட்டத்தின் பரப்பளவுடன் நெருங்கிறது எனக் காணலாம். இதை எண்முறையில் அலசி ஆராயும் போது இப் பரப்பளவுகள் வட்டத்தின் சுற்றளவு, ஆரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் பாதியுடன் நெருங்கிறது எனப் புரிந்து கொள்ளலாம். இதிலிருந்து பரப்பளவைக் குறித்து என்ன கூறலாம்?

### $\pi$ கேரளாவில்

13ஆம் நூற்றாண்டில் கேரளாவில் வாழ்ந்த சோதிட அறிஞரும், கணித அறிஞருமான மாதவன் (சங்கம கிராம மாதவன்) $\pi$ இன் தோராய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க பயன் படுத்திய முறை கணித வரலாற்றின் ஒரு திருப்புமுனை ஆகும். எண் சார்ந்த வழிமுறைகளையே அவர் இதற்காகப் பயன்படுத்தினார்.

$$1, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$$

என இவ்வாறு ஒற்றை எண்களின் தலைகீழிகளைக் கூட்டியும் கழித்தும் தொடர்ந்தால் $\frac{\pi}{4}$ஐ நெருங்கி நெருங்கி வரும் என்று அவர் கண்டுபிடித்தார்.

$$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(17ஆம் நூற்றாண்டில் ஸ்காட் லாண்டின் கிரிகரி, ஜெர்மனியின் லிப்னீஸ் என்பவர்கள் இதே முறை யிலேயே அவர்களின் முறையில் மீண்டும் கண்டுபிடித்தனர்).

இந்த முறையில் கிடைக்கின்ற தோராய மதிப்புகள் மிகவும் மெதுவாகவே $\pi$ ஐ நெருங்குகிறது என்பது ஒரு குறைபாடாகும். ஆர்க்கிமிடீஸ் கண்டுபிடித்த பின்ன எண்ணிற்குச் சென்று சேர்வதற்குத் தோராயமாக 4000 எண்களின் இத்தகைய தொகை தேவைப்படும். ஆனால் மாதவன் மட்டுமே

$$\frac{1}{\sqrt{12}}\pi = 1-\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{5\times 3^2}-\frac{1}{7\times 3^3}+\cdots$$

என்ற புதிய முறையைப் பயன்படுத்தி, $\pi = 3.14159265359$ எனக் கண்டு பிடித்தார்.

**வட்டத்தின் பரப்பளவு, அதன் சுற்றளவு, ஆரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலனின் பாதியாகும்.**

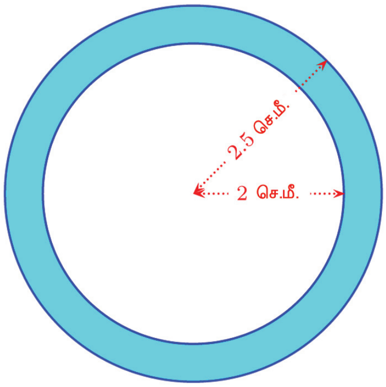
வட்டத்தின் ஆரத்தை $r$ என்று கொண்டால் சுற்றளவு $2\pi r$ என்று கண்டோம் அல்லவா, அப்போது வட்டத்தின் பரப்பளவு

$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

**வட்டத்தின் பரப்பளவு, ஆரத்தின் வர்க்கத்தின் π மடங்காகும்.**

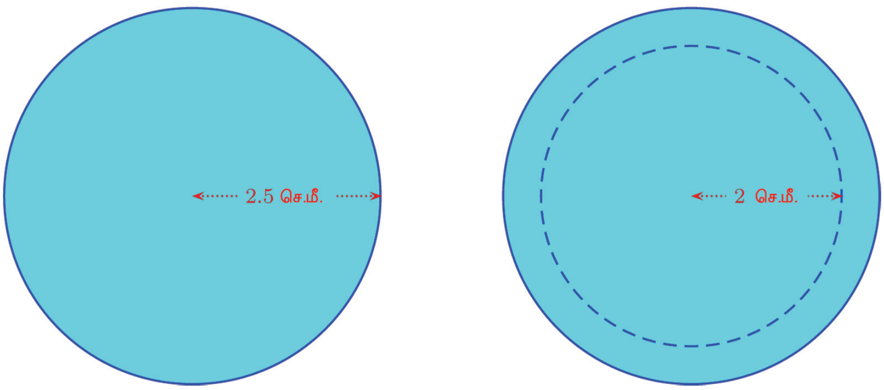
எடுத்துக்காட்டாக, ஆரம் 5 சென்டிமீட்டர் ஆன வட்டத்தின் பரப்பளவு $25\pi$ சதுரசென்டிமீட்டர்.

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.




இந்த வட்டவளையத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

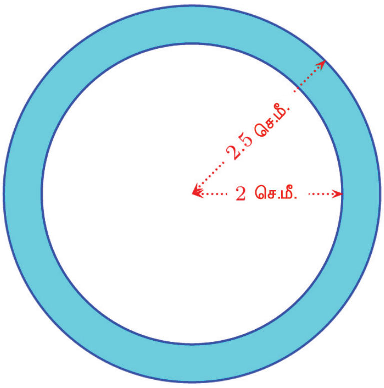
ஒரு பெரிய வட்டத்திலிருந்து ஒரு சிறிய வட்டத்தை வெட்டி எடுத்தால், இதைப் பார்க்க இயலும் அல்லவா.

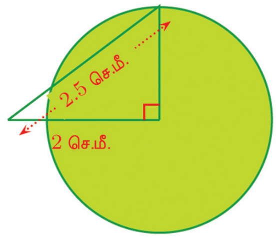



அப்போது வட்ட வளையத்தின் பரப்பளவு

$$6.25\pi - 4\pi = 2.25\pi \text{ சதுர சென்டி மீட்டர்.}$$

கீழ்க்காண்பது போன்று ஒரு செங்கோண முக்கோணமும் ஒரு வட்டமும் வரைந்தால்?

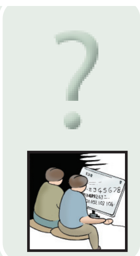


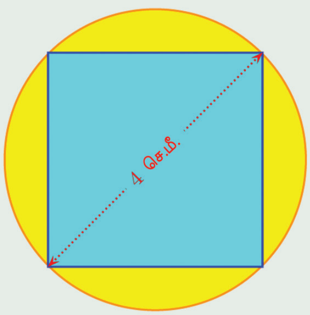

சிறிய வட்டம், வட்டவளையம் என்பனவற்றின் பரப்பளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

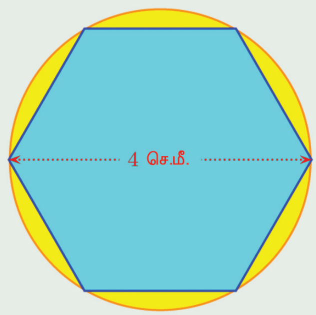
**கணக்கு கணினி π**

20ஆம் நூற்றாண்டில் பாரதத்தின் புகழ் பெற்ற கணித அறிஞரான ஸ்ரீனிவாச ராமானுஜம், π க்குத் தோராயமாகச் சமமான பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு மாதவனின் வழிமுறை போன்ற பலவழி முறைகளைக் கண்டுபிடித்தார். இவற்றில் சிலவற்றைக் கணினியில் பயன்படுத்தி, 1989 இல் π இன் தோராய மதிப்பை நூறு கோடியில் அதிகமான தசம இடங்கள் வரை சரியாகக் கண்டுபிடித்தார். இன்று அது 270000 கோடிக்கு அதிகமாக உள்ளது.

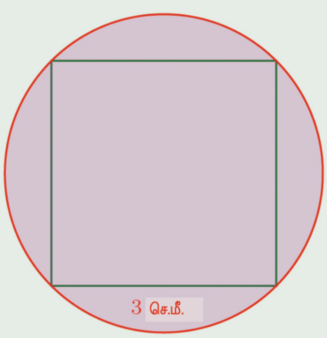


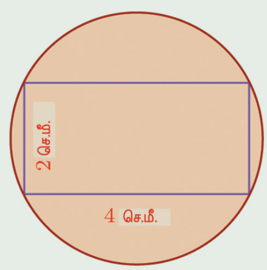
(1) கீழே உள்ள படங்களில் வட்டம், பலகோணம் என்பனவற்றின் பரப்பளவுகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்தை இரு தசம இடங்கள் வரை துல்லியமாகக் கணக்கிடுக.



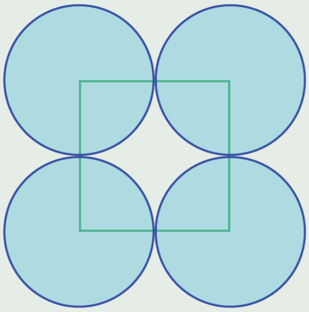

(2) ஒரு சதுரத்தின் நான்கு உச்சிகள் வழியாகவும், ஒரு செவ்வகத்தின் நான்கு உச்சிகள் வழியாகவும் வரைந்த வட்டங்கள் கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

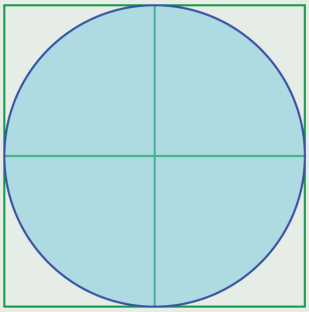



இரு வட்டங்களின் பரப்பளவுகளைக் கணக்கிடுக.

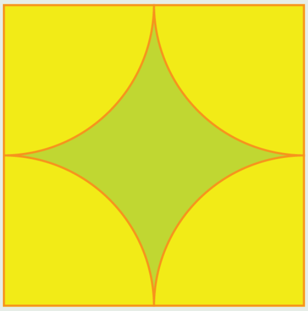
(3) ஒரு சதுரம் வரைந்து, அதன் நான்கு உச்சிகளை மையமாகவும், பக்கங்களின் பாதியை ஆரமாகவும் உடைய வட்டங்களை வரையவும். முதல் சதுரத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமமான நான்கு சதுரங்கள் இணைந்த சதுரத்தை வரைந்து, அதற்குள் மிகச் சரியாகப் பொருந்துமாறு வட்டம் வரையவும்.

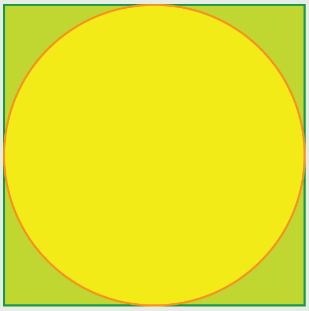




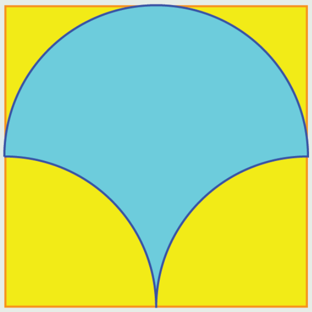
பெரிய வட்டத்தின் பரப்பளவு நான்கு சிறிய வட்டங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்துக.

(4) கீழே உள்ள இரு படங்களில் சதுரங்கள் ஒரே அளவு உடையன. பச்சை நிறம் உள்ள பாகங்களின் பரப்பளவுகள் சமம் என நிறுவுக.





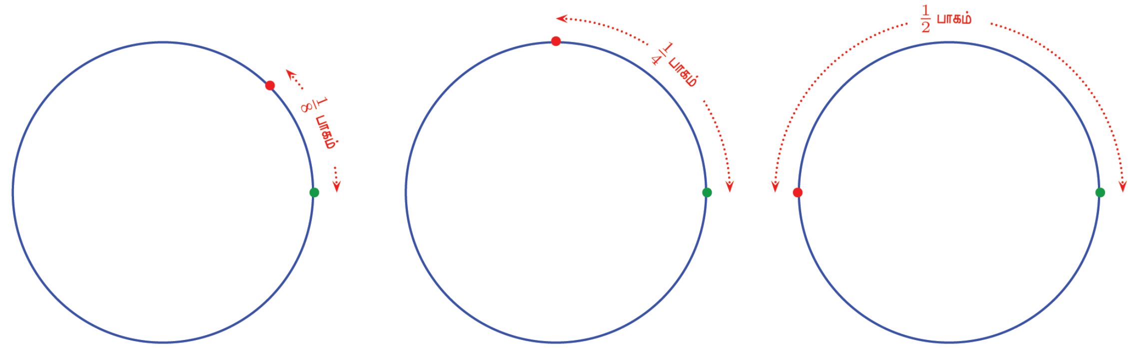
(5) ஒரு சதுரத்தின் உள்ளே படத்தில் காண்பது போன்று வட்டப்பகுதிகளை வரையவும்.



படத்தில் நீலநிறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பாகத்தின் பரப்பளவு, சதுரத்தின் பரப்பளவின் பாதியாகும் எனத் தெளிவுபடுத்துக.

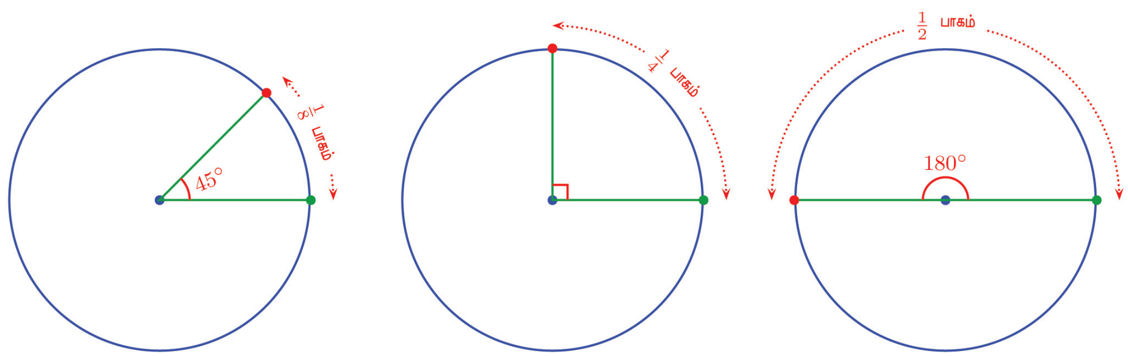
## நீளமும் கோணமும்

ஒரு வட்டத்தின் ஏதேனும் ஓர் இடத்திலிருந்து தொடங்கி வட்டம் வழியே பயணிக்கும் ஒரு புள்ளியைக் கற்பனை செய்க. பயணிப்பதன் பல நேரங்களில் உள்ள படங்களே கீழே உள்ளவை.



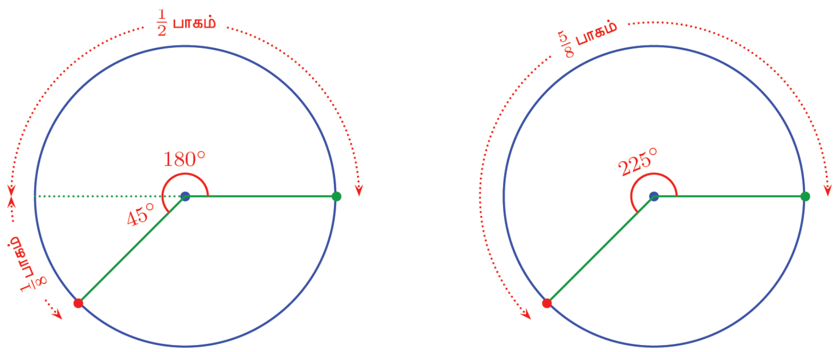

இந்தப் பயணம் ஒரு சுழற்சி ஆனதால், வட்டம் வழியாக எவ்வளவு தூரம் நகர்ந்தது என்பதற்குப் பதிலாக, வட்ட மையத்திலிருந்து பார்க்கும் போது எவ்வளவு கோணம் சுழன்றது என்று கேட்கலாம்.

வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் கிடைப்பதற்கு மையத்தில் $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ எடுத்ததும், $\frac{1}{4}$ பாகம் கிடைப்பதற்கு $360^\circ \div 4 = 90^\circ$ எடுத்ததும் நினைவில் இருக்கின்றனவா? (ஆறாம் வகுப்பிலுள்ள **கோணங்கள்** என்ற பாடம்)



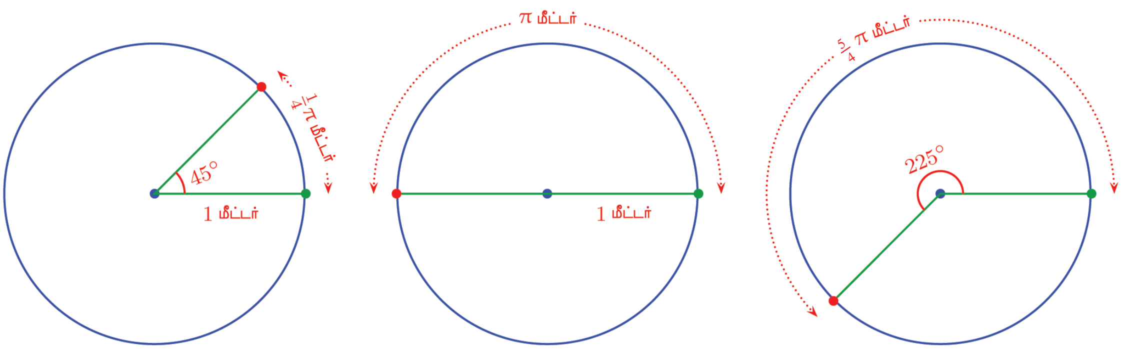

அவ்வாறு பயணத்தை நீளமாகவும், கோணமாகவும் கூறலாம். அப்போது ஒரு வினா. வட்டத்தின் பாதி முடிந்து, மீண்டும் ஓர் எட்டில் ஒரு பாகம் நகரும் போது நகர்ந்த தூரம், வட்டத்தின் $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ பாகம். இதைச் சுழற்சியாக எவ்வாறு கூறலாம்?

வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் என்பது $45^\circ$; அப்போது $180^\circ$ சுழன்று மீண்டும் $45^\circ$ உம் சுழன்று: மொத்தம் $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ சுழன்றது எனக் கூறலாம்:




இவ்வாறு வட்டம் முழுவதும் சுழன்று தொடங்கிய இடத்தில் சென்று சேர்வது வரையுள்ள பயணத்தின் ஒவ்வொரு நேரத்திலும் எவ்வளவு பயணித்தது என்பதை வட்டத்தின் பாகங்களாகவோ, சுழற்சியின் அளவாக $360^\circ$ வரையுள்ள கோணங்களாகவோ கூறலாம்.

இதில் வட்டத்தின் ஆரம் 1 மீட்டர் என்றும் எடுத்தால்? வட்டத்தின் சுற்றளவு $2\pi$ மீட்டர். அப்போது அனைத்துத் தூரங்களையும் வட்டத்தின் பாகத்திற்குப் பதிலாக நீளமாகவே கூறலாம்.

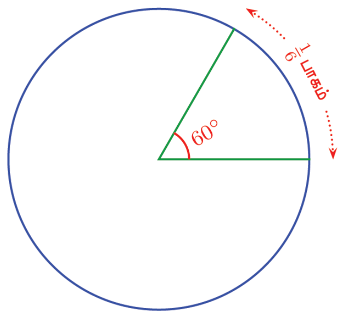


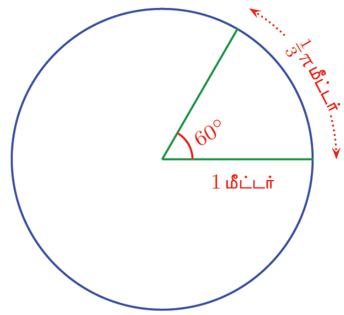

அவ்வாறு ஒவ்வொரு நேரத்திலும் எவ்வளவு தூரம் நகர்ந்தது என்பதை மீட்டராகக் கூறலாம். அல்லாவிடில் எவ்வளவு சுழன்றது என்று கோண அளவாகவும் கூறலாம்.

$60^\circ$ சுழலும்போது, வட்டம் வழியே எவ்வளவு மீட்டர் நகரும்?

வட்டத்தின் எவ்வளவு பாகம் நகர்ந்தது என்று முதலில் பார்க்கலாம். $1^\circ$ என்பது

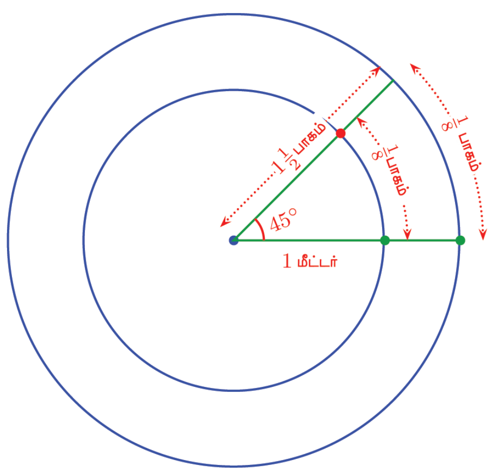
வட்டத்தின் $\frac{1}{360}$ பாகம் அல்லவா. அப்போது $60^{\circ}$ என்பது, வட்டத்தின் $60 \times \frac{1}{360} = \frac{1}{6}$ பாகம்; வட்டத்தின் சுற்றளவு $2\pi$ மீட்டரானதால், இது $\frac{1}{3}\pi$ மீட்டர்:

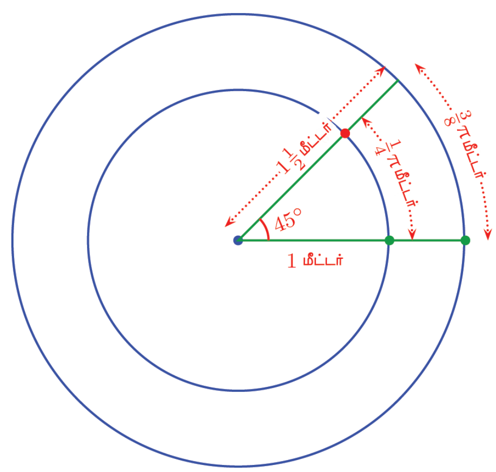



பொதுவாகக் கூறினால் $360^{\circ}$ இன் எத்தனை பாகம் சுழன்றதோ, $2\pi$ மீட்டரின் அத்தனை பாகமே வட்டத்தின் வழியாக நகர்ந்தது என்பதாகும்,

வட்டத்தின் ஆரம் $1\frac{1}{2}$ மீட்டர் எனில்? சுற்றளவு $3\pi$ மீட்டர் ஆகும். அப்படியானால் சுழன்றதற்கு ஏற்ப நகர்ந்த தூரத்தைக் கணக்கிடுவதற்கு, $3\pi$ மீட்டரின் பாகங்கள் எடுக்க வேண்டும். அதாவது சுழன்றதற்கு ஏற்ப வட்டப் பாகங்களுக்கு மாற்றம் இல்லை எனினும், நீளங்களின் மீட்டர் கணக்கு மாறும். எடுத்துக்காட்டாக, $45^{\circ}$ சுழலும்போது, இந்த வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் தான் நகர்கிறது. ஆனால் வட்டம் பெரியது ஆனபடியால் நகர்ந்த தூரம் $\frac{3}{8}\pi$ என்றாகும்.



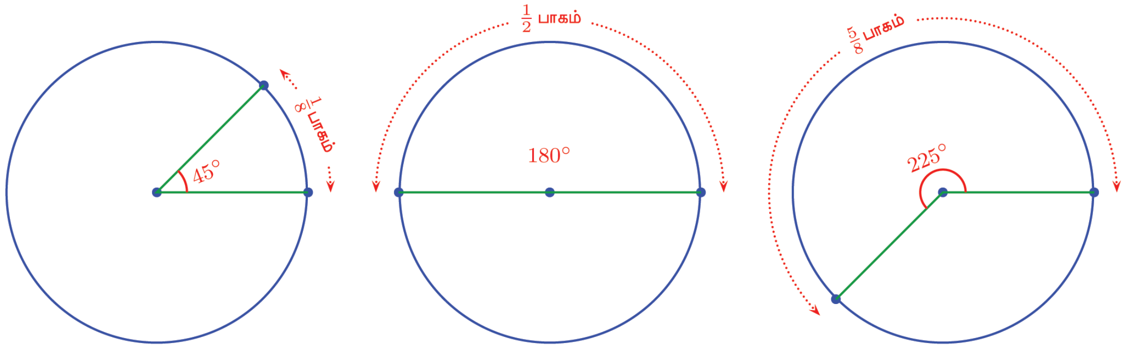



பொதுவாகக் கூறினால்,

ஆரம் $r$ மீட்டர் ஆன வட்டம் வழியாக உள்ள பயணத்தில், மையத்திலிருந்து $x^{\circ}$ சுழலும்போது, வட்டம் வழியே நகர்ந்த தூரம் $2\pi r \times \frac{x}{360}$ மீட்டர்.

இனி இதனைக் கணிதமொழியில் எவ்வாறு கூறலாம் என்று பார்ப்போம். ஒரு வட்டத்தில் இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள பாகத்திற்கு வில் (arc) என்று பெயர். ஒரு வில்லின் முனைகளை மையத்துடன் இணைக்கின்ற ஆரங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தை, வில்லின் மையக்கோணம் (central angle) என்று கூறலாம்.

அப்போது முன்னர் பார்த்ததைப் போன்று, வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் நீளம் உள்ள வில்லின் மையக்கோணம் $45^{\circ}$, வட்டத்தின் $\frac{1}{2}$ பாகம் நீளம் உள்ள வில்லின் மையக்கோணம் $180^{\circ}$, வட்டத்தின் $\frac{5}{8}$ பாகம் நீளம் உள்ள வில்லின் மையக்கோணம் $225^{\circ}$ என்றும் கூறலாம்.




வட்டத்தின் வழியே நகர்தலின் கோட்பாடு வட்டத்தின் கணிதக் கோட்பாடு ஆகலாம்:

ஆரம் $r$ ஆன வட்டத்தில், மையக்கோணம் $x^{\circ}$ உள்ள வில்லின் நீளம் $2\pi r \times \frac{x}{360}$.

வேறு முறையில் கூறினால்,

**வில்லின் மையக்கோணம் $360^{\circ}$ இன் எத்தனை பாகமோ, சுற்றளவின் அத்தனை பாகமே வில்லின் நீளம்.**

எடுத்துக்காட்டாக, ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தில் மையக்கோணம் $60^{\circ}$ உள்ள வில்லின் நீளம் எவ்வளவு?

இதை மனதில் செய்யலாம். வட்டத்தின் சுற்றளவு $6\pi$ சென்டிமீட்டர். $60^{\circ}$ என்பது $360^{\circ}$ இன் $\frac{1}{6}$ பாகமானதால், சுற்றளவின் $\frac{1}{6}$ பாகமே வில். அப்போது அதன் நீளம் $\pi$ சென்டிமீட்டர்.

ஆரம் 2.5 சென்டிமீட்டர் ஆன வட்டத்தில், மையக்கோணம் $50^{o}$ உள்ள வில்லின் நீளம் என்ன?

வட்டத்தின் சுற்றளவு $5\pi$ சென்டிமீட்டர், அதன் $\frac{50}{360}$ பாகம் வில்லின் நீளம், அதாவது

$$5\pi \times \frac{50}{360} = \frac{25}{36}\pi \approx 2.2 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

மற்றொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம். ஆரம் 9 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஓர் இரும்பு வட்டத்திலிருந்து, மையக்கோணம் $30^{o}$ உள்ள ஒரு சிறு பகுதியை வெட்டி எடுத்தனர். இதை வளைத்து ஒரு சிறிய வட்டம் உருவாக்கப்பட்டது. சிறு வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

மையக்கோணம் $30^{o}$ உள்ள வில்லின் நீளம், வட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$; அதாவது, வெட்டியெடுக்கப்பட்ட துண்டின் நீளம் $18\pi \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}\pi$ சென்டிமீட்டர். இதுவே சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு ஆகிறது. அப்போது அதன் ஆரம் $\frac{3}{2}\pi \div 2\pi = \frac{3}{4}$ சென்டிமீட்டர்.

இன்னும் எளிதாக இதைக் கணக்கிடலாம். பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{1}{12}$ பாகமே சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, ஆரமும் சுற்றளவும் மாறுவது ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆனதால், பெரிய வட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{1}{12}$ பாகமே சிறிய வட்டத்தின் ஆரம். அதாவது, $9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ சென்டிமீட்டர்.

?

(1) ஒரு வட்டத்தில் மையக்கோணம் $40^{o}$ உள்ள ஒரு வில்லின் நீளம் $3\pi$ சென்டிமீட்டர். வட்டத்தின் சுற்றளவு எத்தனை சென்டிமீட்டர்? ஆரமோ?

(2) ஒரு வட்டத்தில் மையக்கோணம் $25^{o}$ உள்ள வில்லின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

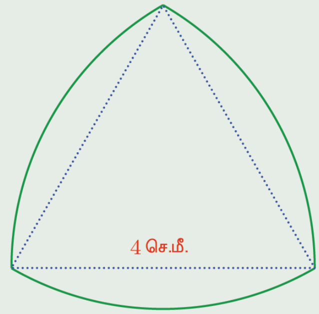
- i) இதே வட்டத்தில் மையக்கோணம் $75^{o}$ உள்ள வில்லின் நீளம் என்ன?
- ii) ஆரம் இதன் ஒன்றரை மடங்கான வட்டத்தில் மையக்கோணம் $75^{o}$ உள்ள வில்லின் நீளம் என்ன?

(3) ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு வளையலில் இருந்து ஒரு துண்டு வெட்டியெடுக்கப்பட்டது. அதைக் கொண்டு, ஆரம் $\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு மோதிரத்தை உருவாக்க வேண்டும்.

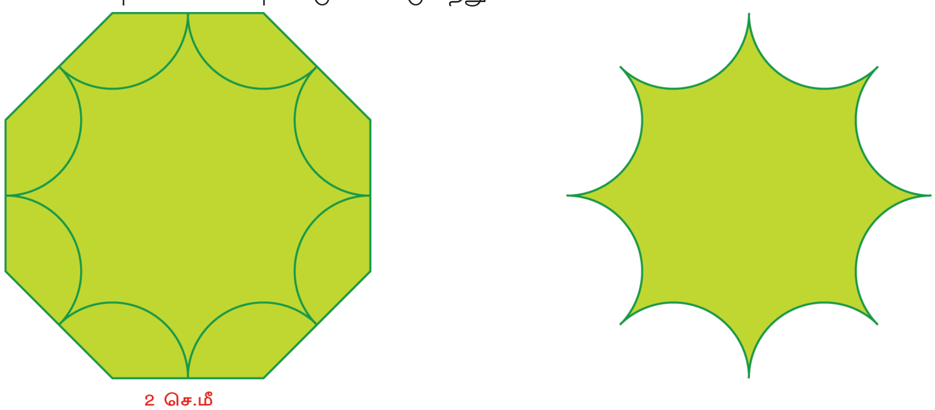
- i) வெட்டியெடுக்கப்பட்ட துண்டின் மையக்கோணம் எவ்வளவு?
- ii) வளையலின் மீதியுள்ள பாகத்தைக் கொண்டு மற்றொரு சிறிய வளையலை உருவாக்கினால், அதன் ஆரம் எத்தனை சென்டிமீட்டர்?

(4) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியையும் மையமாகக் கொண்டு, மற்ற இரு உச்சிகள் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற முறையில் வரைந்த படத்தைக் காண்க.

இதன் சுற்றளவு எத்தனை சென்டிமீட்டர்?



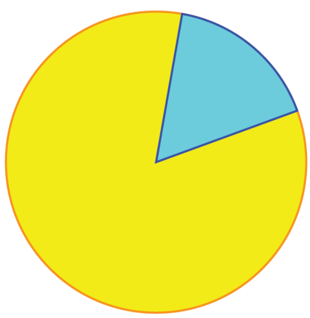

(5) ஓர் எட்டு முகங்கள் உள்ள ஒழுங்கு எண்கோணத்தின் உச்சிகளை மையமாகக் கொண்டு வட்டப்பகுதிகள் வரைந்து, கீழே காண்பது போன்று வடிவம் வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது.




வெட்டியெடுத்த வடிவத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடுக.

## கோணமும் பரப்பளவும்

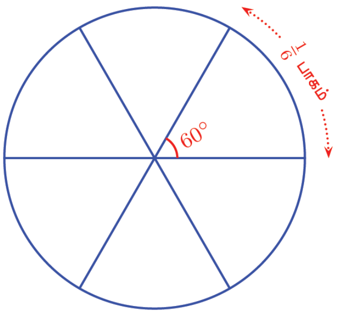
வட்டத்தின் பரிதியின் ஒரு பாகமே வில். ஒரு வில்லும் அதன் இரு முனைகளின் வழியுள்ள ஆரங்களும் சேர்ந்தால் வட்டப்பரப்பின் ஒரு பாகம் ஆகும்.

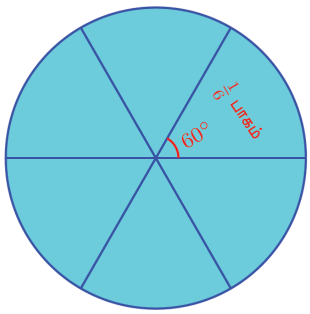


இத்தகைய ஒரு வட்டப்பாகத்தை வட்டப்பகுதி (sector) என்கிறோம். இதில் வில்லின் மையக்கோணத்தை வட்டப்பகுதியின் மையக்கோணம் என்கிறோம்.

மையக்கோணம் மாறுவதைப்பொறுத்து, வில்லின் நீளம் மாறுவதைப் போன்று வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவும் மாறும். இரண்டின் கணக்குகளும் ஒரேபோல் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $60^{\circ}$ மையக்கோணம் உள்ள வில் வட்டத்தின்

சுற்றளவில் $\frac{1}{6}$ ஆகும்; மையக்கோணம் $60^\circ$ உள்ள வட்டப்பகுதி வட்டத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{6}$ பாகமும்.




இதுபோன்று மையக்கோணம் $1^\circ$ உள்ள வில், வட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{1}{360}$ பாகமும், மையக்கோணம் $1^\circ$ உள்ள வட்டப்பகுதி, வட்டத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{360}$ பாகமும் ஆகும்.

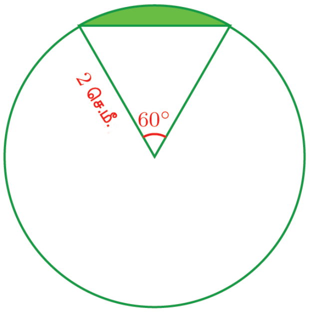
அப்போது மையக்கோணம், வில்லின் நீளம் ஆகியவற்றின் இடையில் உள்ள தொடர்பு போன்று மையக்கோணத்துக்கும், வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவுக்கும் இடையிலான தொடர்பையும் இவ்வாறு கூறலாம்.

**வில்லின் மையக்கோணம், $360^\circ$ இன் எத்தனை பாகம் ஆகிறதோ, வட்டத்தின் பரப்பளவின் அத்தனை பாகமே வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு.**

இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி இவ்வாறு கூறலாம்.

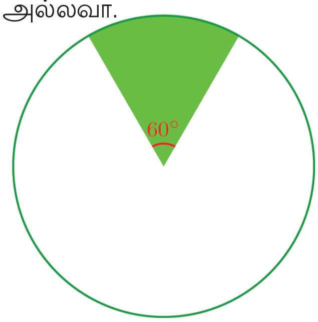
ஆரம் $r$ ஆன வட்டத்தில் மையக்கோணம் $x^\circ$ எனில் வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

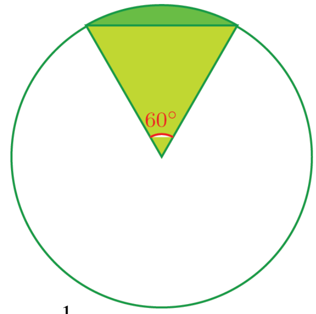
எடுத்துக்காட்டாக, ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர் ஆன வட்டத்தில், மையக்கோணம் $40^\circ$ எனில் வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு, வட்டத்தின் பரப்பளவின் $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ பாகம் ஆகும். வட்டத்தின் பரப்பளவு $9\pi$ சதுரசென்டிமீட்டர். அப்போது வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு $\pi$ சதுரசென்டிமீட்டர்.




இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும். இந்தப் படத்தில் நிறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பாகத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

வட்டப்பகுதியிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தை எடுத்துவிட்டால் இந்தப் பகுதி கிடைக்கும் அல்லவா.



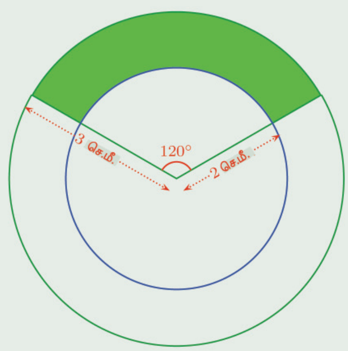

வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு, வட்டத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{6}$ பாகம்; அதாவது, $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் ஆகும். (காரணம்?) அதன் பரப்பளவு $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ சதுரசென்டிமீட்டர். அப்போது முதல் படத்திலுள்ள வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ சதுரசென்டிமீட்டர்.

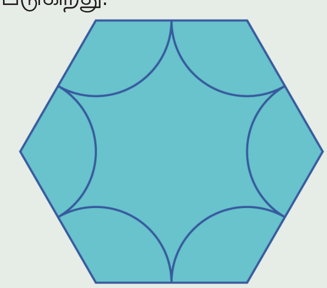
?

(1) ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தில் மையக்கோணம் $120^{o}$ ஆன வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவு? ஆரம் 6 சென்டிமீட்டர் ஆன வட்டத்தில் மையக்கோணம் இதுவே ஆன வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவோ?

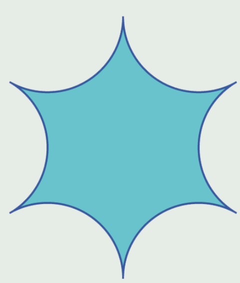
(2) படத்தில் பச்சை நிறம் உள்ள பாகத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.




(3) ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் உச்சிகளை மையமாகக்கொண்டு வட்டப்பாகங்கள் வரைந்து கீழ்க் காணும் வடிவம் வெட்டியெடுக்கப் படுகிறது.

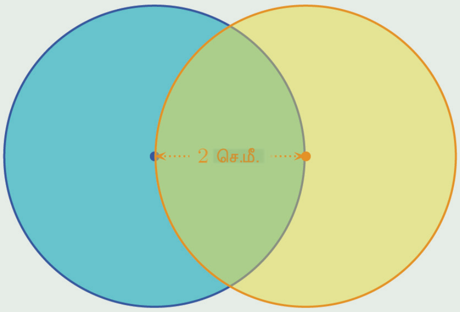


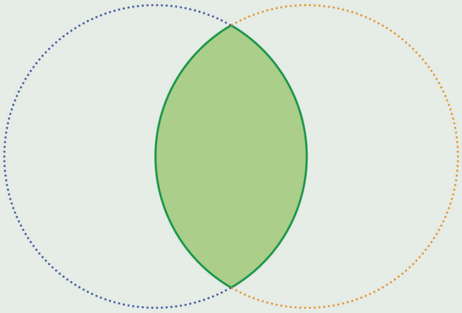
2 செ.மீ.



வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வடிவத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

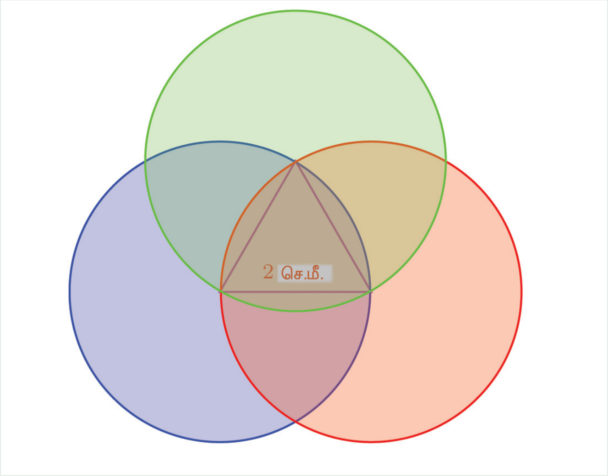
(4) இரு வட்டங்களில் ஒவ்வொன்றும் மற்றதன் மையம் வழியே கடந்து செல்கின்ற படமே கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



இரு வட்டங்களிலும் உட்படுகின்ற பாகத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

(5) ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியையும் மையமாகக் கொண்டு மற்ற இரு உச்சிகள் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற வட்டம் வரைந்த படமே தரப்பட்டுள்ளது.

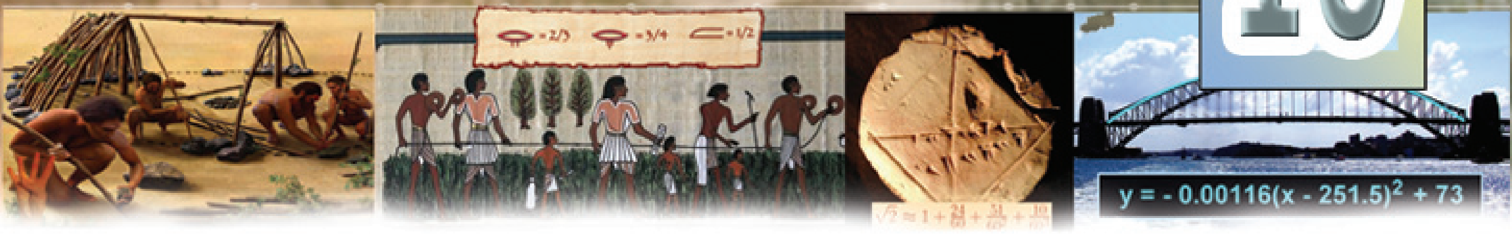



மூன்று வட்டங்களிலும் உட்படும் பகுதியின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | என்னால் முடியும் | ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்பட வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • வெவ்வேறு வட்டங்களின் உள்ளே வரைந்த பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமான ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம், வட்டத்தின் விட்டங்களின் விகிதமே எனப் பகுத்தறிதல்.<br>• இரு வட்டங்களின் உள்ளே வரைந்த ஒழுங்கு பலகோணங்களின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப அவற்றின் சுற்றளவுகளுடன் உள்ள தொடர்பை விவரித்து, வட்டத்தின் சுற்றளவுகள் மாறுவது விட்டங்களின் அளவு வீதத்தில் என்று கண்டுபிடிக்க இயலுதல்.<br>• $\pi$ என்ற எண்ணைப் பற்றி விளக்குதல்.<br>• வட்டத்தினுள் வரைகின்ற ஒழுங்கு பலகோணங் களின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்து வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுதல்.<br>• வட்டத்தின் ஆரத்துக்கும் சுற்றளவுக்கும் பரப்பளவுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை நிறுவுதல்.<br>• வட்டத்தின் வில்லின் நீளத்துக்கும் வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவுக்கும் மையக்கோணத்துக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை விளக்குதல். | | | |

# 10 மெய் எண்கள்

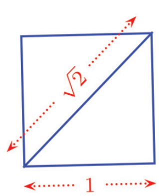


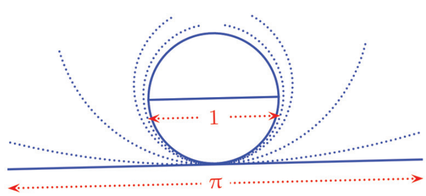

## இரு வகை எண்கள்

கோடுகளின் நீளங்களை எண்களாகக் கூறுவது எவ்வாறு? ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட நீளத்தை 1 என்று எடுத்தால், அதன் இரு மடங்கை 2 என்றும், பாதி நீளத்தை $\frac{1}{2}$ என்றும், அதன் ஒன்றரை மடங்கு நீளத்தை $1\frac{1}{2}$ என்றும் கூறலாம்.


இவ்வாறு 1 என்று எடுக்கின்ற நீளத்தை நீளத்தின் ஓரலகு (unit of length) என்று கூறுகிறோம். இத்தகைய ஓரலகை உறுதிப்படுத்துவதன் மூலமாக, வேறு பல நீளங்களையும் இப்போது கண்டதைப் போன்று எண்ணல் எண்களாகவும் பின்ன எண்களாகவும் கூறலாம்.

ஆனால் இந்த ஓரலகின் அடிப்படையில் இவ்வாறு எண்ணல் எண்களாகவோ, பின்ன எண்களாகவோ கூற இயலாத நீளங்களும் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, பக்கத்தின் நீளம் இந்த ஓரலகு ஆன சதுரத்தின் மூலைவிட்டம், இந்த ஓரலகு விட்டம் ஆன வட்டத்தை நிமிர்த்திய கோட்டின் நீளம்:




அளவுகளின் இடையே உள்ள தொடர்புகளையும் சாதாரண எண்களின் செயல் தொடர்புகளையும் இயற்கணிதச்சமன்பாடுகளாக ஆக்கும் போது வசதிக்காக குறை எண்களைப் பயன்படுத்துவது உண்டு. (எட்டாம் வகுப்பில் **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **பயன்பாடுகள்** என்ற பகுதியில்) அப்போது, $\sqrt{2}$, $\pi$ போன்ற எண்களின் குறையாகிய $-\sqrt{2}$, $-\pi$ என இவ்வாறுள்ள எண்களும் தேவைப்படுகின்றன.

எண்ணல் எண்கள், பின்ன எண்கள் அவற்றின் குறைகள், பூஜ்யம் எனும் இவற்றை விகிதமுறு எண்கள் (rational numbers) என அழைக்கிறோம். இவ்வாறு அல்லாத எண்கள் அனைத்தையும் விகிதமுறா எண்கள் (irrational numbers) என்றும் கூறுகிறோம்.

எண்ணல் எண்களையும் பின்ன வடிவில் எழுதலாம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, 5 ஐ, $\frac{5}{1}$ என்றோ, $\frac{10}{2}$ என்றோ பலமுறைகளில் எழுதலாம். தொகுதியையோ, பகுதியையோ குறை எண்ணல் எண்களாக எடுத்து, எண்ணல் எண்களின் குறைகளையும் பின்ன வடிவில் எழுதலாம். பூஜ்யத்தை $\frac{0}{1}$ என்றும் எழுதலாம். அப்போது விகிதமுறு எண்களுக்குப் பொதுவாக ஒரு வடிவம் உள்ளது: $x$, $y$ என்பவை எண்ணல் எண்களோ அவற்றின் குறை எண்களோ ஆகிய $\frac{x}{y}$. இதில் $x$ பூஜ்யமும் ஆகலாம். ஆனால், விகிதமுறா எண்களில் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ போன்ற வர்க்கமூலங்களும், விகிதமுறு எண்களின் செயல்களாகவும் கூற இயலாத $\pi$ போன்றுள்ள எண்களும் உள்ளன. நிரந்தரமான ஒரு பொதுவடிவில் அவற்றை அளக்க இயலாது.

இன்னும் வேறுபாடுகள் உள்ளன. இரு விகிதமுறு எண்களின் தொகையும் வித்தியாசமும் பெருக்கற்பலனும், வகுத்தல் பலனும் எல்லாம் விகிதமுறு எண்களே ஆகும். (தெளிவுபடுத்தலாமா?)

ஆனால் இரு விகிதமுறா எண்களின் தொகை விகிதமுறு எண்ணாகவோ, விகிதமுறா எண்ணாகவோ அமையலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண்ணாகும் என்று காண்பதில் கடினம் இல்லை. அதற்கு,

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

என எடுக்கவும்

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

என்று கணக்கிடலாம். (**புதிய எண்கள்** என்ற பாடத்தில், **வகுத்தல்** என்ற பகுதி). அப்போது

$$a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$$

என்றும் அதிலிருந்து

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) = \sqrt{3}$$

என்றும் காணலாம். இனி $a$ என்பது விகிதமுறு எண் எனில் $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ உம் விகிதமுறு எண்ணே; ஆனால் $\sqrt{3}$ என்பது விகிதமுறு எண் அல்ல. ஆகவே $a$ உம் விகிதமுறு எண் அல்ல. அதாவது, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் ஆகும். இதைப்போன்று $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ எனும் இரண்டும் விகிதமுறா எண்

எனக் காணலாம். ஆனால் இவற்றின் தொகை 2 ஆகும். அது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

ஒரு விகிதமுறா எண், ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகியவற்றின் தொகை ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும் என்று நிறுவுவது எளிதாகும். $a$ என்ற ஒரு விகிதமுறா எண்ணையும், $b$ என்ற ஒரு விகிதமுறு எண்ணையும் எடுத்துக்கொள்க. இவற்றின் தொகையை $c$ என எடுத்தால், $a + b = c$ என்றும், அதிலிருந்து

$$b - c = a$$

என்றும் எழுதலாம் அல்லவா. இதில் $b$ விகிதமுறு எண். இனி $c$ உம் விகிதமுறு எண் எனில், அவற்றின் வித்தியாசமான $b - c$ உம் விகிதமுறு எண் ஆகும். ஆனால் இந்த வித்தியாசம், விகிதமுறா எண்ணாகிய $a$ அல்லவா. அப்போது $c$ விகிதமுறு எண் அல்ல. ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

(1) விகிதமுறு எண்களின் பொதுவடிவத்தைப் பயன்படுத்தி, எந்த இரு விகிதமுறு எண்களின் தொகை, வித்தியாசம் பெருக்கற்பலன், வகுத்தல் பலன் ஆகியன விகிதமுறு எண்களாகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(2) ஒரு விகிதமுறா எண், பூஜ்யம் அல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண் எனும் இவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஒருவிகிதமுறா எண் என்று தெளிவுபடுத்துக.

(3) வித்தியாசமான இரு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கற்பலன் விகிதமுறு எண் ஆகும். ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

## புள்ளிகளும் எண்களும்

விகிதமுறு எண்களையும் விகிதமுறா எண்களையும் சேர்த்து எண்களைப் பொதுவாக மெய் எண்கள் (real numbers) என்று கூறுகிறோம்.

எதனால் இந்தப் பெயர் எனப் பார்க்கலாம். ஒரு கோட்டின் இடப்பக்கமுனையில் ஒரு புள்ளியையும் அதன் வலப் பக்கத்தில் வேறொரு புள்ளியையும் அடையாளப் படுத்தினால், முதல் புள்ளியிலிருந்து இரண்டாவது புள்ளிக்கு உள்ள தூரத்தை 1 (அலகு) என எடுத்து வலப்பக்கம் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் தூரங்களையும் எண்களாக எழுதலாம் அல்லவா.

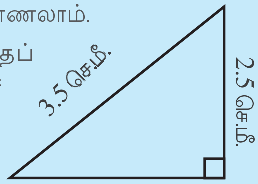

எல்லாப் புள்ளிகளின் தூரங்களையும் அடையாளப்படுத்த வேண்டுமெனில், விகிதமுறா எண்களும் அவசியமாகின்றன.

### விகிதமுறா அளவுகள்

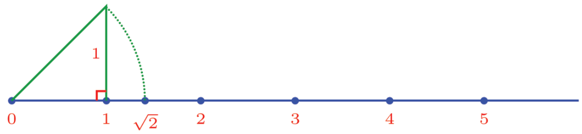
நீளங்கள் மட்டுமல்ல, பரப்பளவு, கனஅளவு எல்லாம் விகிதமுறா எண்களாக வரலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}$ ஐ நீளமாகவும், $\sqrt{2}$ ஐ அகலமாகவும் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ ஆகும் அல்லவா.

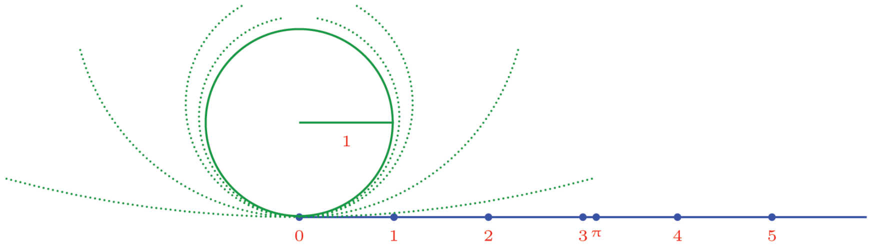
$\sqrt{6}$ ஐ நீளமாகவும் காணலாம்.

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும். இந்தச் செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?




மிகை எண்களாகிய எல்லா விகிதமுறா எண்களையும் நீளங்களாகக் காண்பது மிக வசதியாகும்.



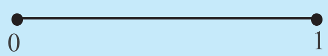

இந்தக் கோட்டை 0 என்ற புள்ளியிலிருந்து இடப்பக்கமாக நீட்டலாம் அல்லவா. அந்தப் பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளை எவ்வாறு எண்களால் அடையாளப் படுத்தலாம்?

அதற்கு வலப்பக்க எண்களின் குறைகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

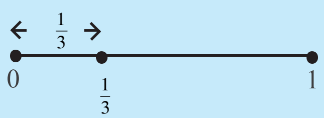

அவ்வாறு இந்தக் கோட்டிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் மெய் எண்களால் அடையாளப்படுத்தலாம். மாறாக, மெய் எண்களையெல்லாம் இந்தக்கோட்டின் (கோட்டில்) புள்ளிகளாகக் காணலாம்.

**எண் அடர்த்தி**

0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் எத்தனை எண்கள் உள்ளன? எண்ணல் எண்கள் ஒன்றும் இல்லை. ஆனால், $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ போன்ற விகிதமுறு எண்களையும் $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\pi}$ போன்றுள்ள விகிதமுறா எண் களையும் சேர்த்து எண்ணினால் முடிவடையாத எண்கள் 0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் உள்ளன அல்லவா. இதை வடிவியல் முறையிலும் காணலாம். ஒரு கோட்டை வரைந்து ஒரு முனையில் 0 என்றும் மறுமுனையில் 1 என்றும் எழுதலாம்.




இனி இந்தக்கோட்டில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்தாலும் 0 என்ற புள்ளியிலிருந்து தூரத்தைப் பயன்படுத்தி அந்தப் புள்ளியைக் குறிப்பிடலாம்.




அப்போது கோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும், ஓர் எண்ணைக் குறிப்பிடுகிறது. கோட்டில் எத்தனை புள்ளிகள் உள்ளன?

இத்தகைய ஒரு கோட்டை எண்கோடு (number line அல்லது real line) என்று கூறுகிறோம்.

எண்கோட்டில் 0 என்ற புள்ளியிலிருந்து வலப்பக்கம் நகர்கின்றபோது எண்கள் பெரிதாகின்றன அல்லவா. இடப்பக்கம் நகர்கின்ற போதோ?

$-1$, $-2$ என்பனவற்றில் எது பெரியது?

$-1$ என்றால் பூஜ்யத்திலிருந்து 1 குறைவு; $-2$ ஆனால்? பூஜ்யத்திலிருந்து 2 குறைவு. அதாவது $-1$ லிருந்து மீண்டும் 1 குறைவு. ஆகவே $-2$ தான். $-1$ ஐ விடச் சிறிய எண் கணிதமொழியில் கூறினால் $-2 < -1$.

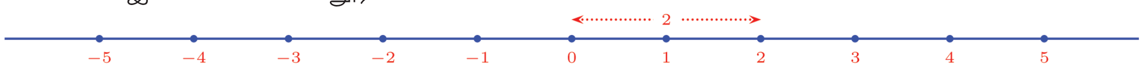
அப்போது எண்கோட்டில் பூஜ்யத்திலிருந்து வலப்பக்கம் நகர்கின்ற போது பெரிய எண்களும் இடப்பக்கம் நகர்கின்ற போது சிறிய எண்களுமே காணப்படுகின்றன.

பூஜ்யத்திற்குப் பதிலாக, எந்த இடத்திலிருந்து தொடங்கினாலும், இதுவே நடைபெறுகிறது. அப்போது எந்த இரு மெய் எண்களை எடுத்தாலும், எண் கோட்டில் இவற்றில் பெரிய எண்ணின் இடம், சிறிய எண்ணின் வலப்பக்கத்தில் ஆகும்.

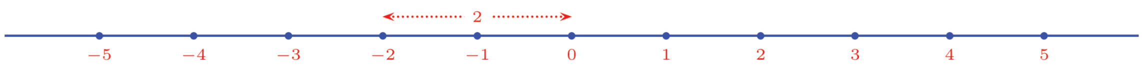
அவ்வாறு பெரியது, சிறியது என்ற எண் தொடர்பு, எண்கோட்டில் வலது, இடது என்ற வடிவியல் தொடர்பாக மாறுகிறது.

இனி, எண்கோட்டில் உள்ள இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரம் என்ற வடிவியல் கருத்தாக்கம். இந்தப் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்துகின்ற எண்களைப் பயன்படுத்திக் கூறுவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம். முதலில் பூஜ்யத்திலிருந்துள்ள தூரத்தை எடுக்கலாம்.

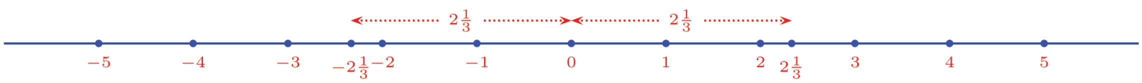
புள்ளிகளை எண்களாக அடையாளப்படுத்துவதும் 0 என்ற புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, 2 என்று அடையாளப்படுத்திய புள்ளிக்கும் 0 என்று அடையாளப்படுத்திய புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 2.



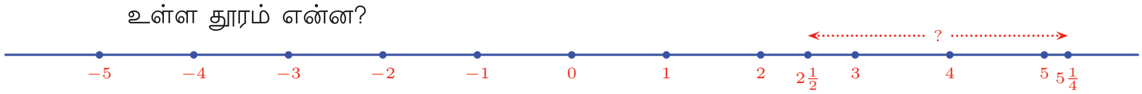

இதே தூரத்தில் 0 என்ற புள்ளியின் இடப்பக்கம் உள்ள புள்ளியையே −2 என்று அடையாளப்படுத்துகிறோம்.



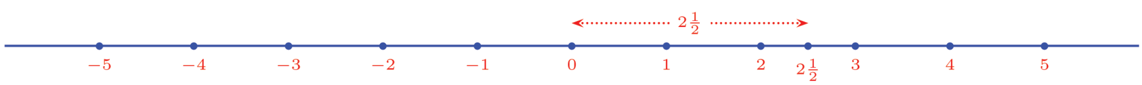

இதைப்போன்று $2\frac{1}{3}$ என்ற புள்ளிக்கும் 0 என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரமும் $-2\frac{1}{3}$ என்ற புள்ளிக்கும் 0 புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரமும் $2\frac{1}{3}$ ஆகும்:

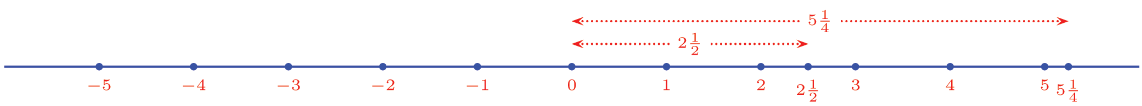


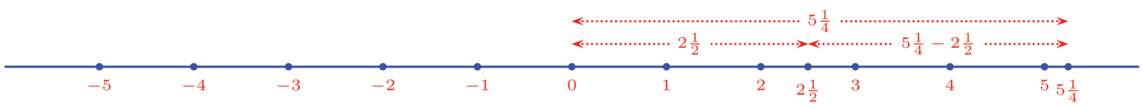

இனி, பொதுவாக இரு புள்ளிகளுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக $2\frac{1}{2}$ என்ற புள்ளிக்கும், $5\frac{1}{4}$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் என்ன?



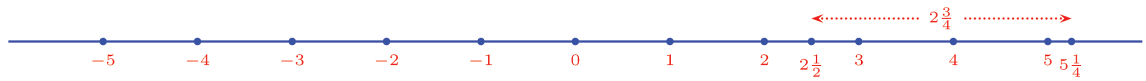

இவற்றின் இடையே உள்ள தூரம், 0 என்ற புள்ளியிலிருந்து இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் உள்ள தூரங்களின் வித்தியாசம் அல்லவா?



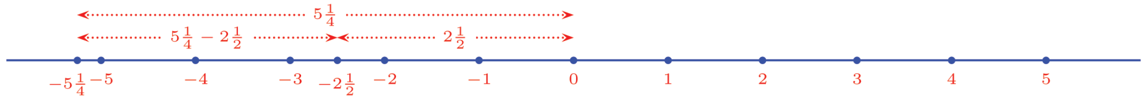



அதாவது, $2\frac{1}{2}$ என்ற புள்ளிக்கும் $5\frac{1}{4}$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

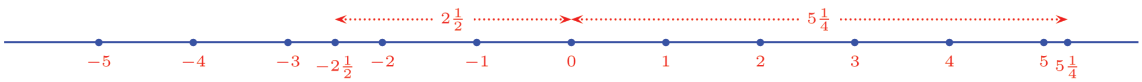



$$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

$-2\frac{1}{2}$ க்கும் $-5\frac{1}{4}$ க்கும் இடையே உள்ள தூரம் எனிலோ?

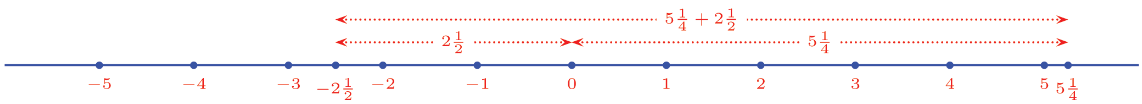



அப்போது பூஜ்யத்திலிருந்துள்ள பெரிய தூரத்திலிருந்து சிறிய தூரத்தைக் குறைத்தால் போதும் அல்லவா?




இனி $-2\frac{1}{2}$ உம் $5\frac{1}{4}$ உம் ஆனாலோ?

இந்த இரு புள்ளிகளும் பூஜ்யத்தின் இரு பக்கமும் அமைந்துள்ளதால், இவற்றின்

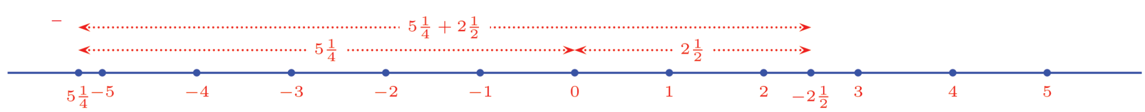



இடையே உள்ள தூரத்தைக் காண, பூஜ்யத்திலிருந்துள்ள தூரங்கள் இரண்டையும் கூட்ட வேண்டும்:

அதாவது, $-2\frac{1}{2}$ க்கும் $5\frac{1}{4}$ க்கும் இடையே உள்ள தூரம்

$$2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

$2\frac{1}{2}$ க்கும் $-5\frac{1}{4}$ க்கும் இடையே உள்ள தூரமும் இதுவே அல்லவா:



இப்போது நாம் கண்ட தூரங்கள் அனைத்தையும் ஒன்றாக எழுதிப் பார்ப்போம்.

| புள்ளிகள் | தூரங்கள் |
|---|---|
| $2\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{4}$ | $5\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}=2\frac{3}{4}$ |
| $-2\frac{1}{2},\ -5\frac{1}{4}$ | $5\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}=2\frac{3}{4}$ |
| $-2\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{4}$ | $5\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}=7\frac{3}{4}$ |
| $2\frac{1}{2},\ -5\frac{1}{4}$ | $5\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}=7\frac{3}{4}$ |

இதில் முதலில் உள்ள ஜோடி எண்களில் தூரத்தைக் கணக்கிட்டது, பெரிய எண்ணான $5\frac{1}{4}$ இல் இருந்து சிறிய எண்ணான $2\frac{1}{2}$ ஐக் கழித்தது ஆகும்.

இரண்டாவது ஜோடியில் அதில் பெரிய எண் $-2\frac{1}{2}$; இதிலிருந்து சிறிய எண்ணாகிய $-5\frac{1}{4}$ ஐக் கழித்துப் பார்ப்போம்.

$$-2\frac{1}{2}-\left(-5\frac{1}{4}\right)=-2\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}=5\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}=2\frac{3}{4}$$

இதுதான் அல்லவா தூரமாகக் கிடைத்ததும்? அப்போது இந்த ஜோடியிலும் தூரம், பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்தது ஆகும்.

மூன்றாவது ஜோடியிலோ? பெரிய எண் $5\frac{1}{4}$ சிறிய எண் $-2\frac{1}{2}$ . பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்தால்,

$$5\frac{1}{4}-\left(-2\frac{1}{2}\right)=5\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}=7\frac{3}{4}$$

இந்த ஜோடியிலும் தூரம், பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்தது ஆகும். கடைசி ஜோடியையும் பார்ப்போம். பெரியது $2\frac{1}{2}$, சிறியது $-5\frac{1}{4}$

$$2\frac{1}{2}-\left(-5\frac{1}{4}\right)=2\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}=7\frac{3}{4}$$

அப்போது புள்ளிகள் இரண்டும் பூஜ்யத்தின் வலப்பக்கம் ஆனாலும், இடப்பக்கம் ஆனாலும், ஒன்று வலப்பக்கம் மற்றது இடப்பக்கம் ஆனாலும் இவற்றின் இடையே உள்ள தூரம்

**சிறு வரலாறு**

எல்லா அளவுகளையும், எண்ணல் எண்களையும் அவற்றின் விகிதங்களையும் பயன்படுத்திக் குறிக்கலாம் என்ற பைதகோரஸ் கோட்பாடு ஹிப்பாச்சின் கருத்துகள் வழியாகச் சிதைந்ததைப் பற்றிக் கூறினோம் அல்லவா. ஆனால் விகிதமுறா எண்கள் என்ற கருத்து கிரேக்கக் கணிதச் சிந்தனையில் உதிக்கவில்லை. எண்களுக்குப் பதிலாகத் நீளங்களைப் பயன்படுத்தும் முறையே தொடர்ந்து உருவாயிற்று. அதனால் எண்களைப் பற்றிய கோட்பாடுகள் எல்லாம் வடிவியல் மொழி யிலேயே அக்காலத்தில் கிரேக்க நூல்களில் காணப்பட்டன.

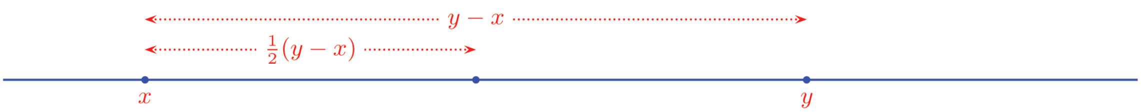
என்பது எண்களில் பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்ததுதான் ஆகும்.

ஓர் எண் பூஜ்யம் ஆயினும் இது சரியாகுமா? எடுத்துக்காட்டாக, 0, 2 இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரம் 2 இனி 0, $-2$ ஆயினும், தூரம் 2 தான், பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்தால் $0-(-2)=2$

**எண்கோட்டில் எந்த இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரமும், அவற்றைக் குறிக்கும் எண்களில், பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்தது ஆகும்.**

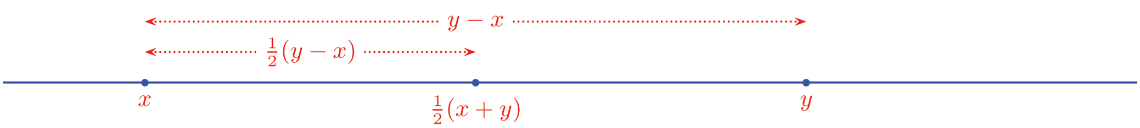
இதைப் பயன்படுத்தி எண் கோட்டில் இரு புள்ளிகளின் மையப்புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கலாம். புள்ளிகளைக் குறிக்கின்ற எண்களில் சிறியதை $x$ என்றும், பெரியதை $y$ என்றும் எடுத்துக்கொள்வோம். அப்போது $x$ இன் வலப்பக்கமே $y$. அவற்றின் இடையே உள்ள தூரம் $y-x$.


$x$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $y-x$ தூரத்தில்தான் $y$ என்ற புள்ளி. மையப்புள்ளி என்பது $x$ இல் இருந்து இதன் பாதி தூரம் வலப்பக்கத்தில் ஆகும்.:




அதாவது, மையப்புள்ளி

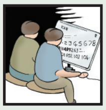
$$x+\frac{1}{2}(y-x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}(x+y)$$




**எண்கோட்டில் எந்த இரு புள்ளிகளின் இடையில் உள்ள மையப்புள்ளி, அவற்றைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களின் தொகையின் பாதியைக் குறிப்பிடும் புள்ளியாகும்.**

எடுத்துக்காட்டாக, $-2\frac{1}{2}$ , $4\frac{3}{4}$ என்பவற்றின் மையப்புள்ளி.

$$\frac{1}{2}\left(-2\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$$



(1) எண் கோட்டில் கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி எண்களையும் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

i) $1, -5$  ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  iii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

iv) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  v) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}$

(2) முதல் வினாவில் ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகளினுடையவும், மையப்புள்ளிகளைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களைக் காணவும்.

(3) எண்கோட்டில் $\frac{1}{3}$ ஐக் குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும் $\frac{1}{2}$ ஐக் குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள பகுதியை நான்கு சமப்பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

## இயற்கணிதம்

எண்கோட்டில் 3 என்ற புள்ளிக்கும் 0 என்ற புள்ளிக்கும் இடையில் உள்ள தூரம் 3 ஆகும். $-2$ என்ற புள்ளிக்கும் 0 என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 2. பொதுவாகக் கூறினால், ஒரு மிகை எண்ணுக்கும் பூஜ்யத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் அந்த மிகை எண்ணே ஆகும். ஒரு குறை எண்ணுக்கும் பூஜ்யத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம், எண்ணிலிருந்து குறை அடையாளத்தை நீக்கினால் கிடைக்கும் எண் ஆகும்.

இதை இயற்கணிதத்தில் எவ்வாறு கூறலாம்?

$x$ மிகை எண் என்றால் $x$ க்கும், பூஜ்யத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் $x$ ஆகும். $x$ என்பது குறை எண் ஆனாலோ?

(எண்களை எழுத்துக்களாக எழுதும் போது அவை குறை எண்ணாகுமா, மிகை எண்ணாகுமா என்று பார்க்காமல் இரு வகை எண்களையும் $x$, $y$ என்று ஒரேபோல் எழுதுகிறோம் என்று எட்டாம் வகுப்பில் **குறைஎண்கள்** என்ற பாடத்தில் படித்திருக்கிறோம்)

அப்போது ஒரு குறை எண்ணின் குறை அடையாளத்தை நீக்குவது என்பதை வேறொரு முறையில் கூற வேண்டும். ஓர் எண்ணின் குறையின் குறை அதே எண் ஆகும் என்று எட்டாம் வகுப்பில் படித்தது நினைவில் உள்ளது அல்லவா? எடுத்துக்காட்டாக,

$$-(-2) = 2$$

அதாவது ஒரு குறை எண்ணின் குறை நீக்குவது என்பதற்குப் பதிலாக, அதன் குறையை எடுக்கவும் எனக் கூறினால் போதும். அப்போது $x$ ஒரு குறை எண் எனில், குறை அடையாளத்தை நீக்கிய மிகை எண் கிடைக்க $-x$ எடுத்தால் போதும். எடுத்துக்காட்டாக, $x = -3$ எனில்,

$$-x = -(-3) = 3$$

இனி எண்கோட்டில் $x$ என்ற ஒரு குறை எண்ணிற்கும், பூஜ்யத்திற்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தை $-x$ என்று கூறலாம்.

இவ்வாறு $x > 0$ ஆகுமெனில் (அதாவது $x$ மிகை எண் எனில்) $x$ ஆகவும், $x < 0$ எனில் (அதாவது $x$ குறை எண் எனில்) $-x$ ஆகவும் எடுக்கின்ற செயலைச் சுருக்கி $|x|$ என்று எழுதுகிறோம். இதை $x$ இன் சார்பு விலை (absolute value) என்று கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|\pi| = \pi \qquad |-\pi| = \pi$$

பூஜ்யத்தின் சார்பு விலையைப் பூஜ்யமாகத்தான் எடுக்கிறோம். இதையெல்லாம் சுருக்கி இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \text{ என்றால்} \\ -x & x < 0 \text{ என்றால்} \\ 0 & x = 0 \text{ என்றால்} \end{cases}$$

இதுவரை கூறியதையெல்லாம் சுருக்கி இவ்வாறு கூறலாம்.

**எண்கோட்டில் பூஜ்யத்தைக் குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும், வேறொரு எண்ணைக் குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம், இந்த எண்ணின் சார்பு விலை ஆகும்.**

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திக் கூறினால்,

எண்கோட்டில் 0 ஐக் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளிக்கும் $x$ என்ற எண்ணைக் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $|x|$

இனி எண்கோட்டில் $x, y$ என்ற ஏதேனும் இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரத்தை இயற்கணிதத்தில் எவ்வாறு எழுதலாம் என்று பார்ப்போம். பெரிய எண்ணிலிருந்து, சிறிய எண்ணைக் கழித்துக் கிடைப்பதே தூரம் என்று பார்த்தோம். அப்போது $x, y$ என்பனவற்றில் பெரியது எது என்பதைப் பொறுத்தே தூரத்தை உறுதிப்படுத்த வேண்டும்.

$x > y$ எனில், தூரம் $x - y$

$x < y$ எனில், தூரம் $y - x$

$x$ என்ற எண் $y$ என்ற எண்ணை விடப் பெரியது என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக $x - y$ என்பது மிகை எண்ணாகும் என்று கூறலாம். இல்லையெனில் $x - y > 0$ என்றும் கூறலாம். இதைப்போன்று $x$ என்ற எண் $y$ என்ற எண்ணை விடச் சிறியது

என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக $x - y$ குறை எண் என்று கூறலாம். இல்லையெனில் $x - y < 0$ என்றும் கூறலாம்.

$x - y > 0$ எனில், தூரம் $x - y$

$x - y < 0$ எனில், தூரம் $y - x$

இனி, $x - y$, $y - x$, என்ற எண்களுக்கு இடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என்று சிந்திப்போம். ஓர் எண்ணிலிருந்து வேறொரு எண்ணைக் கழிப்பதன் குறையையே; மாற்றிக் கழிப்பது என்று எட்டாம் வகுப்பில் பார்த்திருக்கிறோம். (**குறைஎண்கள்** என்ற பாடத்தில் **பயன்பாடு** என்ற பகுதி)

அதாவது $x$, $y$ என்ற எந்த இரு எண்களை எடுத்தாலும்

$$y - x = -(x - y)$$

அப்போது நமது தூரக் கணக்கை மீண்டும் மாற்றி எழுதலாம்.

$x - y > 0$ எனில், தூரம் $x - y$

$x - y < 0$ எனில், தூரம் $-(x - y)$

இதை மேலும் ஒரு முறை கவனித்துப் பார்க்கவும், $x - y$ என்பது மிகை எண் எனில், அந்த எண்ணும் $x - y$ குறை எண் எனில் அதன் குறையும் அல்லவா எடுக்கப்பட்டுள்ளன. இது அல்லவா $x - y$ என்ற எண்ணின் சார்பு விலை?

அப்போது தூரத்தைக் குறித்து இரண்டாகக் கண்டதை இனி ஒன்றாக்கலாம்.

எண்கோட்டில் $x$, $y$ என்ற எண்கள் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $|x - y|$.

சாதாரண மொழியில் கூறினால்,

**எண்கோட்டில் இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரம் அவற்றைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களின் வித்தியாசத்தின் சார்பு விலை ஆகும்.**

எடுத்துக்காட்டாக, எண்கோட்டின் 2, 5 என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

$$|2 - 5| = |-3| = 3$$

2, −5 என்பவற்றின் இடையே உள்ள தூரமோ?

$$|2 - (-5)| = |2 + 5| = |7| = 7$$

இனி சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

$|x - 1| = 3$ ஆக வேண்டுமெனில் $x$ எந்த எண்களாக இருக்கலாம்?

இதைப் பலமுறைகளில் செய்யலாம். வடிவியல் முறையில் பார்த்தால் $|x-1|$ என்பது எண்கோட்டில் $x$, 1 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள தூரமாகும். இந்தத் தூரம் 3 ஆக வேண்டும்.

**வர்க்கமூலமும், சார்பு விலையும்**

$x$ என்பது மிகை எண் ஆனாலும், குறை எண் ஆனாலும், $|x|$ என்பது மிகை எண்ணே ஆகும். இதைப்போன்று, $x$ மிகை எண் ஆனாலும், குறை எண் ஆனாலும் $x^2$ என்பது மிகை எண் ஆகும்.

$\sqrt{x^2}$ என்ன?

எந்த மிகை எண்ணிற்கும் இரண்டு வர்க்க மூலம் உண்டு. அதில் மிகை எண்ணாகிய வர்க்க மூலத்தையே $\sqrt{\ }$ குறியீட்டால் குறிப்பிடுகிறோம். பொதுவாகக் கூறினால், $x$ எந்த எண் ஆனாலும்

எடுத்துக்காட்டாக, $x = 4$

என்று எடுத்தால், $x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = x$$

$x = -4$ ஆனலோ?

$x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = -x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

இதில் கவனிக்க வேண்டியது இதுவே $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ ஆகுமெனில் $\sqrt{x^2}$ என்பது $x$ மட்டுமாக வேண்டும் என்றில்லை.

1 இன் வலப்பக்கம், தூரம் 3 ஆகுமாறு உள்ள எண் $1 + 3 = 4$

1 இன் இடப்பக்கம், தூரம் 3 ஆகுமாறு உள்ள எண் $1 - 3 = -2$ உம்

அப்படியானல் $x = 4$ அல்லது $x = -2$

இனி, இயற்கணித முறையில் சிந்தித்தாலோ? $x > 1$ ஆகுமெனில் $|x-1| = x - 1$ அல்லவா. $x - 1 = 3$ ஆக வேண்டுமெனில் $x = 4$ ஆக வேண்டும்.

$x < 1$ ஆனால்? அப்போது $|x-1| = 1 - x$ ஆகும். $1 - x = 3$ ஆக வேண்டுமெனில் $x = 1 - 3 = -2$ ஆக வேண்டும்.

வினாவைச் சிறிது மாற்றி இப்படி ஆக்கினால்?

> $|x + 1| = 3$ ஆக வேண்டுமெனில் $x$ எந்த எண்களாக இருக்க வேண்டும்?

வடிவியல் முறையில் இதைச் செய்ய, $|x + 1|$ ஐ ஒரு தூரமாகக் காண வேண்டும். எண்களுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் சார்பு விலை அல்லவா தூரமாகக் கிடைக்கிறது. அப்போது முதலில் $x + 1$ ஐத் தொகைக்குப் பதிலாக வித்தியாசமாக எழுத வேண்டும்.

$$x + 1 = x - (-1)$$

இதிலிருந்து $|x + 1|$ என்பது, எண்கோட்டில் $x$ க்கும் $-1$ க்கும் இடையே உள்ள தூரமாகும் எனக் காணலாம். இனி, முதல் கணக்கில் செய்ததைப் போன்று $-1$ இன் வலப்பக்கம் 3 தூரத்தில் உள்ள புள்ளி $-1 + 3 = 2$ என்றும் இடப்பக்கம் தூரம் 3 ஆன புள்ளி $-1 - 3 = -4$ என்றும் காணலாம்.

இந்தக் கணக்கை இயற்கணிதம் பயன்படுத்திச் செய்து பார்க்கவும்.

மேலும் ஒரு கணக்கு:

> $x$ எந்த எண் ஆனாலும் $|x|^2 = x^2$ என்று நிறுவுக.

$x$ என்பது மிகை எண் எனில் $|x| = x$ அல்லவா. அப்போது

$$|x|^2 = x^2$$

$x$ என்பது குறை எண் எனிலோ? $|x| = -x$ . அப்போது

$$|x|^2 = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x \times x = x^2$$

கடைசியாக, $x = 0$ எனிலோ? $|x| = 0$

$$|x|^2 = 0^2 = 0$$

இனி $x = 0$ ஆனதால்,

$$x^2 = 0^2 = 0$$

அப்போது, $x = 0$ எனில்,

$$|x|^2 = 0 = x^2$$

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாடும் சரியாக ஆகுமாறு $x$ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) $|x - 1| = |x - 3|$

ii) $|x - 3| = |x - 4|$

iii) $|x + 2| = |x - 5|$

iv) $|x| = |x + 1|$

(2) $1 < x < 4$, $1 < y < 4$ ஆகுமெனில் $|x - y| < 3$ என்று நிறுவுக.

(3) $x < 3$, $y > 7$ ஆகுமெனில் $|x - y| > 4$ என்று நிறுவுக.

(4) $|x + y| = |x| + |y|$ ஆகுமாறு $x, y$ என்பன கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) $|x + y| < |x| + |y|$ ஆகுமாறு எண்கள் $x, y$ உண்டா?

(6) $|x + y| > |x| + |y|$ ஆகுமாறு எண்கள் $x, y$ உண்டா?

(7) $|x - 2| + |x - 8| = 6$ ஆகிறது எனில் $x$ எந்த எண்கள் ஆகலாம்?

(8) $|x - 2| + |x - 8| = 10$ ஆகிறது எனில் $x$ எந்த எண்கள் ஆகலாம்?

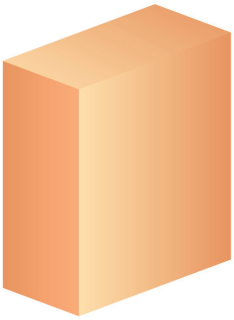
$x$ ஆக, பல எண்கள் எடுக்கும் போது $|x - 2| + |x - 8| = n$, $n$ என்ற எண்கள் ஆகின்றவை எவை?

## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | என்னால் முடியும் | ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்பட வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • நீளங்களைக் குறிப்பதற்குத் தேவையான எல்லா எண்களையும், அவற்றின் குறைகளையும் ஒரு கோட்டில் புள்ளிகளாகக் காணலாம் என்று புரிந்து கொள்ளுதல்.<br>• ஒரு கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் என்ற வடிவியல் கருத்தாக்கத்தை, சார்பு விலை என்ற எண் சார்ந்த கருத்தாக்கமாக மாற்றுவது எவ்வாறு எனப் புரிந்து கொள்ளுதல்.<br>• சார்பு விலைகள் உட்படுகின்ற சில சமன்பாடுகளை வடிவியல் சார்ந்தும் எண்கள் சார்ந்தும் விளக்குவதற்கும் அத்தகைய பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணவும் இயலுதல். | | | |

# 11 பட்டகங்கள்

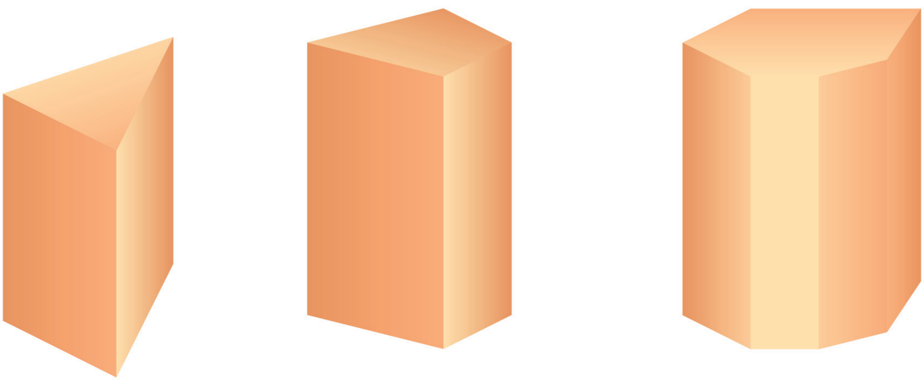
## அடிப்பகுதி பலவிதம்



செவ்வகக்கட்டைகளைக் குறித்தும் அவற்றின் கனஅளவைக் குறித்தும் ஆறாம் வகுப்பில் கற்றோம் அல்லவா:

பல செவ்வகங்கள் சேர்ந்ததே இதன் வெளிக்கூடு அல்லது மேற்பரப்பு. கீழேயும் மேலேயும் ஒரேபோல் உள்ள இரு செவ்வகங்கள். அதைப்போன்று இடதும் வலதும் இரண்டு, முன்னாலும் பின்னாலும் மூன்றாவதாக ஒரு ஜோடி; மொத்தம் ஆறு செவ்வகங்கள்.

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:



பரப்பும், உயரமும் உள்ள இவற்றை முப்பரிமாண வடிவங்கள் (three dimensional shapes) அல்லது கனவடிவங்கள் (solids) என்று அழைக்கிறோம். இவை அனைத்திற்கும் பொதுவான சில சிறப்புத்தன்மைகள் உள்ளன.

### பட்டகங்கள் ஜியோஜிப்ராவில்

பல்வேறு கன உருவங்களை (பட்டகங்கள்) ஜியோஜிப்ராவில் வரையலாம். இதற்காகச் சில முன்னேற்பாடுகள் தேவை.

- ஜியோஜிப்ராவைத் திறந்து View லிருந்து Algebra, Graphic, 3D என்பனவற்றை திறக்கவும்.
- 3D Graphics இன் வலப்பகுதியில் கிளிக் செய்து Graphic என்பதில் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக் கின்ற Preferences என்ற சாளரத்தில் Show Axes, Use clipping, Show clipping என்பனவற்றிற்கு நேராக உள்ள √ அடையாளத்தை நீக்கவும்.
- Options → Labelling → No New Object கொடுத்தால் வரைகின்ற உருவங்களின் பெயர் எழுதி வருவதைத் தவிர்க்கலாம். இனி பட்டகங்களை வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம்.

Graphic இல் முக்கோணம், செவ்வகம் என்று ஏதேனும் ஒன்றில் ஒரு வடிவியல் வடிவத்தை வரையவும். (இதற்காக Grid ஐப் பயன் படுத்தலாம்). இந்த வடிவத்தை 3D Graphics லும் காண இயலும். 3D Graphics இல் கிளிக் செய்து Extrude to Prism or Cylinder ஐப் பயன்படுத்தி 3D Graphics இல் காண்கின்ற வடிவியல் வடிவத்தில் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கின்ற சாளரத்தில் பட்டகத்தின் உயரத்தைக் கொடுக்கவும். 3D Graphics இல் ஒரு பட்டகம் கிடைக்கும். Rotate 3D Graphics View ஐப் பயன்படுத்தி இந்தப் பட்டகத்தைத் திருப்பியும், தலைகீழாகவும் பார்க்க இயலும்.

Graphics இல் வரைந்த வடிவியல் வடிவத்தின் உருவத்தை மாற்றுவதற்கு ஏற்ப பட்டகத்தின் வடிவமும் மாறுவதைக் காண இயலும். ஒரு ஸ்லைடரை உருவாக்கி பட்டகத்தின் உயரமாக சிலைடரின் பெயர் அளித்தால், உயரத்தைத் தேவைக்கு ஏற்ப மாற்றலாம்.

முதல் வடிவத்தின் மேற்பகுதி, ஒரேபோல் உள்ள இரு முக்கோணங்களும், மூன்று செவ்வகங்களும் சேர்ந்தது ஆகும். இரண்டாவது வடிவத்தில் முக்கோணங்களுக்குப் பதிலாக நாற்கரங்களும், மூன்றாவதில் அறுகோணங் களும் ஆகும்.

பொதுவாகக் கூறினால், ஒரேபோல் உள்ள இரு பலகோணங்களும், அவற்றின் பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் எதிர்ப்பக்கங்களாக ஒரே உயரத்தில் நிற்கின்ற செவ்வகங்களுமே இவற்றின் மேற்பரப்பு. இத்தகைய வடிவங்களின் பொதுப் பெயர் பலகோணப் பட்டகம் (prism) என்றாகும்.

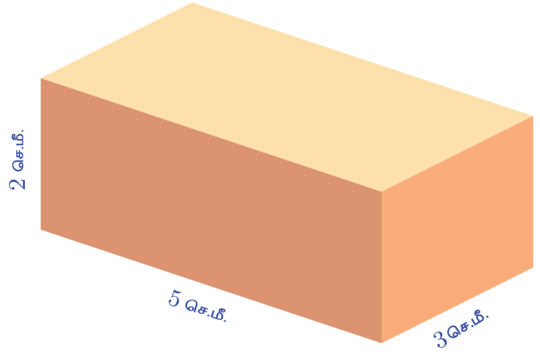
ஒரு பட்டகத்தின் பலகோணங்களையும் செவ்வகங்களையும் எல்லாம் அதன் முகங்கள் (faces) என்றே கூறுகிறோம். கீழேயும் மேல்பகுதியிலும் உள்ள பலகோணங்களை அடிப் பக்கமுகங்கள் என்றும், செவ்வகங்களைப் பக்கமுகங்கள் என்றும் அழைக்கிறோம். அடிப்பக்க முகங்களின் வடிவத்திற்கு ஏற்ப, பட்டகங்களை முக்கோணப்பட்டகம், நாற்கரப் பட்டகம் என வகைப்படுத்தலாம்.

மேலே உள்ள படத்தில் காண்பது ஒரு முக்கோணப் பட்டகமும், நாற்கரப் பட்டகமும், ஓர் அறுகோணப் பட்டகமும் ஆகும். இதுவரை செவ்வகக்கட்டை என்று கூறிய வடிவத்தைச் (சிறிது அழுத்தமாக) செவ்வகப் பட்டகம் என்று அழைக்கலாம்.

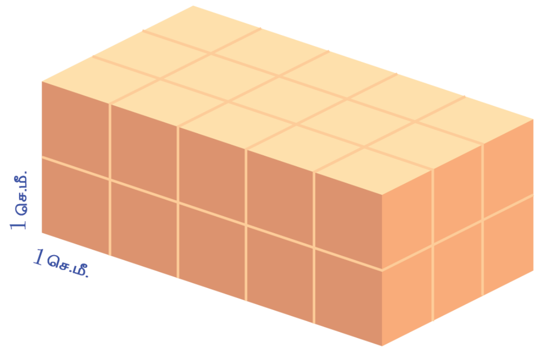
கட்டி அட்டையில் நாற்கரங்களும், செவ்வகங்களும் வெட்டியெடுத்து உள்ளீடற்ற பட்டகங்களை உருவாக்கிப் பார்க்கலாம்.

## கனஅளவு

ஆறாம் வகுப்பில் செவ்வகப் பட்டகங்களின் (செவ்வகக்கட்டை களின்) கனஅளவைக் கண்டது நினைவில் உள்ளதா? எடுத்துக்காட்டாக, இந்தச் செவ்வகப் பட்டகத்தைப் பார்க்கவும்.



கீழ்க் காண்பது போன்று இதன் பக்கங்கள் அனைத்தையும் ஒரு சென்டிமீட்டர் உள்ள சதுரக்கட்டைகளாகப் பிரிக்கலாம்:

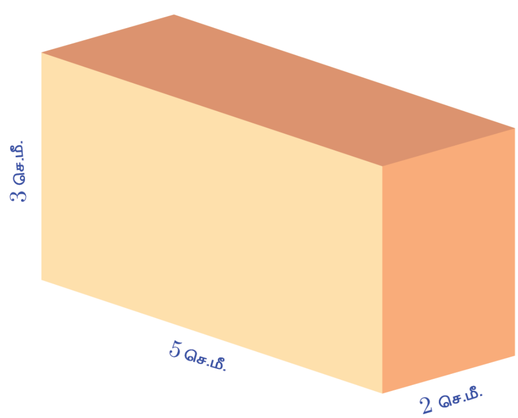


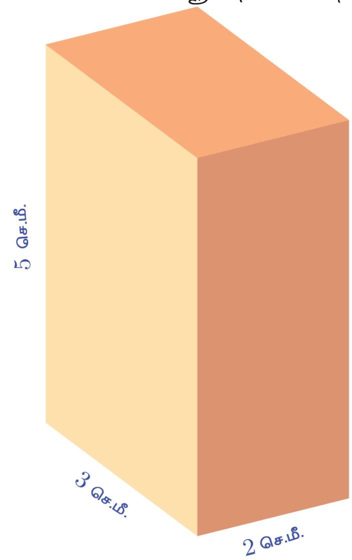

இதில் $5 \times 3 \times 2 = 30$ எனச் சிறிய சதுரக்கட்டைகள் உள்ளன. ஆகவே இந்தச் செவ்வகப்பட்டகத்தின் கனஅளவு 30 கனசென்டிமீட்டர்.

ஆறாம் வகுப்பில் **பாகங்களின் பாகம்** என்ற பாடத்தில் **பின்னபரப்பு** என்ற பகுதியில் கண்டதுபோன்று, செவ்வகப்பட்டகத்தின் நீளம், அகலம், உயரம் ஆகியன பின்ன எண்கள் ஆயினும் கனஅளவு என்பது அவற்றின் பெருக்கற்பலன் எனக் காணலாம். **புதிய எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **பெருக்கல்** என்ற பகுதியில் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு விளக்கப்பட்டுள்ளதைப் போன்று, செவ்வகப்பட்டகத்தின் அளவுகள் விகிதமுறா எண்கள் ஆயினும் கனஅளவு என்பது அவற்றின் பெருக்கற்பலனே எனவும் எனக் காணலாம்.

செவ்வகப்பட்டகத்தின் கனஅளவை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். மேலே உள்ள படத்தில் செவ்வகப்பட்டகத்தின் அடிப்பகுதி ஒரு செவ்வகமாகும். பக்கங்களின் நீளங்கள் 5சென்டி மீட்டர், 3சென்டி மீட்டர்; பரப்பளவு $5 \times 3$ சதுரசென்டிமீட்டர். அப்போது இந்தப் பரப்பளவு, பட்டகத்தின் உயரமான 2சென்டிமீட்டர் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனே கனஅளவு ஆகும்.

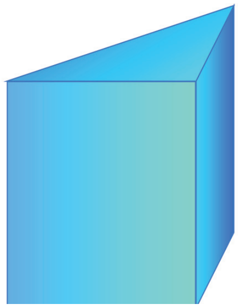
செவ்வகப்பட்டகத்தின் எல்லா முகங்களும் செவ்வகம் ஆனதால், எந்த முகத்தையும் அடிப்பக்கமாக எடுக்கலாம்:



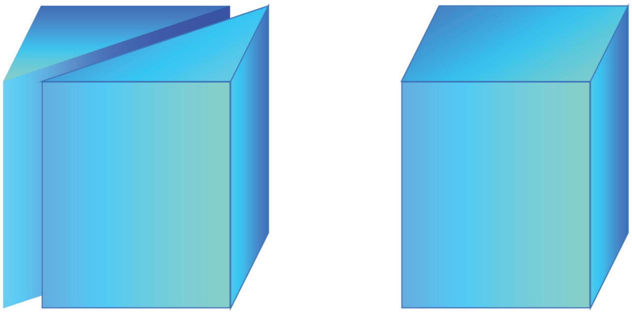



எவ்வாறாயினும் அடிப்பக்கத்தின் பரப்பளவு, உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் அல்லவா கனஅளவு?

எந்தப் பட்டகத்தின் கனஅளவையும் இவ்வாறு கணக்கிடமுடியுமா எனப் பார்ப்போம். முதலில் ஒரு செங்கோண முக்கோணப் பட்டகத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

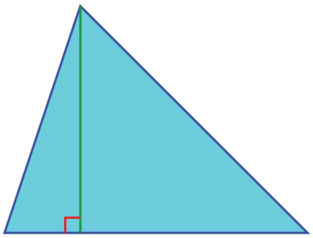


இதைப்போன்று ஒரு செங்கோண முக்கோணப் பட்டகத்தையும் சேர்த்து வைத்து ஒரு செவ்வகப்பட்டகத்தை உருவாக்கலாம் அல்லவா.

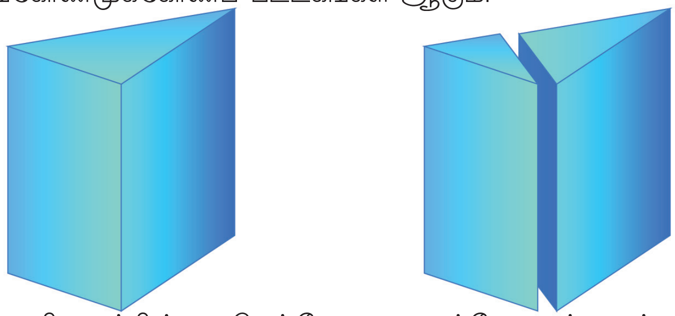


அடிப்பக்கமான செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவை $a$ என எடுத்தால், இத்தகைய இரண்டைச் சேர்த்து உருவாக்கும் செவ்வகப்பட்டகத்தின் அடிப்பக்கப் பரப்பு (அடிப்பக்கப்பரப்பை இவ்வாறு சுருக்கமாக் கூறலாம்) $2a$; முக்கோணப்பட்டகத்தின் உயரமே செவ்வகப்பட்டகத்தின் உயரம். அதை $h$ என எடுத்தால், செவ்வகப்பட்டகத்தின் கனஅளவு $2ah$. இது ஒரே அளவு உள்ள இரு செங்கோண முக்கோணப் பட்டகங்களை இணைத்து வைத்த வடிவத்தின் கனஅளவு. அதாவது ஒரு முக்கோணப்பட்டகத்தின் கனஅளவு $ah$. அதாவது அடிப்பக்கப்பரப்பு, உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலனே கனஅளவு.

இனி அடிப்பக்கம் செங்கோணம் அல்லாத முக்கோணம் எனிலோ? எந்த முக்கோணத்திலும் அதன் ஓர் உச்சி வழியே செங்குத்துக்கோடு வரைந்து அதை இரு செங்கோணமுக்கோணங்கள் ஆக்கலாம்.



அப்போது அடிப்பக்கம் செங்கோணம் அல்லாத முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கத்தையும், மேலே உள்ள முக்கோணத்தையும் இணை கோடுகளால் பகுத்து, இந்தக் கோடுகள் வழியாகப் பட்டகத்தைக் குறுக்காக வெட்டினால் அது இரு செங்கோணமுக்கோணப் பட்டகங்கள் ஆகும்.

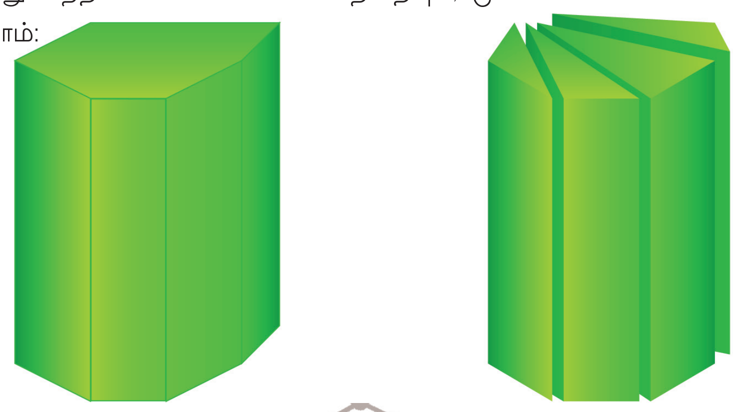


பகுத்துக் கிடைக்கின்ற செங்கோண முக்கோணப் பட்டகங்களின் கனஅளவுகளைக் கூட்டினால் முதலில் உள்ள பட்டகத்தின் கனஅளவு கிடைக்கும். பகுப்பதன் முன்னர் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கப்பரப்பு $a$, பகுத்துக் கிடைக்கின்ற பட்டகங்களின் அடிப்பக்கப்பரப்பை $b, c$ என எடுத்துக்கொண்டால் $a = b + c$. எல்லாப் பட்டகங்களுக்கும் ஒரே உயரம் ஆகும். இதை $h$ எனக் கொண்டால், செங்கோண முக்கோணப் பட்டகங்களின் கனஅளவுகளின் தொகை $bh + ch = (b + c)h = ah$. இது முதலில் உள்ள முக்கோணப்பட்டகத்தின் கனஅளவு அல்லவா?

இவ்வாறு எந்த முக்கோணப் பட்டகத்தின் கனஅளவும், அடிப்பக்கப்பரப்பு, உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

எந்தப் பலகோணத்திலும், ஒரு குறிப்பிட்ட உச்சியையும் பிற அனைத்து உச்சிகளையும் இணைத்து, முக்கோணங்களாகப் பகுக்கலாம். பலகோணத்தின் பரப்பளவு என்பது பகுத்துக் கிடைக்கின்ற முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை ஆகும்:

அப்போது எந்தப் பலகோணப்பட்டகத்தையும், முக்கோணப்பட்டகங்களாகப் பகுக்கலாம்:



பட்டகத்தின் அடிப்பக்கப்பரப்பு $a$ என்றும், பட்டகத்தின் உயரம் $h$ என்றும் கொள்வோம். அடிப்பக்கத்தை $n$ முக்கோணங்களாகப் பிரிக்க இயலுமெனில், படத்தில் கண்டதைப் போன்று பட்டகத்தை $n$ முக்கோணப் பட்டகங்களாக வெட்டலாம். இவற்றின் அடிப்பக்கப் பரப்பை $b_1, b_2, ..., b_n$ என எடுத்தால், கனஅளவு $b_1h, b_2h, ..., b_nh$ என்றாகும். அப்போது பலகோணப் பட்டகத்தின் கனஅளவு

$$b_1h + b_2h + ... + b_nh = (b_1 + b_2 + .... + b_n)h = ah$$

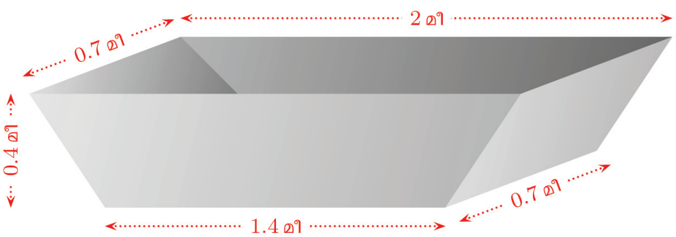
அதாவது,

**எந்தப் பலகோணப் பட்டகத்தின் கனஅளவும், அடிப்பக்கப்பரப்பு, உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.**

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பட்டகத்தின் அடிப்பக்கம், பக்கங்களின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர் உள்ள சமப்பக்க முக்கோணமும், உயரம் 10 சென்டிமீட்டர் எனில் அதன் கனஅளவு

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 10 = 40\sqrt{3} \text{ கன சென்டிமீட்டர்}$$

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம். ஒரு தண்ணீர்த்தொட்டியின் படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.




முன்னாலும் பின்னாலும் முகங்கள் ஒரே போல் உள்ள சமப்பக்கச் சரிவகங்கள் ஆன பட்டகமே. இதில் எவ்வளவு லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்?

இந்தச் சரிவகத்தின் பரப்பளவு,

$$\frac{1}{2} \times (2 + 1.4) \times 0.4 = 0.68 \text{ சதுர மீட்டர்}$$

தொட்டியின் கனஅளவு,

$$0.68 \times 0.7 = 0.476 \text{ கன மீட்டர்}$$

ஒரு கனமீட்டர் என்றால் ஆயிரம் லிட்டர். அப்படியானால் தொட்டியில் 476 லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்.

(அறிவுரை: பட்டகத்தில் எப்போதும் அடிப்பக்கம் கீழேதான் வர வேண்டும் என்றில்லை)

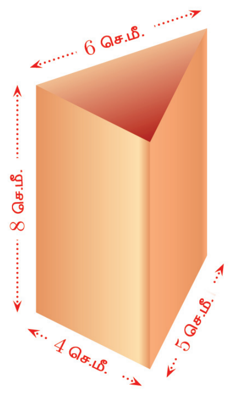
(1) ஒரு சமபக்க முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு 15சென்டிமீட்டர், உயரம் 5சென்டிமீட்டர் ஆகும். அதன் கனஅளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(2) மழைத்தண்ணீரைச் சேகரிப்பதற்காக, பள்ளிக்கூடத்தின் முற்றத்தில் ஒழுங்கு அறுகோண வடிவத்தில் ஒரு குழி உள்ளது. இதன் ஒரு பக்கம் 2 மீட்டர், குழியின் ஆழம் 3 மீட்டர் ஆகும். இதில் ஒரு மீட்டர் உயரத்தில் தண்ணீர் உள்ளது. அது எவ்வளவு லிட்டர்?

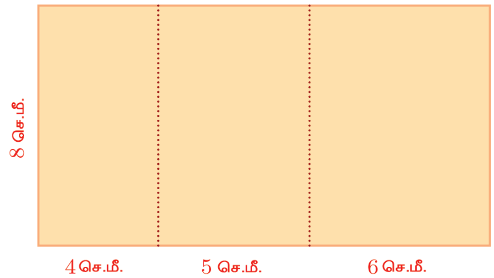
(3) பட்டக வடிவத்திலுள்ள ஒரு பாத்திரத்தின் அடிப்பக்கம், பக்கங்கள் அனைத்தும் 16 சென்டிமீட்டர் உள்ள சதுரம் ஆகும். பாத்திரத்தில் 10சென்டிமீட்டர், உயரத்தில் தண்ணீர் உள்ளது. இதில் பக்க அளவுகள் 8சென்டிமீட்டர் உள்ள சதுரக்கட்டையை மூழ்கச் செய்தால், பாத்திரத்தில் தண்ணீரின் அளவு எத்தனை சென்டிமீட்டர் உயரும்?

## பரப்பளவு

கட்டிக் காகிதத்தைப் பயன்படுத்தி இங்குக் காட்டப்பட்டுள்ள அளவுகளில் ஒரு குழலை உருவாக்க வேண்டும்:




மூன்று செவ்வகங்களை வெட்டியெடுத்து ஒட்டி உருவாக்கலாம். ஒரே செவ்வகத்தை மடித்து ஒட்டி வைத்தும் உருவாக்கலாம்:




ஒரு பட்டகத்தை பிரித்து வைக்கின்ற வடிவம் எப்படியிருக்கும் என்று ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்திக் காண இயலும். **கன வடிவங்கள்** ஜியோஜிப்ராவில் என்ற பகுதியில் கண்டதைப் போன்று ஒரு பட்டகம் வரையவும். 3D Graphics இல் Net ஐப் பயன்படுத்திப் பட்டகத்தில் கிளிக் செய்தால் பட்டகத்தைப் பிரித்து நிமிர்த்தி வைத்த வடிவம் கிடைக்கும். இத்துடன் Graphics இல் ஒரு ஸ்லைடரும் கிடைக்கும். சிலைடரை நகர்த்துவதற்கு ஏற்ப பட்டகம் உருவாவதைக் காணலாம். முதலில் வரைந்த பட்டகத்தை மறைத்து வைக்க வேண்டுமெனில் Algebra view இல் உள்ள Prism என்பதில் பட்டகத்தின் பெயர் அளித்துள்ளதன் நேராக உள்ள புள்ளியில் கிளிக் செய்தால் போதும். வரைந்த படத்தில் உள்ள புள்ளிகளை மறைத்து வைக்க Algebra view இல் உள்ள Point என்று எழுதியுள்ளதில் கிளிக் செய்து அனைத்துப் புள்ளிகளையும் ஒன்றாக எடுக்கவும். தொடர்ந்து வலப்பக்கத்தில் கிளிக் செய்து Show Object என்பதற்கு நேராக உள்ள √ அடையாளத்தை நீக்கவும்.

இதை உருவாக்க எவ்வளவு சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை?

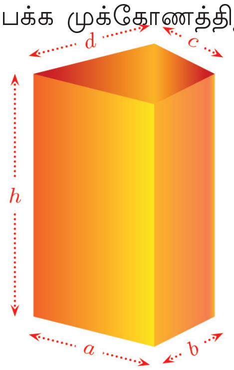
சதுரத்தின் பரப்பளவு

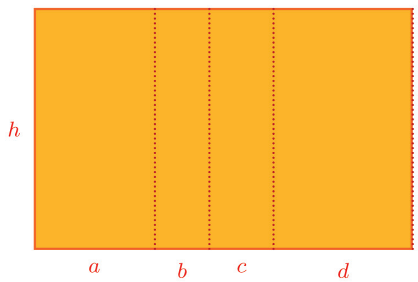
$(4+5+6)\times 8 = 15\times 8 = 120$ சதுர சென்டி மீட்டர்.

முக்கோணப்பட்டகத்தின் அனைத்துப் பக்கமுகங்களின், பரப்பளவுகளையும் கூட்டிக்கிடைப்பதே இது. பொதுவாக ஒரு பட்டகத்தின் அனைத்துப் பக்க முகங்களின் பரப்பளவுகளையும் கூட்டிக் கிடைக்கின்ற தொகையை அதன் பக்கமுகப் பரப்பளவு (lateral surface area) என்று கூறுவர். இதைச் சுருக்கமாகப் பக்கப்பரப்பளவு என்றும் கூறலாம்.

படத்தில் முக்கோணப் பட்டகத்தின் பக்கமுகப் பரப்பளவைக் காண, 15 ஐ 8 ஆல் பெருக்கினோம். இதில் $4 + 5 + 6 = 15$, என்பது அடிப்பக்கமாகிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவும், 8 என்பது பட்டகத்தின் உயரமும் அல்லவா? சிறிது சிந்தித்தால், எந்த முக்கோணப் பட்டகத்தின் பக்கமுகப்பரப்பளவையும் இவ்வாறு காணலாம் என்று அறிய முடிகிறது.

அடிப்பக்க முக்கோணத்திற்குப் பதிலாக நாற்கரமானால்?



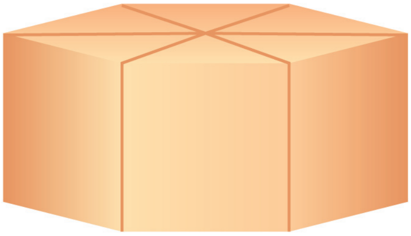

இந்த நாற்கரப் பட்டகத்தின் பக்கமுகப் பரப்பளவு $(a + b + c + d)\,h$; அதாவது அடிப்பக்க நாற்கரத்தின் சுற்றளவு, பட்டகத்தின் உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும். இதைப்போன்று எந்தப் பலகோணப் பட்டகத்திலும் பக்கமுகப்பரப்பளவைக் காணலாம்:

**எந்தப் பலகோண பட்டகத்தின் பக்கமுகப்பரப்பளவு என்பது அடிப்பக்கச் சுற்றளவு, பட்டகத்தின் உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.**

மூடியப் பட்டகம் எனில், வெளிப்பகுதியின் மொத்தப் பரப்பளவைக் கணக்கிடுவதற்குப் பக்கமுகப் பரப்பளவுடன் அடிப்பக்கப் பரப்பளவுகளைக் கூட்டினால் போதும்.

ஒரு கணக்கைக் காண்போம்:

மரத்தினால் உருவாக்கப்பட்ட ஒரு சமப்பக்க முக்கோணப் பட்டகத்தின்



பக்கமுகப் பரப்பளவு 48 சதுர சென்டி மீட்டர், அதன் உயரம் 4 சென்டி மீட்டர். இத்தகைய ஆறு வடிவங்களைச் சேர்த்து வைத்து ஓர் அறுகோணப் பட்டகம் உருவாக்கப்பட்டது:

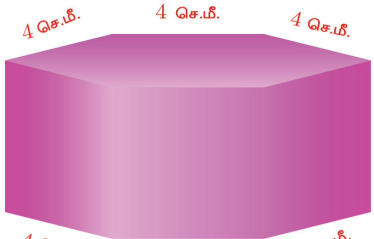
இதனை அழகுப்படுத்த முழுமையாக வண்ணக் காகிதம், ஒட்டப்படுகிறது அப்படியானால், எத்தனை சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை?

அறுகோணப் பட்டகத்தின் மொத்தப்பரப்பளவே இங்குத் தேவைப்படுகிறது. அதற்காகப் பக்கமுகப் பரப்பளவையும், அடிப்பக்கப் பரப்பரளவையும் கூட்ட வேண்டும்.

பக்கமுகப் பரப்பளவைக் கணக்கிடுவதற்கு அறுகோணத்தின் சுற்றளவு தேவை. அதற்கு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் பக்கங்களைக் கணக்கிட வேண்டும். எந்த ஒரு பட்டகத்தின் பக்கமுகப் பரப்பளவையும் உயரத்தால் வகுத்தால், அடிப்பக்கச் சுற்றளவு கிடைக்கும். அப்போது கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள முக்கோணப்பட்டகத்தின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு $48 \div 4 = 12$ சென்டிமீட்டர்.

அடிப்பக்கம் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ஆனதால் இந்த முக்கோணத்தின் ஒரு பக்க நீளத்தின் மூன்று மடங்கே சுற்றளவு. எனவே ஒரு பக்க நீளம் $12 \div 3 = 4$ சென்டிமீட்டர்.

கணக்கில் அறுகோணத்தின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவை இனி காணலாம் அல்லவா.




பக்கங்கள் அனைத்தும் 4 சென்டி மீட்டர் ஆன அறுகோணத்தின் சுற்றளவு $6 \times 4 = 24$ சென்டி மீட்டர். பட்டகத்தின் உயரம் 4 சென்டி மீட்டர் என்பதால், அதன் பக்க முகப்பரப்பளவு $24 \times 4 = 96$ சதுர சென்டி மீட்டர்

இனி, இரு அடிப்பக்கங்களின் பரப்பளவுகளைக் கூட்ட வேண்டும். ஒரு முக்கோண அடிபக்கத்தின் பரப்பளவு

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \text{ சதுர சென்டி மீட்டர்}$$

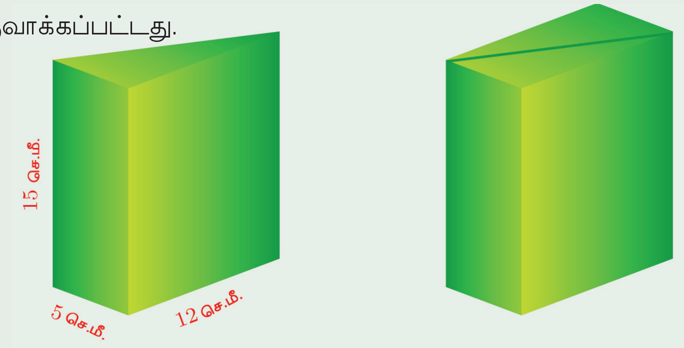
இவை ஆறும் சேர்ந்த அறுகோணத்தின் பரப்பளவு $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ சதுர சென்டி மீட்டர். அப்போது அறுகோணப்பட்டகத்தின் மேற்பரப்பை முழுமையாக எடுத்தால் பரப்பளவு

$$96 + \left(2 \times 24\sqrt{3}\right) = 96 + 48\sqrt{3} = 48\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ சதுர சென்டி மீட்டர்.}$$

$\sqrt{3}$ ஐ தோராயமாகச் சமமான தசம பின்ன எண்ணாக 1.73 எனக் கொண்டால், இது 179 சதுரசென்டிமீட்டரை விடச் சிறிது கூடுதல் என்று காணலாம். எவ்வாறாயினும் 180 சதுரசென்டிமீட்டர் காகிதம் போதுமானதாக இருக்கும்.

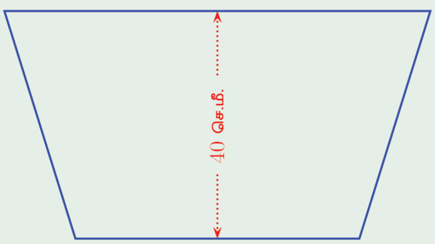
(1) ஒரு சமப்பக்க முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு 12 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 5 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். அதன் மொத்த மேற்பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

(2) படத்தில் உள்ளதைப் போன்று அடிப்பக்கம் செங்கோண முக்கோணம் ஆன இரு பட்டகங்களைச் சேர்த்து வைத்து ஒரு செவ்வகப்பட்டகம் உருவாக்கப்பட்டது.




இந்தச் செவ்வகப் பட்டகத்தின் மொத்த மேற்பரப்பளவு எவ்வளவு?

(3) பட்டக வடிவில் உள்ள ஒரு தண்ணீர்த்தொட்டியின் சரிவக முகங்களின் அளவுகள் படத்தில் உள்ளதுபோல் ஆகும்.




தண்ணீர்த்தொட்டியின் நீளம் 80 சென்டி மீட்டர் ஆகும். இதன் உள்ளேயும், வெளியேயும் வண்ணம் பூசுவதற்கு, சதுரமீட்டருக்கு ரூபாய் 100 வீதம் எனில் எவ்வளவு ரூபாய் தேவைப்படும்?

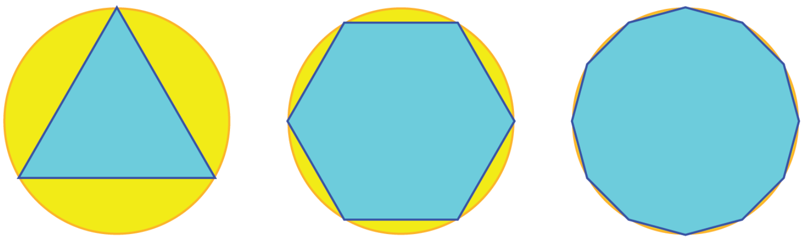
## உருளை

ஓரங்களில் சமமான பலகோணங்களும், பக்கங்களில் செவ்வகங்களும் உள்ள வடிவங்களே பலகோணப் பட்டகங்கள். ஓரங்களில் வட்டங்களும், பக்கங்களில் செவ்வகங்களும் ஆன மடியாத ஒழுகிப்போகுமாறு வளைந்த பட்டகங்களும் உள்ளன. கட்டியானதும், உள்ளீடற்றதுமான இத்தகைய ஏராளமான வடிவங்களைக் கண்டிருப்பீர்கள் அல்லவா:

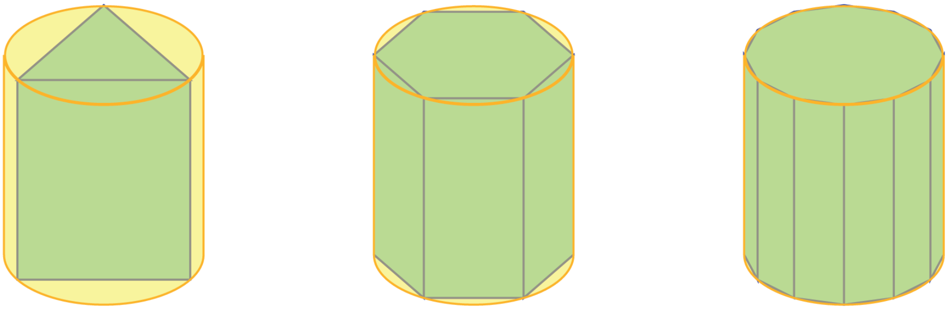
இத்தகைய கன வடிவங்களை உருளை (cylinder) என்று அழைக்கிறோம்.

உருளைகளின் கனஅளவு அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலனா?

வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட்டது, அதன் உள்ளே வரைகின்ற சமப்பக்க பலகோணங்களின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்து அல்லவா.



அப்போது பலகோணப் பட்டகங்களில் அடிப்பக்கத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடும்போது அவை உருளையுடன் மிகவும் நெருங்கும் அல்லவா.



உருளையின் உள்ளே பல்வேறு பலகோணப் பட்டகங்களின் அடிப்பக்கப் பரப்புகள் $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என்றும், உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு $c$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், $p_1$, $p_2$, $p_3, \ldots$ என்ற எண்கள் $c$ என்ற எண்ணின் அருகருகாய் வருகிறது. அனைத்துப்பட்டகங்களுக்கும் ஒரே உயரம் ஆகும். அதை $h$ எனக் கொண்டால், பலகோணப் பட்டகங்களின் கனஅளவு $p_1h$, $p_2h$, $p_3h$, ... என்று அமையும். இந்த எண்கள் $ch$ என்ற எண்ணின் அருகருகாய் வரும். படத்திலிருந்து, பலகோணப் பட்டகங்களின் கனஅளவு அருகருகாய் வருவது. உருனையின் கனஅளவை நோக்கியாகும். அவ்வாறு உருனையின் கனஅளவு $ch$ என்று கிடைக்கும்.

**உருளையின் கனஅளவு என்பது அடிப்பக்கப்பரப்பு, உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.**

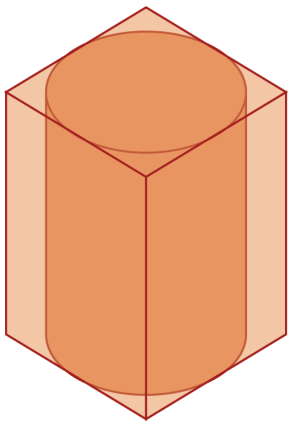
வட்டத்தின் பரப்பளவு, ஆரத்தின் வர்க்கத்தை $\pi$ ஆல் பெருக்கிக் கிடைப்பது அல்லவா. அப்போது ஓர் உருளையின் அடிப்பக்க ஆரம் 3 சென்டிமீட்டரும்,

உயரம் 5 சென்டிமீட்டரும் எனில் அதன் கனஅளவு $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ கனசென்டிமீட்டர்.

வேறொரு கணக்கு:

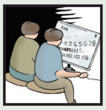
சதுரப்பட்டகத்தின் வடிவில் உள்ள ஒரு மரத்துண்டின் அடிப்பக்கத்தின் பக்கங்களுக்கு 10 சென்டி மீட்டர் நீளம் உள்ளது. பட்டகத்திற்கு 20 சென்டி மீட்டர், உயரம் உள்ளது. இதிலிருந்து வெட்டியெடுக்கக் கூடிய மிகப்பெரிய உருளையின் கனஅளவு எவ்வளவு?

சதுரப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கத்தில் வரைய இயலும் மிகப்பெரிய வட்டமே, மிகப்பெரிய உருளையின் அடிப்பக்கம்; உயரம் சதுரப்பட்டகத்திற்கு உரியதே:



அதாவது, உருளையின் அடிப்பக்க விட்டம், சதுரப்பட்டகத்தின் அடிப்பக்கத்தின் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமமாக வேண்டும்.

அப்போது அடிப்பக்க வட்டத்தின் ஆரம் 5 சென்டி மீட்டர் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு $25\pi$ சதுர சென்டிமீட்டர். அதன் உயரம் 20 சென்டிமீட்டர். ஆகவே கனஅளவு $25\pi \times 20 = 500\pi$ கனசென்டிமீட்டர்.



(1) இரும்பினால் உருவாக்கப்பட்ட ஓர் உருளையின் அடிப்பக்க ஆரம் 15 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 32 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். இதை உருக்கி, அடிப்பக்க ஆரம் 20 சென்டிமீட்டர் ஆன உருளையை உருவாக்கினால், இந்தப் பட்டகத்தின் உயரம் எவ்வளவு?

(2) ஒரே உயரம் உள்ள இரு உருளைகளின் அடிப்பக்க ஆரம் 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் ஆகும். இவற்றின் கனஅளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன?

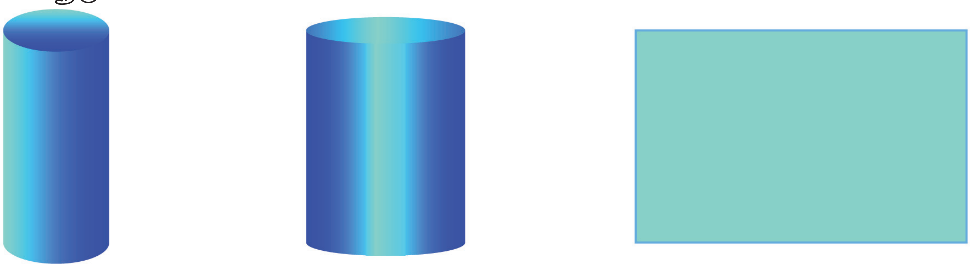
(3) இரு உருளைகளின் அடிப்பக்க ஆரம் 2 : 3 என்ற விகிதத்திலும், உயரம் 5:4 என்ற விகிதத்திலும் ஆகும்.

i) இவற்றின் கனஅளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன?

ii) முதல் உருளையின் கனஅளவு 720 கனசென்டிமீட்டர்; இரண்டாவது உருளையின் கனஅளவு எவ்வளவு?

## வளைதளப் பரப்பு

செவ்வக வடிவில் ஆன தகட்டையோ காகிதத்தையோ வளைத்து உருளையின் வடிவத்தில் குழல் உண்டாக்கலாம். மாறாக, உள்ளீடு இல்லாத இரு ஓரங்களும் திறந்த ஓர் உருளையை வெட்டி வளைந்த பாகத்தை விரித்தால் ஒரு செவ்வகம் ஆகும்:



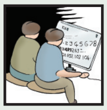
இந்தச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவையே உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவு (curved surface area) என்று கூறுகிறோம். சுருக்கமாக, வளைப்பரப்பு என்றும் கூறலாம்.

இந்தச் செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம், உருளையின் உயரமே ஆகும். அடுத்தப்பக்கம் அடிப்பக்க வட்டத்தை நிமிர்த்தி எடுத்ததாகும். அதாவது, அதன் நீளம் வட்டத்தின் சுற்றளவு ஆகும். இந்த நீளங்களின் பெருக்கற்பலனே வளைதளப்பரப்பளவு ஆகும்.

**உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவு, என்பது அடிப்பக்கச் சுற்றளவு, உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.**

வட்டத்தின் சுற்றளவு, விட்டத்தின் $\pi$ மடங்கு அல்லவா. அப்போது ஓர் உருளையின் அடிப்பக்க ஆரம் 3 சென்டிமீட்டரும் உயரம் 5 சென்டிமீட்டரும் எனில் அதன் வளைத்தளப்பரப்பளவு $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

இது மூடிய பட்டகம் எனில் மொத்தமேற்பரப்பளவு கிடைப்பதற்கு இரு முனைகளிலும் உள்ள வட்டங்களின் பரப்பளவைக் கூட்ட வேண்டும். அதாவது $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$ சதுர சென்டிமீட்டர்.



(1) ஒரு கிணறின் உள்பாகத்தின் விட்டம் 2.5 மீட்டர், ஆழம் 8மீட்டர் இதன் உள்பக்கத்தில் சிமெண்ட் பூசுவதற்குச் சதுரமீட்டருக்கு 350 ரூபாய் வீதம் எனில் எவ்வளவு ரூபாய் செலவாகும்?

(2) 1.20 மீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு ரோடு ரோலரின் விட்டம் 80 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.


இது ஒரு முறை சுற்றும்போது, சமன் செய்யும் இடத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

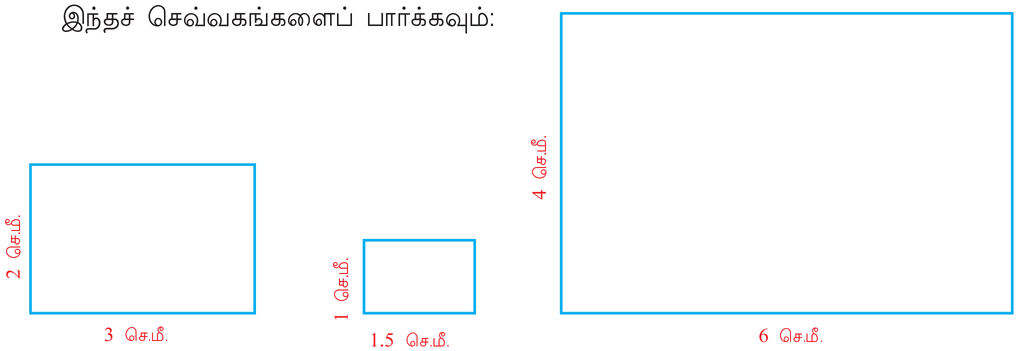
(3) ஓர் உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவும், அடிப்பக்கப் பரப்பளவும் சமமாகும். அடிப்பக்கத்தின் ஆரத்திற்கும் பட்டகத்தின் உயரத்திற்கும் இடையிலான தொடர்பு என்ன?

## மீள்பார்வை


| கற்றல் அடைவுகள் | என்னால் முடியும் | ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்பட வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • பலகோணப் பட்டகங்களின் கனஅளவுகளைக் கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல்.<br>• பலகோணப் பட்டகங்களின் மொத்தப் பரப்பளவைக் கணக்கிடுவதற்கு உரிய பல்வேறு வழிமுறைகளை விளக்குதல்.<br>• உருளையின் கனஅளவு, பரப்பளவு ஆகியன கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல்.<br>• பட்டகங்கள் உட்பட்ட நடைமுறைப் பிரச்சினை களுக்குத் தீர்வு காணுதல். | | | |

# 12 விகித சமம்

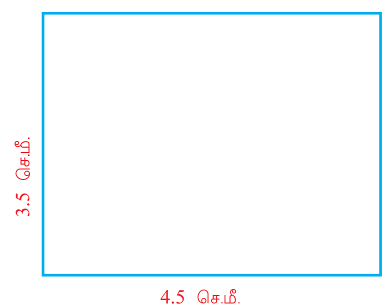
இந்தச் செவ்வகங்களைப் பார்க்கவும்:




எல்லா நீளங்களும் அகலங்களும் வேறுபட்டவையாகும். ஆனால் அதில் ஒரு கணக்கு உள்ளது அல்லவா? முதலில் உள்ள செவ்வகத்தின் நீளத்தின் பாதியே இரண்டாவது செவ்வகத்தின் நீளம். இரண்டு மடங்கு மூன்றாவது செவ்வகத்தில்; அகலங்களும் இதே போல் அல்லவா?

அதாவது இந்தச் செவ்வகங்களில் நீளமும் அகலமும் ஒரே அளவு விகிதத்தில் மாறுகிறது?

இனி இந்தச் செவ்வகத்தைப் பார்க்கவும்:




இதையும் இந்தத் தொகுப்பில் சேர்க்க இயலுமா?

முதல் செவ்வகத்தின் நீளத்தின் ஒன்றரை மடங்கே இதன் நீளம், அகலம் ஒன்றே முக்கால் மடங்கும். நீளமும் அகலமும் ஒரே அளவில் மாறாததால் இந்தச் செவ்வகம் இந்தத் தொகுப்பில் சேராது.

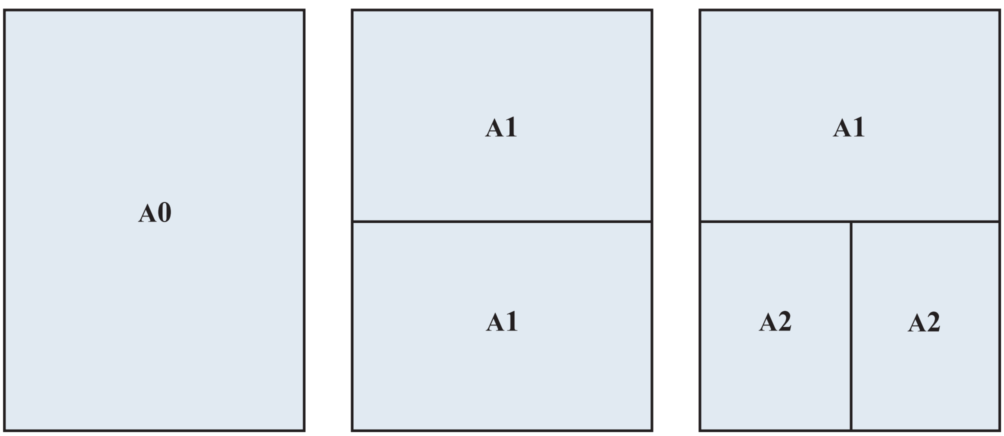
தொகுப்பிலுள்ள முதல் செவ்வகத்துடன் ஒத்துப் பார்த்து அல்லவா முடிவு எடுக்கப்பட்டது. அல்லாமலும் இதைக் காண இயலும். தொகுப்பில் எல்லாச் செவ்வகங்களின் நீளமும் அகலத்தின் ஒன்றரை மடங்கு அல்லவா? புதிய செவ்வகத்தில் அவ்வாறு இல்லை அல்லவா. வேறொரு முறையில் கூறினால், தொகுப்பில் உள்ள மூன்று செவ்வகங்களிலும் நீளத்திற்கும் அலகத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 2; புதிய செவ்வகத்தில் இது 9 : 7. இந்த விகிதங்கள் சமமல்ல.

விகிதங்களின் சமத்தைப் பொதுவாக விகிதசமம் (proportion) என்று கூறுகிறோம். இதன் அடிப்படையில் முதலில் வரைந்த மூன்று செவ்வகங்களிலும் நீளமும் அகலமும் விகிதசமம் (proportional) எனக் கூறலாம்.

நீளமும் அகலமும் விகித சமமான செவ்வகங்கள் பல சூழல்களிலும் தேவையாக உள்ளன. பல அளவுகளில் தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை உருவாக்குகிறோம். எனினும் எல்லாவற்றிலும் நீளத்திற்கும் அகலத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 16 : 9 என இருக்கும் என்றும், ஒவ்வொரு நாட்டின் கொடியின் நீளமும் அகலமும் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் அமையும் என்றும் ஏழாம் வகுப்பில் நாம் கண்டது நினைவில் உள்ளதா?

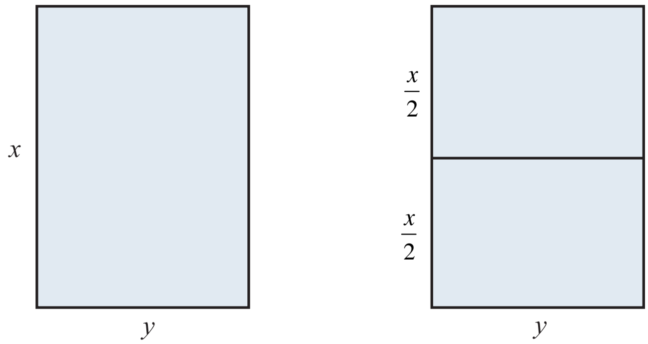
விகிதசமத்தைப் பயன்படுத்தும் வேறொரு சூழலை நாம் பார்ப்போம். எழுதுவதற்கும் பிறவற்றுக்கும் நாம் பயன்படுத்துவது A4 காகிதம் அல்லவா. A0, A1, A2, ... என்ற பல அளவுகளில் காகிதங்கள் உள்ளன. இதன் கணக்கு என்ன?

A0 காகிதத்தின் பாதியே. A1 காகிதம் அதன் பாதியே A2 என்ற முறையில் அளவு குறைகிறது;




வேறொன்றும் உண்டு. இந்தச் செவ்வகங்களின் பக்கங்களின் நீளங்கள் விகித சமத்தில் அமைய வேண்டும்.

அது எவ்வாறு இயலும் என்று பார்ப்போம். அதற்கு இந்தத் தொகுப்பில் ஏதேனும் ஒரு காகிதத்தை, எடுத்துக்காட்டாக, A1 ஐ எடுக்கலாம். இதன் பெரிய பக்கத்தின் நீளம் $x$ என்றும், சிறிய பக்கத்தின் நீளம் $y$ என்றும் எடுக்கலாம்.




பாதியாக வெட்டிய செவ்வகத்தின் பெரிய பக்கத்தின் நீளம் $y$ உம், சிறிய பக்கத்தின் நீளம் $\frac{x}{2}$ உம் அல்லவா. இரு செவ்வகங்களிலும் பக்கங்கள் விகிதசமம் ஆக வேண்டுமெனில், $x$ ஐ $y$ ஆல் வகுத்தாலும் $y$ ஐ $\frac{x}{2}$ ஆல் வகுத்தாலும் ஒரே எண் கிடைக்க வேண்டும். $\frac{x}{2}$ ஆல் உள்ள வகுத்தல் என்பதால், $\frac{2}{x}$ ஆல் உள்ள பெருக்கல், அதாவது

$$y \div \frac{x}{2} = y \times \frac{2}{x} = \frac{2y}{x}$$

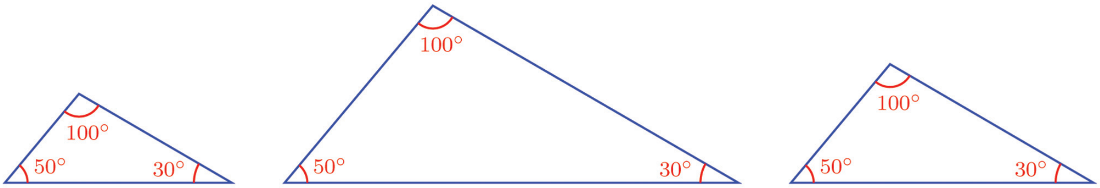
அப்போது பக்கங்கள் விகிதசமம் ஆவதற்கு உரிய சமன்பாடு

$$\frac{x}{y} = \frac{2y}{x}$$

இதிலிருந்து $x^2 = 2y^2$ என்றும் தொடர்ந்து $x = \sqrt{2}\,y$ என்றும் கிடைக்கும்.

அதாவது, A0, A1, A2 . . . என்ற காகிதங்களில் எல்லாம் பெரிய பக்கம் சிறிய பக்கத்தின் $\sqrt{2}$ மடங்கு ஆகும்.

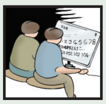
இரண்டிற்கு மேற்பட்ட அளவுகளிலும் விகிதசமம் என்ற கருத்தைக் கூறலாம். இந்த முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும்.




ஒரே கோணங்கள் ஆனதால் முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் மாறுவது ஒரே அளவு விகிதத்திலாகும். அதாவது இவற்றில் எந்த ஜோடி முக்கோணங்களை எடுத்தாலும் அவற்றில் ஒன்றின் பக்கங்களின் நீளத்தை ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதே மற்ற முக்கோணத்தில் உள்ள பக்கங்களின் நீளம் (**முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை** என்ற பாடம்) வேறொரு முறையில் கூறினால் இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதமே மற்ற எல்லா முக்கோணங்களின் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் ஆகும். புதிய முறையில் கூறினால், இந்த முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் விகிதசமம் ஆகும். பிற அறிவியல்களிலும் இத்தகைய விகிதசமத் தொடர்புகள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

வேதியியலின் குறிப்பிட்ட விகித சமக் கோட்பாட்டுக்கு ஏற்ப எந்தக் கூட்டுப் பொருளிலும் தனிமங்களின் எடை விகித சமமாகும். எடுத்துக்காட்டாக தண்ணீரில் ஆக்ஸிஜன், ஹைட்ரஜன் என்பவற்றின் எடை 8 : 1 என்ற விகிதத்திலாகும். மேலும் சரியாகக் கூறினால் 100 கிராம் தண்ணீரில் சுமார் 88.8 கிராம் ஆக்ஸிஜனும், 11.2 கிராம் ஹைட்ரஜனுமாகும். (ஒரு கிலோகிராம் தண்ணீரிலோ?)

?



(1) ஒருவர் 10000 ரூபாயையும், 15000 ரூபாயையும் இரு திட்டங்களில் முதலீடு செய்தார். ஓர் ஆண்டுக்குப் பின்னர் முதல் தொகைக்கு 900 ரூபாயும், இரண்டாவது தொகைக்கு 1200 ரூபாயும் வட்டி கிடைத்தது.

- i) முதலீடு செய்த தொகையின் விகித சமத்தில் வட்டி கிடைத்ததா?
- ii) முதல் திட்ட முதலீட்டிற்கும், வட்டிக்கும் இடையே உள்ள விகிதம் என்ன? இரண்டாவது திட்டத்தில்?
- iii) முதல் திட்டத்தில் வட்டி விகிதம் எத்தனை சதவீதம்? இரண்டாவது திட்டத்தில்?

(2) A0 காகிதத்தின் பரப்புளவு ஒரு சதுரமீட்டராகும். A4 காகிதத்தின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாகக் கணிப்பானைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுக.

(3) கால்சியம் கார்பனேட்டில் கால்சியம், கார்பன் ஆக்ஸிஜன் ஆகியவற்றின் எடை 10 : 3 : 12 என்ற விகிதத்திலாகும். ஒரு கூட்டுப் பொருளின் 150 கிராமைச் சோதித்துப் பார்த்து அதில் 60 கிராம் கால்சியமும், 20 கிராம் கார்பனும், 70 கிராம் ஆக்ஸிஜனும் இருக்கிறது எனக் கணக்கிடப்பட்டது. இது கால்சியம் கார்பனேட்டா?

## விகிதசம மாறிலி

ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்கள் அனைத்தையும் இரு மடங்காகப் பெரியதாக ஆக்கினால் சுற்றளவு எத்தனை மடங்காகும்?

முதலில் சதுரத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் 1 சென்டிமீட்டராக இருந்திருந்தால், இப்போது பக்கங்கள் எல்லாம் 2 சென்டிமீட்டராகும். முதலில் சுற்றளவு 4 சென்டிமீட்டராக இருந்தது. இப்போது 8 சென்டிமீட்டர் ஆயிற்று. சுற்றளவு இரு மடங்கு ஆயிற்று.

எந்தச் சதுரத்திலும் இது சரியாகுமா?

பொதுவாக எண் தொடர்பு சரியாக உள்ளதா எனப் பார்ப்பதற்கு உரிய நல்ல ஒரு வழிமுறையே இயற்கணிதம். முதலில் அனைத்துப் பக்கங்களின் நீளம் $x$ சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், சுற்றளவு $4x$ சென்டிமீட்டர். பக்கங்கள் அனைத்தும் இரு மடங்கு ஆன போது, சுற்றளவு $4 \times 2x = 8x$ சென்டிமீட்டர். அதாவது சுற்றளவும் இரு மடங்கு ஆயிற்று. பக்கங்கள் அனைத்தையும் பாதியாக ஆக்கினால்? ஒன்றரை மடங்கு ஆக்கினால்?

பொதுவாகக் கூறினால் சதுரத்தின் பக்கத்தின் அளவும், சுற்றளவும் ஒரே அளவு விகிதத்தில்தான் மாறுகிறது. வேறொரு முறையில் கூறினால் சதுரத்தின் பக்க அளவை எவ்வாறு மாற்றினாலும், பக்கத்தின் அளவிற்கும் சுற்றளவிற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் மாறுவதில்லை.

இங்குச் சதுரத்தின் பக்கத்தின் அளவின் விகிதசமத்திலேயே சுற்றளவு மாறுகிறது எனக் கூறலாம். அப்போது சதுரத்தின் பக்கத்தின் அளவிற்கும் சுற்றளவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைப் பலமுறைகளில் கூறலாம்.

- எந்தச் சதுரத்திலும் பக்கத்தின் அளவின் 4 மடங்கே சுற்றளவு.
- எந்தச் சதுரத்திலும் பக்கத்தின் அளவிற்கும், சுற்றளவிற்கும் இடையிலுள்ள விகிதம் 1 : 4 ஆகும்.
- சதுரத்தின் பக்கமும் சுற்றளவும் ஒரே அளவில் மாறுகிறது.
- சதுரத்தின் பக்கத்தின் அளவின் விகிதசமத்திலேயே சுற்றளவு மாறுகிறது.

எந்த ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் அதன் பக்க அளவின் $\sqrt{2}$ மடங்காகும் என்று **புதிய எண்கள்** என்ற பாடத்தில் கண்டோம் அல்லவா. இதை மேற்கூறியவாறு எவ்வாறெல்லாம் கூறலாம்?

Dilate from Point ஐப் பயன்படுத்தி வடிவொத்த உருவங்களை வரைவதை **முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை** என்ற பாடத்தில் கண்டோம் அல்லவா. ஒரு பலகோணத்தின் வடிவொத்த உருவம் வரையவும். இவற்றின் பக்கங்களின் நீளம், சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவைக் குறிக்கவும். ஸ்லைடரை நீக்கி கீழே உள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி அளவுகளிலும் முதலாவதன் விகித சமத்திலா இரண்டாவது மாறுகிறது என்று கண்டு பிடிக்கவும்.

(i) பக்கத்தின் நீளமும் சுற்றளவும்
(ii) பக்கத்தின் நீளமும் பரப்பளவும்
(iii) சுற்றளவும் பரப்பளவும்

இனி சதுரத்தின் சுற்றளவுகளுக்குப் பதிலாகப் பரப்புளவுகளை எடுத்துக் கொண்டால், பக்கங்களின் நீளம் 1 சென்டிமீட்டர் உடைய சதுரத்தின் பரப்பளவு 1 சதுர சென்டி மீட்டராகும். பக்கங்களின் அளவை இரு மடங்கு ஆக்கினால் பரப்பளவு 4 சதுர சென்டிமீட்டர். அப்போது பக்கத்தின் அளவும் பரப்பளவும் ஒரே அளவு வீதத்தில் மாறுவதில்லை. ஆகவே அவை விகிதசமத்தில் அல்ல.

இயற்பியலில் இருந்து ஓர் எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம். ஒரு நேர்கோடு வழியாக 10 மீட்டர்/வினாடி வேகத்தில் நகர்கின்ற பொருள், 1 வினாடியில் 10 மீட்டரும், 2 வினாடிகளில் 20 மீட்டரும், $\frac{1}{2}$ வினாடியில் 5 மீட்டரும் நகர்கிறது.

பொதுவாகக் கூறினால், $x$ வினாடியில் $10x$ மீட்டர் நகர்கிறது. அதாவது நேரத்தின் 10 மடங்கு என்ற அளவு வீதத்தில் தூரம் மாறுகிறது. ஆகவே நேரத்திற்கும், தூரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 1 : 10 ஆகும். தூரம் நேரத்திற்கு விகிதசமம் ஆகும்.

இனி வேகம் எப்போதும் மாறுகிறது எனில்? எடுத்துக்காட்டாக, மேலிருந்து பூமியைநோக்கி வீழ்கின்ற ஒரு பொருளின் வேகம் ஒவ்வொரு நேரத்திலும் மாறுகிறது; $x$ வினாடியில் நகர்வது $4.9x^2$ மீட்டராகும். அப்போது ஒரு வினாடியில் 4.9 மீட்டரும் இரு வினாடிகளில் 19.6 மீட்டரும் பயணிக்கிறது. அதாவது, இந்தப் பயணத்தில் நேரமும் தூரமும் ஒரே அளவு விகிதத்தில் அல்ல மாறுகிறது. அவற்றின் விகிதம் ஒவ்வொரு நேரமும் மாறுகிறது. அவை விகிதசமம் அல்ல.

இந்தப் பயணத்திலேயே, $x$ வினாடியில் வேகம் $y$ மீட்டர்/ வினாடி என எடுத்தால், நேர- வேகச் சமன்பாடு $y = 9.8\,x$ என உருவாகிறது. நேரத்தின் விகித சமத்திலா வேகம் மாறுகிறது?

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளை ஒன்றாகப் பார்ப்போம்.

| சூழல் | அளவுகள் | | சமன்பாடு | விகிதசமம் |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | | |
| சதுரம் | பக்கம் | சுற்றளவு | $y = 4x$ | ஆம் |
| | பக்கம் | மூலைவிட்டம் | $y = \sqrt{2}x$ | ஆம் |
| | பக்கம் | பரப்பளவு | $y = x^2$ | அல்ல |
| பயணம் ஒரே வேகம் | நேரம் | தூரம் | $y = 10x$ | ஆம் |
| பயணம் மாறுகின்ற வேகம் | நேரம் | தூரம் | $y = 4.9\,x^2$ | அல்ல |
| | நேரம் | வேகம் | $y = 9.8x$ | ஆம் |

இவற்றில் நாம் காண்பது என்ன? ஓர் அளவு மாறும்போது அதனுடன் தொடர்புடைய அளவுகள் எல்லாம் அதற்கு ஏற்ப மாறுகின்றது. சுதந்திரமாக மாறுகின்ற அளவின் குறிப்பிட்ட மடங்காகவோ பாகமாகவோ தொடர்புள்ள ஓர் அளவு மாறுகிறது எனில் இந்த அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் மாறுவதில்லை. அதாவது மாற்றம் விகித சமத்தில் ஆகும்.

இதை இயற்கணித முறையில் கூறலாம். சுதந்திரமாக மாறுகின்ற அளவை $x$ என்றும், அத்துடன் தொடர்புள்ள அளவை $y$ என்றும் எடுக்கலாம். எந்தச் சூழலிலும் $x$ என்ற அளவை $k$ என்ற குறிப்பிட்ட எண்ணால் ( $x$ மாறினாலும் மாறாத எண்) பெருக்கிக் கிடைப்பதே $y$ எனில், இந்த அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு

$$y = kx$$

என்றும் எழுதலாம். இதையே

ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு Angle slider $\alpha$ உருவாக்கவும். ஒரு கோடு AB வரைந்து, அதனுடன் $\alpha$ கோணஅளவில் சரிந்து நிற்குமாறு வேறு ஒரு கோடு AB$'$ வரையவும். இந்தக் கோட்டில் ஒரு புள்ளி C ஐ அடையாளப் படுத்தி அதிலிருந்து AB க்குச் செங்குத்துக் கோடு வரையவும். செங்குத்துக் கோடும் AB உம் சந்திக்கின்ற புள்ளியை D என அடையாளப்படுத்தவும். இனி செங்குத்துக் கோட்டை மறைத்து வைக்கலாம். CA, CD என்ற கோடுகள் வரைந்து நீளத்தை அடையாளப்படுத்தவும். C இன் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். CA, CD என்ற நீளங்கள் விகித சமத்திலா மாறுகிறது? $30^\circ$, $45^\circ$, $60^\circ$ எனும் கோண அளவுகளில் விகிதசம மாறிலியைக் கணக்கிடுக.

$$\frac{y}{x} = k$$

அப்போது இந்த அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $1 : k$ என்ற அளவில் மாறாமல் இருக்கிறது எனக் காணலாம். அதாவது, $x$ இன் விகிதசமத்திலேயே $y$ மாறுகிறது.

விகித சம மாற்றத்தின் சமன்பாட்டிலுள்ள குறிப்பிட்ட எண்ணை விகித சம மாறிலி (proportionality constant) என்று கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, பூமியை நோக்கி வீழ்கின்ற பொருளின் நேரம் - வேகச் சமன்பாட்டில் விகித சம மாறிலி 9.8 ஆகும். பூமியின் புவியீர்ப்பு விசையினால் ஏற்படும் முடுக்கம் (accelaration due to gravity) என்பதே இந்த எண்ணின் இயற்பியல் விளக்கம்.

இதைப்போன்று ஒரே பொருளால் உருவாக்கப்பட்ட பொருட்கள் எல்லாவற்றிற்கும் நிறை (mass), கனஅளவிற்கு விகிதசமத்தில் ஆகும். இதன் விகிதசம மாறிலியே பொருளின் அடர்த்தி (density). இரும்பின் அடர்த்தி 7.87; செம்பின் அடர்த்தி 8.96. அதாவது, இரும்பினால் உருவாக்கப்பட்ட ஒரு பொருளின் நிறை, கனஅளவின் 7.87 மடங்கும், செம்பினால் உருவாக்கப்பட்ட ஒரு பொருளின் நிறை கனஅளவின் 8.96 மடங்காகும்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி அளவுகளிலும், முதலில் தரப்பட்டுள்ளதன் விகிதசமத்தில் தானா இரண்டாவது மாறுகிறது என்று கண்டுபிடிக்கவும்.
விகிதசமத்தில் உள்ளவற்றில் விகித சம மாறிலியைக் கணக்கிடுக.

i) வட்டங்களின் ஆரமும், சுற்றளவும்

ii) வட்டங்களின் ஆரமும், பரப்பளவும்

iii) ஒரு நேர்கோட்டில் உருள்கின்ற ஒரு வளையத்தின் சுற்றுகளின் எண்ணிக்கையும், பயணித்துள்ள தூரமும்.

iv) ஆண்டுக்கணக்கில் வட்டி கணக்கிடுகின்ற திட்டத்தில் சேமிக்கப் பட்ட தொகையும், ஓர் ஆண்டு வட்டியும்.

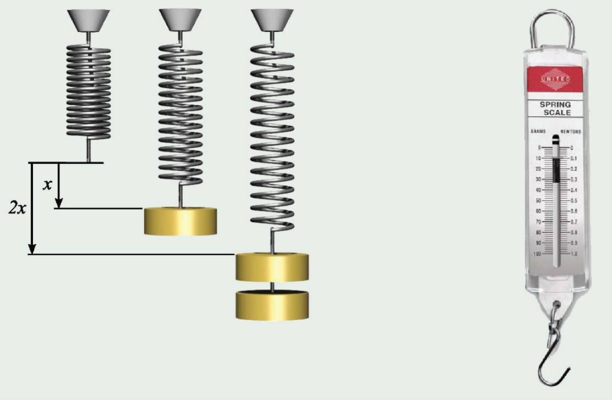
v) பட்டக வடிவில் உள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் ஊற்றப்படுகின்ற தண்ணீரின் கனஅளவும், பாத்திரத்தில் உள்ள தண்ணீரின் உயரமும்.

(2) மழை பெய்யும் போது ஒவ்வொரு சதுரமீட்டரிலும் வீழ்கின்ற தண்ணீரின் கனஅளவு சமமாகும் எனக்கொள்வோம். இதற்கு ஏற்ப,

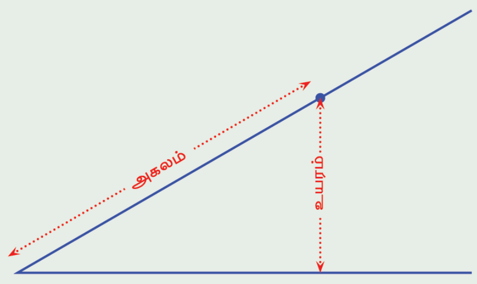
i) ஓர் இடத்தில் வீழ்கின்ற தண்ணீரின் கனஅளவு அந்தந்த இடத்தின் பரப்பளவின் விகிதசமத்திலாகும் என நிறுவுக.

ii) அடுத்தடுத்து வைக்கப்படுகின்ற பட்டக வடிவில் உள்ள பாத்திரங்களில் மழை தண்ணீர் ஒரே உயரத்தில் நிறைகிறது. எதனால்? விளக்குக.

(3) ஒரு வில் தராசில் எடையைத் தூக்கும் போது அதன் நீளத்தில் உண்டாகின்ற மாற்றம் எடைக்கு விகித சமத்தில் ஆகும். வில் தராசில் எடைகளை அடையாளப்படுத்துவதற்கு இதை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என விளக்குக.




(4) கீழே வரையப்பட்டுள்ள கோணத்தில் சரிந்த கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் அனைத்தையும் எடுத்தால், கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து தூரம் மாறுவதற்கு ஏற்ப, கீழே உள்ள கோட்டிலிருந்துள்ள உயரமும் மாறும்.




i) உயரம் மாறுவது தூரத்தின் விகிதசமத்திலாகும் என நிறுவுக.

ii) $30^\circ$, $45^\circ$, $60^\circ$ கோணங்களில் இந்த விகிதசம மாறிலியைக் கணக்கிடுக.

## விகித சமம் பலவிதம்

ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்கும், அதன் உட்கோணங்களின் தொகைக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு பற்றி எட்டாம் வகுப்பில் கண்டோம். இந்தத் தொடர்பு விகிதசமமா?

முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் தொகை $180^\circ$; அறுகோணத்தின் உட்கோணங்களின் தொகை $720^\circ$. பக்கங்களின் எண்ணிக்கை இரு மடங்கு ஆகும்போது கோணங்களின் தொகை இரு மடங்கை விட அதிகமாயிற்று. ஆகவே இந்தத் தொடர்பு விகிதசமம் அல்ல.

பக்கங்களின் எண்ணிக்கையிலிருந்து 2 ஐக் கழித்து, கிடைத்த எண் கொண்டு $180^{o}$ ஐப் பெருக்கிக் கிடைப்பதே, உட்கோணங்களின் தொகை என அறியலாம். அதாவது, பக்கங்களின் எண்ணிக்கை $n$ என்றும் கோணங்களின் தொகை $s^{o}$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$s = 180\ (n - 2)$$

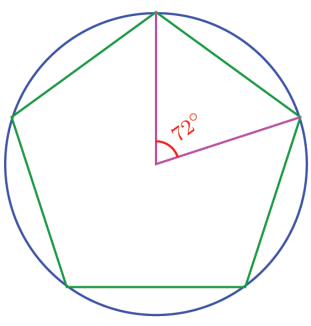
இதில் $n - 2$ என்ற எண்ணை $m$ என்று எழுதினால்?
சமன்பாடு

$$s = 180\ m$$

என்றாகும். அப்போது $s$ என்ற அளவு, $m$ என்ற அளவிற்கு விகிதசமம் ஆகும். சாதாரணமாகக் கூறினால், பல கோணங்களின் உட்கோணங்களின் தொகை, பக்கங்களின் எண்ணிக்கையிலிருந்து இரண்டைக் கழித்துக் கிடைத்த எண்ணிற்கு விகிதசமத்திலாகும்.

இவ்வாறு ஓர் அளவுடன் மற்றொரு அளவு விகிதசமத்தில் அல்ல எனினும் முதல் அளவைச் சிறிது மாற்றியதுடன் விகித சமத்தில் ஆகின்ற பல சூழல்கள் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, வட்டத்தின் பரப்பளவு, ஆரத்தின் வர்க்கத்தின் குறிப்பிட்ட ($\pi$ கொண்டு) பெருக்கற்பலன் ஆனதால் பரப்பளவு ஆரத்திற்கு விகிதசமத்தில் அல்ல. ஆனால் ஆரத்தின் வர்க்கத்துடன் விகிதசமமாகும். இதைப்போன்று உயரத்திலிருந்து, கீழே வீழ்கின்ற பொருள் பயணிக்கின்ற தூரமும், நேரமும் விகிதசமத்தில் அல்ல எனினும் நேரத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமமாகும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம். எந்த ஒழுங்கு பலகோணத்திலும் எல்லா உச்சிகள் வழியாகவும் கடந்து செல்கின்ற ஒரு வட்டம் வரைய இயலும் அல்லவா. அடுத்தடுத்து உள்ள உச்சிகள் இந்த வட்டத்தின் மையத்தில் உருவாக்குகின்ற கோணத்தின் கணக்கு என்ன?



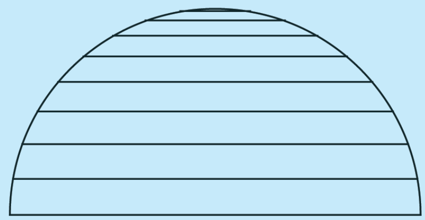

$x$ பக்கங்கள் உள்ள சமப்பக்க பல கோணத்தின் இந்த மையக் கோணம் $y^{o}$ என எடுத்தால், இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$y = \frac{360}{x} \qquad y = 360 \times \frac{1}{x}$$

அதாவது, இங்கு $x$ இன் தலைகீழியின் விகிதசமத்தில் தான் $y$ மாறுகிறது. இவ்வாறு ஓர் அளவின் தலைகீழிக்கு விகித சமத்தில் வேறொரு அளவு மாறுகின்ற சூழல்கள் இயற்பியலில் உள்ளன.

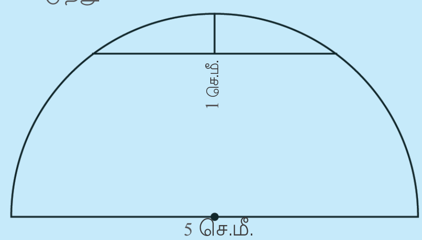
**விகித சமப் பிரச்சனை**

படத்தில் ஓர் அரைவட்டத்தில் ஏராளமான நாண்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.



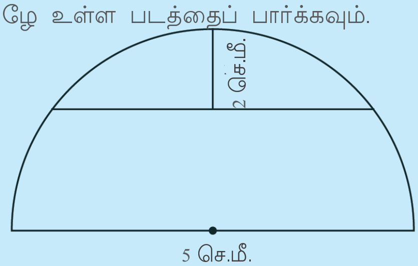
மேலிருந்துள்ள தூரம் கூடுந்தோறும், நாணின் நீளமும் கூடுகிறது அல்லவா. இந்த மாற்றம் விகித சமத்திலா?

ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.




மேலே உள்ள படத்தில் நாணின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டராகும் எனக் கண்டு பிடிக்கலாம் அல்லவா. (செய்து பார்க்கவும்)

கீழே உள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.

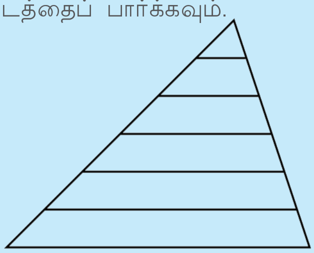



இப்போது நாணின் நீளம் 8 சென்டி மீட்டர் ஆயிற்று.

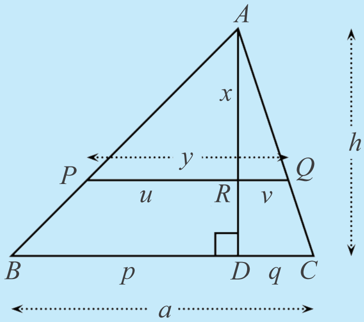
மேலிருந்துள்ள தூரம் இருமடங்கு ஆன போது அல்ல நாணின் நீளம் இருமடங்கு ஆனது. அப்போது இந்த மாற்றம் விகித சமம் அல்ல.

### உயரமும் அகலமும்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக பல கோடுகள் வரையப் பட்டுள்ளன. மேலே உள்ள உச்சியிலிருந்து தூரம் அதிகரிக்கும்போது இந்த இணை கோடுகளின் நீளமும் அதிகரிக்கின்றன அல்லவா. இது விகித சமம் ஆகுமா?




$\Delta APR$, $\Delta ABD$ ஆகியவை வடிவொத்தவை ஆனதால்,

$$\frac{u}{p} = \frac{x}{h}$$

$\Delta AQR$, $\Delta ACD$ ஆகியவை வடிவொத்தவை ஆனதால்

$$\frac{v}{q} = \frac{x}{h}$$

இதிலிருந்து

$$\frac{u}{x} = \frac{p}{h}, \quad \frac{v}{x} = \frac{q}{h}$$

அப்போது

$$\frac{y}{x} = \frac{u+v}{x} = \frac{p+q}{h} = \frac{a}{h}$$

மாறுபட்ட இணைகோடுகளுக்கு $x, y$ என்பன மாறுபடும்; $a$, $h$ என்பவை மாறாது அல்லவா, $x$, $y$ என்பவற்றிற்கு இடையே உள்ள விகிதம் மாறாது.

இத்தகைய மாற்றங்களை எதிர் விகிதசமம் (inverse proportion) என்று கூறுகிறோம். அதாவது $x$ என்ற அளவு மாறுவதற்கு ஏற்ப $y$ என்ற அளவு மாறுகின்ற சமன்பாடு $y = \frac{k}{x}$ என்ற வடிவில் எனில், $x$ க்கு எதிர் விகித சமத்தில் $y$ மாறுகிறது எனக் கூறுகிறோம் (இங்கும் $x$ மாறுவதற்கு ஏற்ப மாறாத எண்ணே $k$).

இத்தகைய மாற்றத்துடன் பிரித்துக் கூறுவதற்கு உரிய வசதிக்காக, $y = kx$ என்ற வடிவில் மாற்றத்தை நேர்விகித சமம் (direct proportion) என்றும் கூறுவது உண்டு.

எதிர் விகிதசமத்தில் உள்ள மாற்றத்தின் வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம். ஒரு புள்ளியிலிருந்து 100 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளியை நோக்கி நேர்கோட்டிலேயே ஒரே வேகத்தில் பயணிக்கின்ற ஒரு பொருளைக் கற்பனை செய்யவும். பயணம் செய்கின்ற வேகம் 10 மீட்டர்/ வினாடி எனில், இரண்டாவது புள்ளியை அடைய 10 வினாடிகள் தேவை. வேகத்தை அதிகரித்து 25 மீட்டர்/ வினாடி ஆக்கினால், 4 வினாடிகள் போதும். பொதுவாக வேகம் $x$ மீட்டர்/வினாடி என்றும், இலக்கினை அடைவதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $y$ வினாடி என்றும் எடுத்துக் கொண்டால், இவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பு இவ்வாறாகும்.

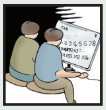
$$y = \frac{100}{x}$$

அதாவது, $x$ க்கு எதிர்விகித சமத்தில் $y$ மாறுகிறது. இயற்பியலின் பல விதிகளும் விகித சமத்தின் மொழியிலேயே கூறப்படுகின்றன. அவற்றில் மிக முக்கியமானது நியூட்டனின் புவியீர்ப்பு விதி (law of universal gravitation) ஆகும்.

வளிமண்டலத்தில் எந்த இரு பொருட்களும் ஒன்றையொன்று ஈர்க்கின்றன. இந்த ஈர்ப்பு விசையின் வலிமை, அவற்றின் நிறைகளின் பெருக்கற்பலனுக்கு நேர்விகித சமத்திலும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு எதிர்விகித சமத்திலும் ஆகும்.

இரு பொருட்களின் நிறையை $m_1$, $m_2$ என்றும் அவற்றின் இடையே உள்ள தூரத்தை $r$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், இந்த விதியின் இயற்கணித வடிவத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



(1) i) சமப்பக்க முக்கோணங்களின் பரப்பளவு பக்கத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகித சமத்திலாகும் என நிறுவுக. விகித சம மாறிலி என்ன?

ii) சதுரங்களின் பரப்பளவு, பக்கங்களின் வர்க்கத்திற்கு விகித சமத்தில் ஆகுமா? ஆகுமெனில் விகித சம மாறிலி என்ன?

(2) பரப்பளவு ஒரு சென்டிமீட்டர் உடைய செவ்வகங்களில், ஒரு பக்கத்தின் நீளம் மாறுவதற்கு ஏற்ப அடுத்தப் பக்கத்தின் நீளமும் மாற வேண்டும். இந்தத் தொடர்பை இயற்கணித வாக்கியமாக எழுதவும். விகித சமத்தின் மொழியில் இதை எவ்வாறு கூறலாம்?

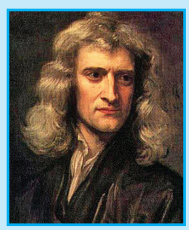
(3) ஒரே பரப்பளவு உள்ள முக்கோணங்களில் மிகப்பெரிய பக்கத்தின் நீளத்திற்கும் அதன் எதிர் உச்சியிலிருந்துள்ள செங்குத்துக்கோட்டின் நீளத்திற்கும் உள்ள தொடர்பை விகித சமமாக எவ்வாறு கூறலாம்? மிகப்பெரிய பக்கத்திற்குப் பதிலாக மிகச் சிறிய பக்கம் எடுத்தாலோ?

(4) ஒழுங்கு பல கோணங்களில், பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் ஒரு வெளிக்கோணத்தின் அளவுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பின் சமன்பாடு என்ன? இந்தத் தொடர்பை விகித சமமாகக் கூற இயலுமா?

(5) செவ்வகப் பட்டக வடிவத்தில் உள்ள ஒரு தண்ணீர்த்தொட்டியில், ஒவ்வொரு வினாடியிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட கனஅளவு உள்ள தண்ணீர் ஒரு குழாய் வழியே ஊற்றப்படுகிறது. வேறுபட்ட அளவுகள் உள்ள குழாய்களைப் பயன்படுத்தி, தண்ணீர் ஊற்றுவதன் அளவை மாற்றலாம். கீழே தரப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகளை இயற்கணிதச் சமன்பாடாகவும், விகித சமமாகவும் எழுதுக.

### நியூட்டன்

இயற்கை விதிகளை விளக்க வேண்டியது கணிதம் வாயிலாகவே என்ற கருத்தை முதலில் வெளியிட்டவர் பதினாறாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த கலிலியோ ஆவார். இச் சிந்தனையின் மிக உயர்ந்த வெளியீடே 17ஆம் நூற்றாண்டில் நியூட்டன் வெளியிட்ட இயற்கைத் தத்துவங்களின் கணித விதிகள் (Philosophia Naturalis Principia Mathematica) என்ற நூல். இயக்கத்தின் கணித விதிகளையும் புவியீர்ப்பு விதியையும் இதன் வாயிலாகவே நியூட்டன் வெளியிட்டார். இதற்காகச் சில புதிய கணித முறைகளையே அவர் கண்டுபிடித்தார். இந்த முறைகள் பின்னர் நுண்கணிதம் (calculus) என ஒரு கணிதப் பிரிவாக வளர்ந்தது.



## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | என்னால் முடியும் | ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்பட வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • ஒன்றோடொன்றுடன் தொடர்புள்ள அளவுகளுக்கு உண்டாகின்ற மாற்றங்களில், விகிதசம மாற்றங் களைப் பகுத்தறிதல்.<br>• விகித சம மாற்றங்களில் விகிதசம மாறிலியின் முக்கியத்துவத்தை நிறுவுதல்.<br>• பிற அறிவியல்களின் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதசம மாற்றங்களைக் கண்டுபிடிக்க இயலுதல்.<br>• விகிதசமமாக மாறுகின்ற அளவுகளையும் எதிர் விகிதசமமாக மாறுகின்ற அளவுகளையும் பகுத்தறிதல். | | | |

# 13 புள்ளி விபரக்கணக்கு

## சராசரி

ஆறாம் வகுப்பில் சராசரியைப் பற்றிக் கற்றது நினைவில் உள்ளதா? ஒரு சராசரி கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்கின்ற ஐந்து நண்பர்களின் தினசரி வருமானம் தரப்பட்டுள்ளது:

350 ரூபாய், 400 ரூபாய், 350 ரூபாய், 450 ரூபாய், 450 ரூபாய்,

இவற்றில் ஒருவரின் சராசரி தினசரி வருமானம் எவ்வளவு ரூபாய்?

ஐந்து நண்பர்களின், ஒரு நாளைய மொத்த வருமானத்தை ஐந்தால் வகுக்க வேண்டும். அதில் 350, 450 என்ற எண்கள் இரு முறை உள்ளன எனில் கூட்டுவதைச் சிறிது எளிதாக்கலாம்:

$$(2 \times 350) + (2 \times 450) + 400 = 2000$$

சராசரி 400 ரூபாய்.

ஒவ்வொருவரின் வருமானத்தை வெவ்வேறாகக் கூறாமல் சராசரி தினசரி வருமானம் 400 என்று மட்டும் கூறினால், இந்த 5 நண்பர்களின் நிதி நிலைமையைக் குறித்து தோராயமான அறிவு உண்டாகும் அல்லவா.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு தொழிற்சாலையில் பல்வேறு பணி செய்பவர்களின் எண்ணிக்கையும், தினக்கூலியும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

| தினக்கூலி (ரூபாய்) | பணியாட்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 300 | 2 |
| 350 | 4 |
| 400 | 6 |
| 450 | 4 |
| 500 | 4 |

சராசரி தினக்கூலி எவ்வளவு ரூபாய்?

மொத்தம் 20 வேலையாட்கள் உள்ளனர். இவர்களின் மொத்தக் கூலியைக் கணக்கிட வேண்டும்.
முதலில் உள்ள கணக்கில் உள்ளதுபோல் மீண்டும் மீண்டும் வரும் கூட்டல்களைப் பெருக்கலாக எழுதலாம் அல்லவா.

| தினக்கூலி (ரூபாய்) | வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை | மொத்தக்கூலி (ரூபாய்) |
|---|---|---|
| 300 | 2 | 600 |
| 350 | 4 | 1400 |
| 400 | 6 | 2400 |
| 450 | 4 | 1800 |
| 500 | 4 | 2000 |
| மொத்தம் | 20 | 8200 |

சராசரி தினக்கூலி $8200 \div 20 = 410$ ரூபாய் எனக் கணக்கிடலாம்.

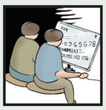
இந்தக் கணக்கில் அனைத்து வேலையாட்களின் கூலி, 300 ரூபாய்க்கும் 500 ரூபாய்க்கும் இடையிலாகும். சராசரி கூலியான 410 ரூபாயும் அதைப் போன்றதே. இது எப்போதும் சரியாக இருக்குமா?

எடுத்துக்காட்டாக, 100 க்கும் 200 க்கும் இடையிலுள்ள 8 எண்களை எடுக்கிறோம் எனக் கருதவும். எல்லா எண்களும் 100 க்குச் சமமாகவோ அதை விடக் கூடுதலோ ஆனதால், இந்த 8 எண்களின் தொகை 800 க்குச் சமமாகவோ அதைவிட அதிகமாகவோ ஆகிறது. இந்தத் தொகையை 8 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் சராசரியும் 100 க்குச் சமமோ அதில் கூடுதலோ ஆகும்.

இதைப்போன்று எல்லா எண்களும் 200 க்குச் சமமாகவோ அதைவிடக் குறைவாகவோ ஆனதால் சராசரியும் அதைப்போன்றே எனக் காணலாம்.

100, 200, 8 என்பதற்குப் பதிலாக பிற எண்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் இதே முறையில் சிந்திக்கலாம். பொதுவாகக் கூறினால்,

**இரு குறிப்பிட்ட எண்களுக்கு இடையில் உள்ள எத்தனை எண்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் அவற்றின் சராசரியும் இந்தக் குறிப்பிட்ட எண்களுக்கு இடையில் ஆகும்.**



(1) ஒரு கைப்பந்து குழுவில் 6 விளையாட்டு வீரர்களுக்கும் ஒரே எடை அல்ல. சராசரி எடை 60 கிலோகிராம் ஆகும்.

i) 60 கிலோகிராமை விடக் கூடுதலாக எடை உள்ள விளையாட்டு வீரர்களில் ஒருவராவது இருக்கிறார் என நிறுவுக.

ii) 60 கிலோகிராமை விடக் குறைவாக எடை உள்ள விளையாட்டு வீரர்களில் ஒருவராவது இருக்கிறார் என நிறுவுக.

(2) சராசரி 60 உடைய 6 எண்களைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முறையிலிருந்தும் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) 4 எண்கள் 60 ஐ விடச் சிறியது, 2 எண்கள் 60 ஐ விடப் பெரியது.

ii) 4 எண்கள் 60 ஐ விடப் பெரியது, 2 எண்கள் 60 ஐ விடச் சிறியது.

(3) வகுப்பில் ஒரு கணக்குத் தேர்வு நடத்தி மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில் மாணவர்களை வகைப்படுத்திய அட்டவணையே கீழே தரப்பட்டுள்ளது;

| மதிப்பெண் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 5 |
| 5 | 4 |
| 6 | 6 |
| 7 | 11 |
| 8 | 10 |
| 9 | 4 |
| 10 | 2 |

வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

(4) ஒரு வட்டாரத்தில் கிடைத்த மழையின் அளவுக்கு ஏற்ப ஒரு மாதத்தின் நாட்களை வகைப்படுத்திய அட்டவணையே இது:

| மழை (மி.மீ) | நாட்கள் |
|---|---|
| 54 | 3 |
| 56 | 5 |
| 58 | 6 |
| 55 | 3 |
| 50 | 2 |
| 47 | 4 |
| 44 | 5 |
| 41 | 2 |

அந்த மாதத்தில் அங்கே ஒரு நாள் பெய்த மழையின் சராசரி அளவு எவ்வளவு?

(5) ஒரு விவசாயிக்கு ஒரு மாதம் கிடைத்த இரப்பர் ஷீட்டுகளின் விபரங்கள் கீழே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| இரப்பர் (கி.கி.) | நாட்கள் |
|---|---|
| 9 | 3 |
| 10 | 4 |
| 11 | 3 |
| 12 | 3 |
| 13 | 5 |
| 14 | 6 |
| 16 | 6 |

i) இந்த மாதத்தில் ஒரு நாள் சராசரியாக எத்தனை கிலோகிராம் இரப்பர் ஷீட்டு கிடைத்தது?

ii) இரப்பரின் விலை கிலோகிராமுக்கு 120 ரூபாய் ஆகும். இந்த மாதத்தில் ஒரு நாளைய இரப்பர் மூலம் கிடைத்த சராசரி வருமானம் எவ்வளவு ரூபாய்?

## பிரிவு அட்டவணைகள்

விபரங்களின் எண்ணிக்கை கூடும்போது பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தி அட்டவணைப்படுத்தும் முறையில் எட்டாம் வகுப்பில் கண்டோம் அல்லவா. அத்தகைய ஒரு கணக்கைக் காண்போம்.

ஒரு தொழிற்சாலையில் தினக்கூலிகளின் வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

| தினக்கூலி (ரூபாய்) | தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 250 - 300 | 8 |
| 300 - 350 | 4 |
| 350 - 400 | 16 |
| 400 - 450 | 7 |
| 450 - 500 | 5 |

இந்தத் தொழிற்சாலையில் சராசரி தினக்கூலி எவ்வளவு?

இங்கு மொத்தமாகக் கொடுக்கின்ற தினக்கூலியைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு? அட்டவணையில் முதல் வரிசையில், 8 தொழிலாளர்களுக்கு 250 ரூபாய்க்கும் 300 ரூபாய்க்கும் இடையில் உள்ள கூலி கொடுக்கப்படுகிறது என்பதல்லாமல் மிகச்சரியாக ஒவ்வொருவருக்கும் எவ்வளவு கூலி கொடுக்கப்படுகிறது எனக் கூறப்படவில்லை அல்லவா. இவர்களுக்குக் கொடுக்கப்படுகின்ற மொத்தக் கூலியைக் கணக்கிட இந்தத் தகவல் மட்டும் போதாது.

இத்தகைய சூழல்களில் அறியாத விபரங்களைக் குறித்து சில ஊகங்கள் எடுக்க வேண்டி வரலாம். அட்டவணையின் முதல் வரிசையில் கூறப்பட்டுள்ள எட்டு

நபர்களின் கூலி தனித்தனியாகத் தெரியாது எனினும், அது 250 ரூபாய்க்கும், 300 ரூபாய்க்கும் இடையிலாகும் எனத் தெரிகிறது. அப்போது இந்த எட்டு நபர்களின் சராசரிக் கூலியும் 250 ரூபாய்க்கும், 300 ரூபாய்க்கும் இடையிலாகும். மட்டுமல்ல சாதாரணமாக இந்தச் சராசரி 250 க்கும், 300 க்கும் ஏறக்குறைய நடுவில் அமையவும் செய்கிறது.

ஆகவே ஒவ்வொரு பிரிவில் உள்ளவர்களின் சராசரிக் கூலி, அந்தப் பிரிவின் நடுவில் வருகின்ற எண் ஆகும் என்ற ஊகத்தின் அடிப்படையிலேயே இத்தகைய அட்டவணைகளில் சராசரி கணக்கிடப்படுகிறது.

இதற்கு ஏற்ப இந்தக் கணக்கின் அட்டவணையை இவ்வாறு விரிவுபடுத்தலாம்:

| தினக்கூலி (ரூபாய்) | தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை | பிரிவு மையம் | மொத்தக் கூலி |
|---|---|---|---|
| 250 - 300 | 8 | 275 | 2200 |
| 300 - 350 | 4 | 325 | 1300 |
| 350 - 400 | 16 | 375 | 6000 |
| 400 - 450 | 7 | 425 | 2975 |
| 450 - 500 | 5 | 475 | 2375 |
| **மொத்தம்** | **40** | | **14850** |

இப்போது சராசரியான தினக்கூலியைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா:

கேரளத்தில் மொத்தப் பள்ளிக்கூட மாணவர்களின் உயரம் - எடை, கேரளத்திலுள்ள மொத்த மக்களின் மாத வருமானம் போன்ற பெரிய எண் சேகரிப்புகளிலிருந்து அவற்றின் தோராயமான இயல்பைக் குறிப்பிடுகின்ற சுருக்கமான சில எண்களைக் கணக்கிடும் பல வழிமுறைகள் உள்ளன.

மொத்தத் தொகையை எண்ணிக்கையால் வகுத்தல் என்பது அவற்றில் ஒன்று மட்டுமே. இவ்வகையில் கணக்கிடுகின்ற சில எண்களைப் பொதுவாக, சராசரி (average), இல்லையெனில் மையநாட்டு (central tendency) என்றே இவற்றின் கணிதக் கற்றலில் கூறப்படுகிறது. சாதாரணமாக, தரப்படுகின்ற எண்களின் தொகையை எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைக்கின்ற எண்ணைக் கூட்டுச் சராசரி அல்லது சராசரி (arithmetic mean or mean) என்று அழைக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக இப்போது செய்த கணக்கில் தொழிற்சாலையின் கூட்டுச்சராசரி தினக்கூலி 371.25 ரூபாய் ஆகும்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணும் சராசரியாக வருகின்ற 6 வேறுபட்ட எண்களை 10 க்கும் 30 க்கும் இடையில் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) 20 ii) 15 iii) 25

(2) ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களை உயரத்தின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணையே கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

| உயரம் (செ.மீ) | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 148 - 152 | 8 |
| 152 - 156 | 10 |
| 156 - 160 | 15 |
| 160 - 164 | 10 |
| 164 - 168 | 7 |

இந்த வகுப்பில் மாணவர்களின் சராசரி உயரம் எவ்வளவு?

(3) ஒரு பல்கலைக் கழகத்தில் உள்ள ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை வயதின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்தி அட்டவணையாகக் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

| வயது (ஆண்டு) | ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 25 - 30 | 6 |
| 30 - 35 | 14 |
| 35 - 40 | 16 |
| 40 - 45 | 22 |
| 45 - 50 | 5 |
| 50 - 55 | 4 |
| 55 - 60 | 3 |

ஆசிரியர்களின் சராசரி வயதைக் கணக்கிடுக.

(4) ஒரு வகுப்பில் உள்ள குழந்தைகளின் எடையை அடிப்படையாகக் கொண்டு வகைப்படுத்திய அட்டவணையே கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

| எடை (கி.கி) | 21 - 23 | 23 - 25 | 25 - 27 | 27 - 29 | 29 - 31 | 31 - 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை | 4 | | 7 | 6 | 3 | 1 |

சராசரி எடை 26 கிலோ கிராம் எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. இவர்களில் 23 கிலோகிராமுக்கும் 25 கிலோகிராமுக்கும் இடையில் எடை உள்ள எத்தனை குழந்தைகள் உள்ளனர்?

## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | என்னால் முடியும் | ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்பட வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • பிரிவுகளாக வகைப்படுத்திய அட்டவணைகளிலிருந்து சராசரியைக் கண்டுபிடிக்க இயலுதல். | | | |

# Notes

## Notes

## Notes

# Notes

# Notes