സ്റ്റാൻഡേർഡ് IX

ഗണിതം

ഭാഗം – 2

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2016

KT 549-1/Maths-9(M) Vol-2

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

അളവുകളുടെയും അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെയും പഠനമായാണ് ഗണിതം തുടങ്ങുന്നത്. അളവുകളെ കേവലസംഖ്യകളായും, വസ്തുക്കളെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായും കണ്ടു തുടങ്ങുമ്പോൾ, ഗണിതത്തിന്റെ ആശയതലം രൂപപ്പെടുന്നു. സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതസമവാക്യങ്ങളാകുന്നു. പുതിയ സാഹചര്യങ്ങളെ ഗണിതപരമായി വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളും സങ്കേതങ്ങളും ആവശ്യമായി വരുന്നു. വസ്തുതകളുടെ കാര്യകാരണബന്ധം, ആശയങ്ങളുടെ യുക്തിയുക്തതയായി വളരുന്നു. ഗണിതശാസ്ത്രം വളരുന്നു.

അതിന്റെ അടുത്ത പടിയിലേക്ക് സ്വാഗതം.

ഡോ. പി. എ. ഫാത്തിമ
ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചന

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

ടി.പി. പ്രകാശൻ
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വാഴക്കാട്
മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം.വി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കുമ്പള
കാസറഗോഡ്

വിജയകുമാർ ടി.കെ.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. ചെർക്കള
കാസറഗോഡ്

രാമാനുജം ആർ.
എം.എൻ.കെ.എം.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

അനിൽകുമാർ എം.കെ.
എസ്.കെ.എം.ജെ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കൽപ്പറ്റ, വയനാട്

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്.എസ്. അരീക്കോട്
മലപ്പുറം

രമേശൻ എൻ.കെ.
ആർ.ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്. മൊകേരി, കണ്ണൂർ

ജാബിർ കെ.
ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്. മൊഗ്രാൽ, കാസറഗോഡ്

ശ്രീകുമാർ ടി.
ഗവ.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കരമന
തിരുവനന്തപുരം

കെ.ജെ. പ്രകാശ്
ജി.എം.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. പട്ടം
തിരുവനന്തപുരം

അനിൽ സി. ഉഷസ്
ജി.എച്ച്.എസ്. നെടുമ്പ്രം
തിരുവല്ല, പത്തനംതിട്ട

ഷിജോ ഡേവിഡ് സി.
സി.എം.എസ്.എച്ച്.എസ്.എസ്.
തൃശൂർ

ഫ്രോയ്ഡ് ഫ്രാൻസിസ് പി.
വി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വളാഞ്ചേരി
മലപ്പുറം

കൃഷ്ണപ്രസാദ് എം.
പി.എം.എസ്.എ.വി.എച്ച്. എസ്.എസ്.
ചാപ്പനങ്ങാടി, മലപ്പുറം

ബാലഗംഗാധരൻ വി.കെ.
എ.ഇ.ഒ., പരപ്പനങ്ങാടി, മലപ്പുറം

കവർ

രാജീവൻ എൻ.ടി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. തരിയോട്, വയനാട്

വിദഗ്ധർ

ഡോ.ഇ. കൃഷ്ണൻ
റിട്ട. പ്രൊഫ. യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്
തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. രമേഷ് കുമാർ പി.
അസി. പ്രൊഫ., കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി

വേണുഗോപാൽ സി.
അസി. പ്രൊഫ., ഗവ. കോളേജ് ഓഫ് ടീച്ചർ
എഡ്യൂക്കേഷൻ, തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. ശരച്ചന്ദ്രൻ
റിട്ട. ഡെപ്യൂട്ടി ഡയറക്ടർ ഓഫ്
കോളേജിയേറ്റ് എഡ്യൂക്കേഷൻ, കോട്ടയം

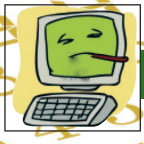
അക്കാദമിക് കോർഡിനേറ്റർ

സുജിത് കുമാർ ജി.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

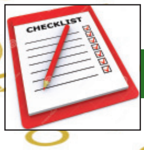
ഉള്ളടക്കം

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

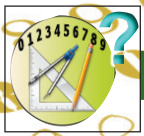

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത


കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം

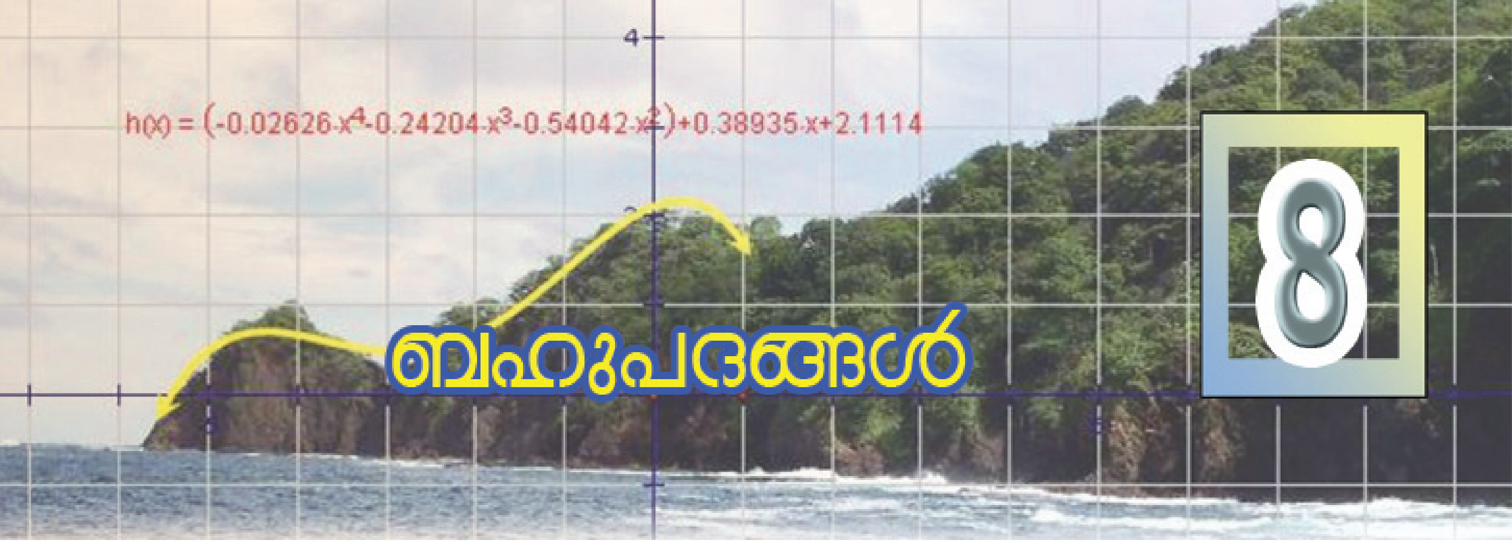

ഗവേഷണം



തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ



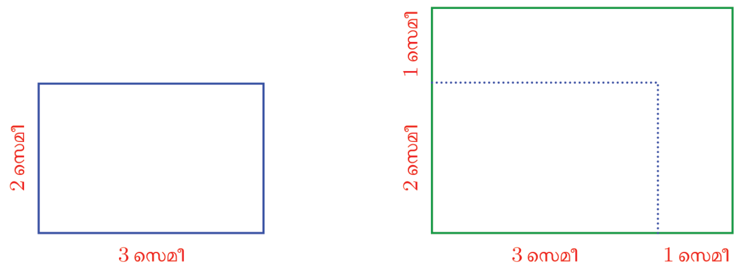
ചർച്ച ചെയ്യാം



ബഹുപദങ്ങൾ

അളവുകളുടെ ബീജഗണിതം

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്റർ വീതം നീട്ടി, അൽപംകൂടി വലിയ ചതുരമാക്കി:



പുതിയ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവെന്താണ്?

ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും; ചുറ്റളവ് 14 സെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം:

ആദ്യം ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്റർ, നാലു വശത്തിലും 1 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂടി; ആകെ 4 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി. പുതിയ ചുറ്റളവ്, $10 + 4 = 14$ സെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററാണ് നീട്ടിയതെങ്കിലോ? രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപോലെ ആലോചിച്ചാൽ, ഓരോ വശത്തിലും 2 സെന്റിമീറ്റർ വീതം. ആകെ കൂടിയ നീളം $4 \times 2 = 8$ സെന്റിമീറ്റർ; പുതിയ ചുറ്റളവ് $10 + 8 = 18$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാൻ എളുപ്പമാണല്ലോ. കൂട്ടിയ നീളം $2\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററാണെങ്കിൽ, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്,

$$\left(4 \times 2\frac{1}{2}\right) + 10 = 20 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ വശവും കൂട്ടിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്ററായാലും, അതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് 10 സെന്റിമീറ്ററിനോട് കൂട്ടിയാൽ, പുതിയ ചുറ്റളവായി.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതാം; ഓരോ വശവും കൂട്ടിയത് x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, പുതിയ ചുറ്റളവ് p സെന്റിമീറ്ററെന്നും എഴുതിയാൽ,

$$p = 4x + 10$$

ഇനി പല നീളങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതനുസരിച്ച്, മാറുന്ന ചുറ്റളവുകൾ പെട്ടെന്നെഴുതാമല്ലോ.

3 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് 22 സെന്റിമീറ്റർ

$3\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് 24 സെന്റിമീറ്റർ

$3\frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് 25 സെന്റിമീറ്റർ

ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇതൽപംകൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാം;

$x = 3$ എന്നെടുത്താൽ $p = 22$

$x = 3\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ $p = 24$

$x = 3\frac{3}{4}$ എന്നെടുത്താൽ $p = 25$

ഇതിനിയും ചുരുക്കിയെഴുതാൻ ഒരു ബീജഗണിതരീതിയുണ്ട്;

$$p(3) = 22$$

$$p\left(3\frac{1}{2}\right) = 24$$

$$p\left(3\frac{3}{4}\right) = 25$$

പൊതുവായി ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$p(x) = 4x + 10$$

ഈ ചുരുക്കെഴുത്ത് ഒന്നുകൂടി നോക്കാം. ആദ്യം നമ്മുടെ കണക്ക് സാധാരണഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

> വശങ്ങളുടെ നീളം രണ്ടു സെന്റിമീറ്ററും, മൂന്നു സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരു പോലെ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയാൽ ആ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, കൂട്ടിയ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങ് പത്തിനോട് കൂട്ടിയതാണ്. ഉദാഹരണമായി വശങ്ങളെല്ലാം ഒന്നര സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് പതിനാറു സെന്റിമീറ്ററാകും.

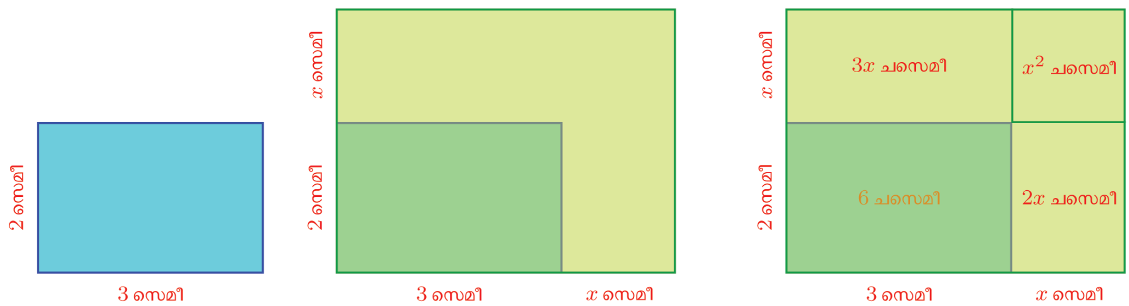
ഇത് ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിയെഴുതാം:

> വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയതിന്റെ ചുറ്റളവ് p സെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ, $p = 4x + 10$.
>
> ഉദാഹരണമായി, $x = 1\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, $p = 16$

ഇതിലെ x മാറുന്നതനുസരിച്ചാണ് p മാറുന്നതെന്നു വ്യക്തമാക്കാനായി, p എന്നുമാത്രം എഴുതുന്നതിനുപകരം $p(x)$ എന്നെഴുതാം; അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയത് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം;

> വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയതിന്റെ ചുറ്റളവ് $p(x) = 4x + 10$. ഉദാഹരണമായി, $p\left(1\frac{1}{2}\right) = 16$

ഇനി, ഈ കണക്കിൽത്തന്നെ പരപ്പളവ് മാറുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. പല നീളങ്ങൾ കൂട്ടുമ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്നത് ഒന്നൊന്നായി നോക്കുന്നതിനു പകരം, പൊതുവേ കൂട്ടുന്ന നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം:



ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, പുതിയ പരപ്പളവ്

$$6 + 2x + 3x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

(എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം ഓർക്കുക)

ചുറ്റളവ് കണക്കിലെപ്പോലെ, വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂടുമ്പോഴുള്ള പരപ്പളവിനെ $a(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ

$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$a(1) = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$a\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6 = 15\frac{3}{4}$$

$$a(2) = 4 + 10 + 6 = 20$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം. ഇതെല്ലാം സാധാരണഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് $15\frac{3}{4}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളെല്ലാം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 20 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 1, 2, 3 സെന്റിമീറ്ററായ ചതുരക്കട്ടയുടെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരുപോലെ കൂട്ടി വലിയ ചതുരക്കട്ടയാക്കിയാൽ വ്യാപ്തം എങ്ങനെ മാറുമെന്നു നോക്കാം. കൂട്ടിയ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ ഘന സെന്റിമീറ്റർ. ഇതു വിസ്തരിച്ചെഴുതാൻ, ആദ്യം നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി ഇതിനെ $x + 1$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; അതിന് ആദ്യത്തെ തുകയിലെ മൂന്നു സംഖ്യകളിലോരോന്നിനെയും, രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോന്നുകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, കൂട്ടണം.

$$(x + 1)(x^2 + 5x + 6) = x^3 + 5x^2 + 6x + x^2 + 5x + 6 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

വിശദമായി പറഞ്ഞാൽ,

വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ചതുരക്കട്ടയുടെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരക്കട്ടയാക്കിയതിന്റെ വ്യാപ്തം $v(x)$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ, $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

വ്യത്യസ്തമായ മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം. 49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ നേരെ മുകളിലേക്കെറിയുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയുമെന്നും, 5 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ വേഗം 0 ആകുകയും, തുടർന്ന് ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുന്ന വേഗത്തോടെ താഴോട്ടു വീഴുമെന്നും കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട് (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ, **ന്യൂനവേഗം** എന്ന ഭാഗം) സമയവും ദൂരവുമായുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സമവാക്യവും അറിയാം. x സെക്കന്റിലെ വേഗം, ഇപ്പോൾ ചെയ്യുന്നതുപോലെ $s(x)$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെഴുതിയാൽ

$$s(x) = 49 - 9.8x$$

വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിലെ വേഗം ഇതിൽനിന്നു കണക്കാക്കാം.

സമയം x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
വേഗം $s(x)$	49	39.2	29.4	19.6	9.8	0	–9.8	–19.6	–29.4	–39.2	–49

ഇതിൽ താഴത്തെ വരിയിലെ പൂജ്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തും ഒരേ സംഖ്യകൾ ന്യൂനമായി വരുന്നതിന്റെ കണക്കെന്താണ്? ഇതിന്റെ ഭൗതികമായ വിശദീകരണം എന്താണ്?

(1) ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മറ്റേവശത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ കുറവായ ചതുരങ്ങളിൽ, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കുക.

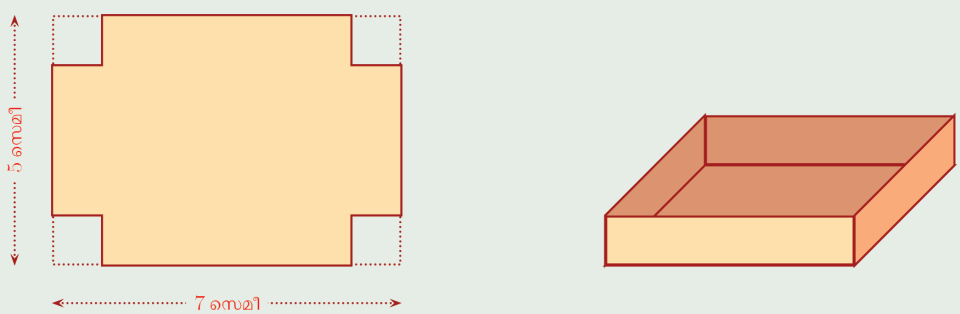
i) ഇവയുടെ ചുറ്റളവുകൾ $p(x)$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x ഉം $p(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

ii) ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ $a(x)$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x ഉം $a(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

iii) $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക. എന്തെങ്കിലും ക്രമം കാണുന്നുണ്ടോ?

iv) $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$, $a(5)$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക. എന്തെങ്കിലും ക്രമം കാണുന്നുണ്ടോ?

(2) ചിത്രത്തിൽക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽനിന്നും ചെറു സമചതുരങ്ങൾ വെട്ടിമാറ്റി, മേലോട്ട് മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കുന്നു.



i) വെട്ടിയെടുക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, പെട്ടിയുടെ മൂന്നളവുകളും എഴുതുക.

ii) പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം $v(x)$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x ഉം $v(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

iii) $v\left(\frac{1}{2}\right)$, $v(1)$, $v\left(1\frac{1}{2}\right)$ ഇവ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു മീറ്റർ നീളമുള്ള കയറുകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, ചതുരത്തിനകത്തെ പരപ്പളവ് $a(x)$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നുമെടുക്കുക.

i) x ഉം $a(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

ii) $a(10)$, $a(40)$ ഇവ ഒരേ സംഖ്യ ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

iii) x ആയി രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ $a(x)$ ആയി ഒരേസംഖ്യതന്നെ കിട്ടാൻ, ഈ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്തായിരിക്കണം?

സവിശേഷ വാചകങ്ങൾ

പലതരം അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതുന്നതു കണ്ടല്ലോ. കേവലസംഖ്യകളിന്മേലുള്ള ക്രിയകളായും ഇവയെ കാണാം. ഉദാഹരണമായി ആദ്യത്തെ ചതുരക്കണക്കിൽ വശങ്ങളുടെ നീളം നീട്ടിയതും പുതിയ ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

$$p(x) = 4x + 10$$

എന്നെഴുതി. ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയ എന്നതിൽക്കവിഞ്ഞ് പൊതുവെ സംഖ്യകളെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 10 കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയായും ഇതിനെ കാണാം. ഇതുപോലെ നേരത്തെ ചെയ്തു കണ്ട പല ബന്ധങ്ങളും പരിശോധിക്കാം.

- $a(x) = x^2 + 5x + 6$
- $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $s(x) = 49 - 9.8x$

ഇവയെല്ലാം സംഖ്യകളിലെ ക്രിയകളായി കണ്ടാൽ, അവയ്ക്കെല്ലാം പൊതുവായ ചില സ്വഭാവങ്ങൾ കാണാം. x എന്ന സംഖ്യയുടെ പല നിലയിലുള്ള കൃതികളെ നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിക്കുകയും, അത്തരം ഗുണനഫലങ്ങൾ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും മാത്രമാണ് ഇതിലെല്ലാം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്. ഇത്തരം ക്രിയകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ബീജഗണിത വാചകത്തിന്റെ പൊതുവായ പേരാണ് ബഹുപദം (polynomial)

സംഖ്യകളിൽ ഇങ്ങനെയല്ലാത്ത ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്ന സാഹചര്യങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വശം മറ്റേ വശത്തിനേക്കാൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലായ ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വികർണങ്ങളുടെ നീളം നോക്കാം. ചെറിയ വശം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വികർണത്തിന്റെ നീളം

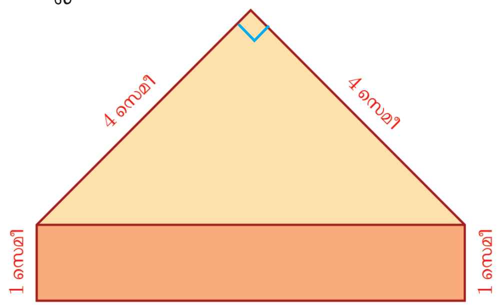
ചതുരത്തിൽനിന്ന് പെട്ടിയുണ്ടാക്കിയില്ലേ. ഇത്തരം ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കുന്നത് ജിയോജിബ്രയിൽ കാണിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. Min = 0, Max = 2.5 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 7 − 2a, 5 − 2a ആയ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇനി ജിയോജിബ്രയിലെ 3D Graphics തുറക്കുക (View → 3D Graphics) നമ്മൾ വരച്ച ചതുരം 3D Graphics ൽ കാണാം. Extrude to Prism or Cylinder ഉപയോഗിച്ച് ഈ ചതുരത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ പെട്ടിയുടെ ഉയരമായി സ്ലൈഡറിന്റെ പേര് നൽകുക. Volume ഉപയോഗിച്ച് പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം അടയാളപ്പെടുത്താം. സ്ലൈഡർ നീക്കി a മാറ്റുമ്പോൾ പെട്ടിയും, വ്യാപ്തവും എങ്ങനെ മാറുന്നുവെന്നു നോക്കുക.

$$\sqrt{x^2+(x+1)^2} = \sqrt{2x^2+2x+1} \text{ സെ.മീ.}$$

ഇതിൽ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലമെടുക്കുക എന്ന ക്രിയ ഉള്ളതിനാൽ നമ്മുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച് ഇതൊരു ബഹുപദമല്ല.

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

ഒരു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിൽ ഒരു ചതുരം ചേർത്തുവച്ച ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?



ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 8 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് എളുപ്പം കാണാം. ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശം സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണമായതിനാൽ $4\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $4\sqrt{2}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ; ആകെ $8 + 4\sqrt{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം വേറെ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയായാലോ? ഈ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മൊത്തം പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\,x$$

ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നു കാണാം. ഇതിൽ 2 ന്റെ വർഗമൂലമുണ്ട്; എന്നാൽ മാറുന്ന സംഖ്യകളിൽ ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളിൽ വർഗമെടുക്കലും, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ എന്നീ നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള ഗുണനവും മാത്രമേയുള്ളൂ. അപ്പോൾ ഇതും ഒരു ബഹുപദംതന്നെയാണ്.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററായ ചതുരങ്ങളിലെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ ചുറ്റളവ്,

$$2x + \frac{50}{x}$$

സെന്റിമീറ്റർ. ഇതിൽ മാറുന്ന സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമമെടുക്കുന്ന ക്രിയ ഉള്ളതുകൊണ്ട് ഇതൊരു ബഹുപദമല്ല.

ഒരു ബഹുപദത്തിൽ, മാറുന്ന സംഖ്യകളുടെ കൃതികളാണെടുക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ വരുന്ന ഏറ്റവും വലിയ കൃത്യങ്കത്തെ ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം (degree of the polynomial) എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ മുകളിൽ നിരത്തിയ ബഹുപദങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 2, രണ്ടാമത്തേതിന്റെ കൃതി 3, മൂന്നാമത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 1.

കൃത്യങ്കം 1 ആയ ബഹുപദം എന്നതിനു പകരം ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം (first degree polynomial), കൃത്യങ്കം 2 ആയ ബഹുപദം എന്നതിനു പകരം

രണ്ടാകൃതി ബഹുപദം (second degree polynomial) എന്നിങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം.

കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ബഹുപദങ്ങളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ രൂപം എഴുതാം.

ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം : $ax + b$

രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം : $ax^2 + bx + c$

മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം : $ax^3 + bx^2 + cx + d$

ഇവിടെ a, b, c, d എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ, നിശ്ചിത സംഖ്യകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അതായത്, ഒരു നിശ്ചിത ബഹുപദത്തിൽ, a, b, c, d ഇവ മാറ്റുന്നില്ല; x ആയി പല സംഖ്യകൾ എടുക്കുകയും ചെയ്യാം.

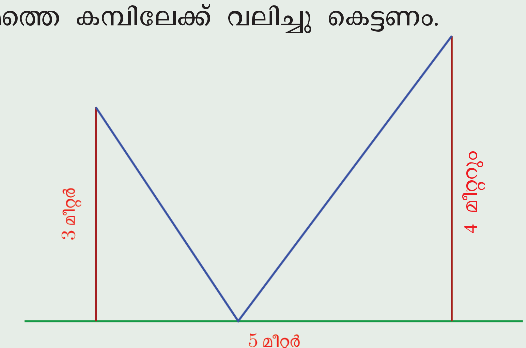
ഈ സംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ, ഭിന്നസംഖ്യകളോ, ഭിന്നമല്ലാത്ത സംഖ്യകളോ, ന്യൂനസംഖ്യകളോ എന്തുമാകാം. ഇവയെ ബഹുപദത്തിലെ ഗുണകങ്ങൾ (coefficients) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

(1) ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതി ബഹുപദമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. തീരുമാനത്തിന്റെ കാരണവും എഴുതുക.

i) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 1 മീറ്റർ വീതിയിലൊരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും, പാതയുടെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

ii) 7 ലിറ്റർ വെള്ളവും, 3 ലിറ്റർ ആസിഡും ചേർന്ന ദ്രാവകത്തിൽ, വീണ്ടും ഒഴിക്കുന്ന ആസിഡിന്റെ അളവും, ദ്രാവകത്തിലെ ആസിഡിന്റെ ശതമാനത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

iii) 3 മീറ്ററും, 4 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ 5 മീറ്റർ അകലത്തിൽ നിലത്തു കുത്തനെ നാട്ടിയിരിക്കുന്നു. ഒരു കമ്പിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് ഒരു കയറു വലിച്ചു നിലത്തുറപ്പിച്ച്, അവിടെ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ കമ്പിലേക്ക് വലിച്ചു കെട്ടണം.



ഒരു കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് നിലത്തു കയർ ഉറപ്പിച്ച സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള അകലവും മൊത്തം കയറിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

(2) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ക്രിയകളോരോന്നും ബീജഗണിതവാചകമായി എഴുതുക. ഏതെല്ലാമാണ് ബഹുപദമെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

i) സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക

ii) സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വർഗമൂലത്തിന്റെയും തുക

iii) സംഖ്യയോട് അതിന്റെ വർഗമൂലം കൂട്ടിയതും, സംഖ്യയിൽനിന്ന് വർഗമൂലം കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം

(3) ചുവടെപ്പറയുന്ന തരത്തിലുള്ള $p(x)$ എന്ന ബഹുപദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $p(1) = 1$ ഉം $p(2) = 3$ ഉം ആയ ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം

ii) $p(1) = -1$ ഉം $p(-2) = 3$ ഉം ആയ ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം

iii) $p(0) = 0, p(1) = 2, p(2) = 6$ ആയ ഒരു രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദം

iv) $p(0) = 0, p(1) = 2,$ ആയ മൂന്നു വ്യത്യസ്ത രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദങ്ങൾ

ബഹുപദക്രിയകൾ

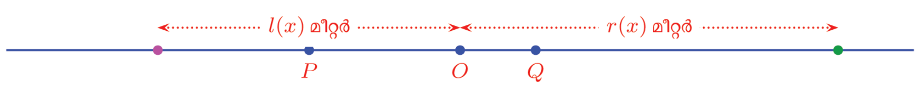
നീണ്ടൊരു വരയിൽ O എന്നൊരു ബിന്ദുവും, അതിനു 2 മീറ്റർ ഇടത്ത് P എന്നൊരു ബിന്ദുവും സങ്കൽപ്പിക്കുക. P യിൽനിന്ന് ഒരു വസ്തു വരയിലൂടെ ഇടത്തേയ്ക്ക് സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. വേഗമെപ്പോഴും 1 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്. ഒരു സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ ഈ വസ്തു O യുടെ എത്ര മീറ്റർ ഇടത്താകും? $2\frac{1}{2}$ സെക്കന്റാകുമ്പോഴോ?

ഇത് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് എഴുതിനോക്കാം. x സെക്കന്റിൽ, O യുടെ $l(x)$ മീറ്റർ ഇടത്താണ് എന്നെടുത്താൽ

$$l(x) = x + 2$$

ഇനി O യുടെ 1 മീറ്റർ വലത്തുള്ള Q എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റൊരു വസ്തു, 2 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ വരയിലൂടെ വലത്തോട്ട് സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്നും കൂടി കരുതുക. ഇതിന്റെ അകലക്കണക്കും ഒരു ബഹുപദമായെഴുതാം: x സെക്കന്റിൽ ഇത് O യുടെ $r(x)$ മീറ്റർ വലത്ത് എന്നെടുത്താൽ

$$r(x) = 2x + 1$$



5 സെക്കന്റാകുമ്പോൾ ഈ വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്താകും?

ഇടത്തോട്ട് പോയ വസ്തു O യുടെ $l(5)$ മീറ്റർ ഇടത്തും, വലത്തോട്ടു പോയത്, O യുടെ $r(5)$ മീറ്റർ വലത്തുമാണ്; അപ്പോൾ അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $l(5) + r(5)$ മീറ്റർ

$$l(5) = 5 + 2 = 7$$

$$r(5) = (2 \times 5) + 1 = 11$$

$$l(5) + r(5) = 7 + 11 = 18$$

അതായത്, 5 സെക്കന്റാകുമ്പോൾ വസ്തുക്കൾ തമ്മിൽ 18 മീറ്റർ അകലമുണ്ടാകും. 10 സെക്കന്റാകുമ്പോഴോ?

ഒരോ സമയത്തും $l(x)$ ഉം $r(x)$ ഉം വെവ്വേറെ കണക്കാക്കി കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും ഒരു ബീജഗണിതവാചകമാക്കിയാലോ?

x സെക്കന്റിൽ വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $d(x)$ മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$$d(x) = (x + 2) + (2x + 1) = 3x + 3 = 3(x + 1)$$

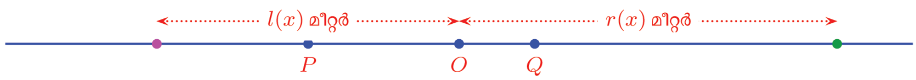
അപ്പോഴിനി 10 സെക്കന്റിൽ വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാൻ, 10 നോട് 1 കൂട്ടി 3 മടങ്ങെടുത്താൽപ്പോരെ?

$$d(10) = 3 \times 11 = 33$$

സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$d(x) = l(x) + r(x)$$

ആണല്ലോ. അപ്പോൾ $d(x)$ എന്ന ബഹുപദം, $l(x)$, $r(x)$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങ



ളുടെ തുകയാണെന്നു പറയാം.

ഇതുപോലെ ഏതു രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി

$$p(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$q(x) = 2x^2 + 5x - 1$$

എന്നെടുത്താൽ

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^2 - 2x + 3) + (2x^2 + 5x - 1) \\ &= (x^2 + 2x^2) + (5x - 2x) + (3 - 1) \end{aligned}$$

$$= 3x^2 + 3x + 2$$

കൂട്ടുന്നതുപോലെ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യാം.

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (x^2 - 2x + 3) - (2x^2 + 5x - 1) \\ &= (x^2 - 2x + 3) - 2x^2 - 5x + 1 \\ &= (x^2 - 2x^2) - (2x + 5x) + (3 + 1) \\ &= -x^2 - 7x + 4 \end{aligned}$$

ഗുണിക്കുകയുമാവാം

$$\begin{aligned} p(x)\ q(x) &= (x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 5x - 1) \\ &= (2x^4 + 5x^3 - x^2) - (4x^3 + 10x^2 - 2x) \\ &\quad + (6x^2 + 15x - 3) \\ &= (2x^4 + (5x^3 - 4x^3) + (6x^2 - 10x^2 - x^2) \\ &\quad + (15x + 2x) - 3 \\ &= 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 17x - 3 \end{aligned}$$

ക്രിയയും ക്രമവും

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. $(x + 1)^3$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, $x^2 + 2x + 1$ നെ $(x + 1)$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

$$\begin{aligned} (x + 1)^3 &= (x^2 + 2x + 1)(x + 1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

എന്നു കാണാം. ഇതിനെ $x + 1$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ $(x + 1)^4$ കിട്ടും. (ചെയ്തു നോക്കൂ). $x + 1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$ … ഇതിലെല്ലാം വരുന്ന ഗുണകങ്ങളെ ക്രമമായി എഴുതി നോക്കൂ.

1 1

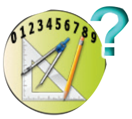
1 2 1

1 3 3 1

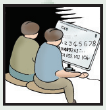
1 4 6 4 1

… … … … …

എന്തെങ്കിലും ക്രമം കാണുന്നുണ്ടോ? $(x + 1)^5$ എന്താണെന്ന് ഗുണിച്ചുനോക്കാതെ തന്നെ പറയാമോ?



ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു സംഖ്യ മാത്രമാകുമോ?



(1) $p(x) = 2x^2 + 3x + 5$, $q(x) = x^2 + 4x + 1$, $s(x) = p(x) + q(x)$ എന്നെടുത്ത്, $p(10)$, $q(10)$, $s(10)$, $p(10) + q(10)$ എന്നീ സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(2) $x^2 + 4x - 5$ എന്ന ബഹുപദത്തിനോട് എന്തു ബഹുപദം കൂട്ടിയാലാണ് $2x^2 - 3x + 1$ എന്ന ബഹുപദം കിട്ടുക?

(3) $x^2 + 4x - 5$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽനിന്ന് എന്തു ബഹുപദം കുറച്ചാലാണ് $2x^2 - 3x + 1$ എന്ന ബഹുപദം കിട്ടുക?

(4) $p(x) + q(x) = x^2 - 4x + 1$ ഉം $p(x) - q(x) = x^2 + 5x - 2$ ഉം ആകുന്ന $p(x)$, $q(x)$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) $p(x) = 3x^2 - 2x + 4$ എന്നെടുത്ത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

i) $(x + 1)\,p(x) + (x - 1)\,p(x)$

ii) $(x + 1)\,p(x) - (x - 1)\,p(x)$

iii) $\frac{1}{2}(x + 1)\,p(x) - \frac{1}{2}(x - 1)\,p(x)$

KT 549-2/Maths-9(M) Vol-2

ഗവേഷണം

ഒരു ബഹുപദത്തെ $(x-1)$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഗുണകങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്? $(x+1)$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലോ? (x^2-1) കൊണ്ടായാലോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

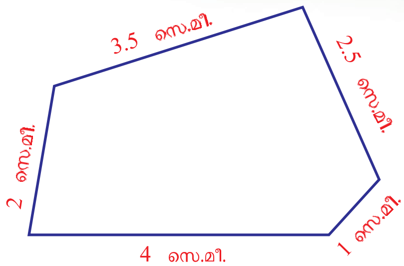
പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• മാറുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള മാറാത്ത ബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിത വാചകങ്ങളായി എഴുതുകയും, അവയിലെ ബഹുപദങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുകയും ചെയ്യുന്നു.			
• ബഹുപദങ്ങളെ കേവലസംഖ്യകളിലെ ക്രിയകളായി കാണുകയും, അവയുടെ സവിശേഷതകൾ തിരിച്ചറിയുകയും ചെയ്യുന്നു.			
• ബഹുപദങ്ങളുടെ തുകയും, വ്യത്യാസവും, ഗുണനഫലവും കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട സാഹചര്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നു; അത്തരം ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്നു.			

9

വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ

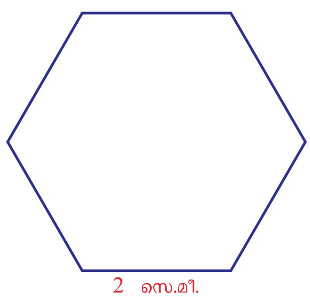
വൃത്തവും ബഹുഭുജങ്ങളും

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കൂട്ടിയാൽ മതി:



ചുറ്റളവ് $4+1+2.5+3.5+2=13$ സെന്റിമീറ്റർ

സമബഹുഭുജമാണെങ്കിൽ, വളരെ എളുപ്പമായി:

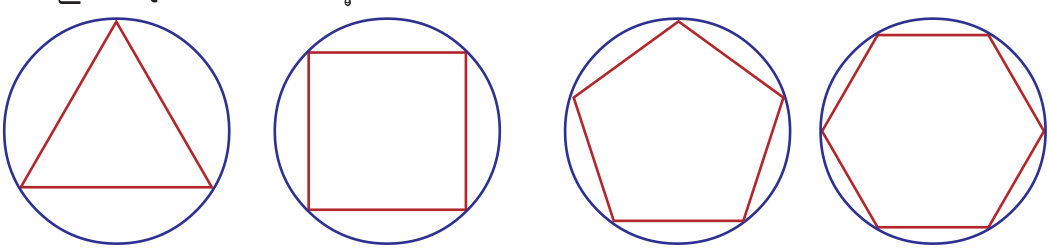


ചുറ്റളവ് $6 \times 2 = 12$ സെന്റിമീറ്റർ

വൃത്തമായാലോ?

നൂലോ ചരടോ വച്ച് അളന്നെടുക്കാം; അളക്കാതെ കണക്കാക്കുന്നതാണല്ലോ ഗണിതരസം.

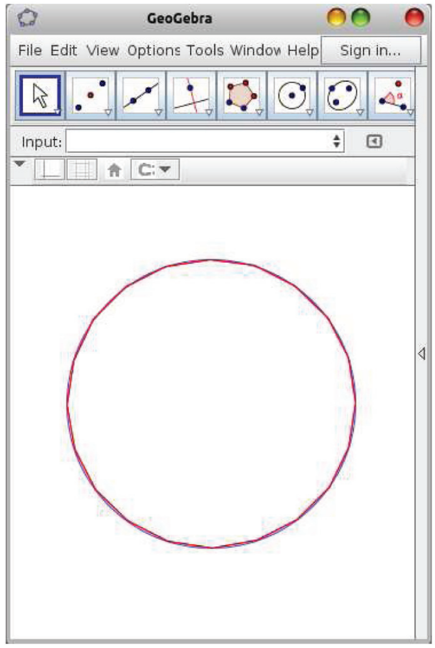
ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



വൃത്തത്തിനകത്തെ സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുംതോറും, അത് വൃത്തത്തിനോടടുക്കുന്നില്ലേ?

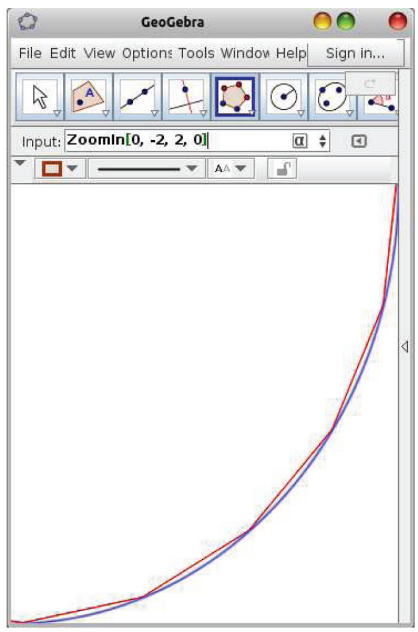
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ 20 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജം GeoGebra യിൽ വരച്ചതാണിത്. വൃത്തവും ബഹുഭുജവും വേർതിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നില്ല അല്ലേ?



ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തിൽ സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. Min = 3, Max = 100 വരത്തക്കവിധം n എന്ന Integer Slider ഉണ്ടാക്കുക. വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിലും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലും ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി $\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$ എന്ന് എഴുതുക. വൃത്തത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു കൂടി ലഭിക്കും. Regular Polygon ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ മൂലകളുടെ എണ്ണം n എന്ന് നൽകുക. n വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജം ലഭിക്കും. Distance or Length ഉപയോഗിച്ച് ബഹുഭുജത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ അതിന്റെ ചുറ്റളവ് ലഭിക്കും. ആരം $\frac{1}{2}$ ആയ വൃത്തത്തിൽ ഇത്തരത്തിൽ ക്രമബഹുഭുജങ്ങൾ വരച്ച് അവയുടെ ചുറ്റളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ ചുറ്റളവിന് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

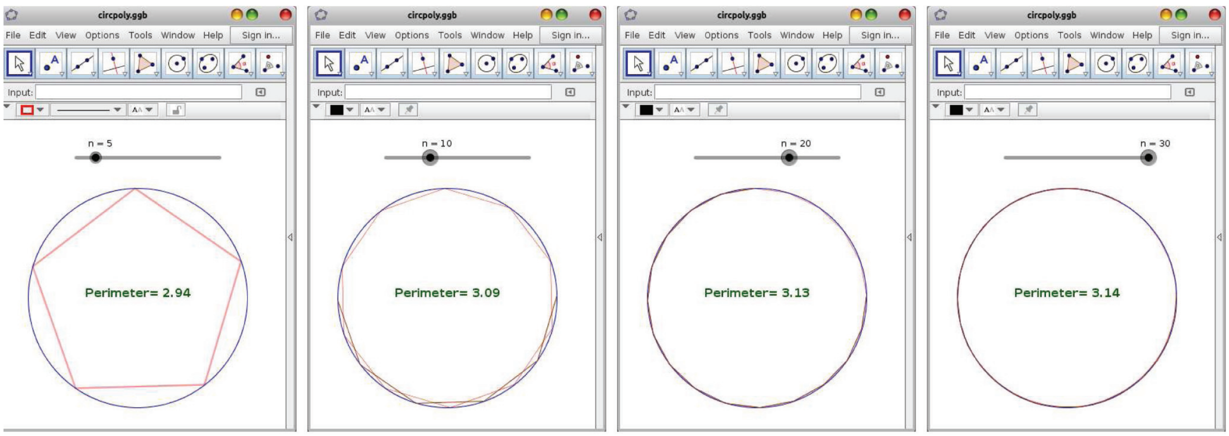
ചിത്രത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം പെരുപ്പിച്ചു കാണിക്കുന്നതാണ് ഈ ചിത്രം.



അപ്പോൾ വശങ്ങളെത്ര കൂടിയാലും ബഹുഭുജം വൃത്തമാകില്ല; എത്രയും അടുത്തുവരാമെന്നു മാത്രം.

ഏതായാലും, ഈ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുമല്ലോ; വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുംതോറും കൂടുതൽ കൂടുതലടുക്കുകയും ചെയ്യും. പ്രാചീനകാലം മുതൽതന്നെ കണക്കുജോലിക്കാർ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവളക്കാൻ ഈ രീതിയാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്.

ഇന്നിപ്പോൾ ഇതിന്റെ ഗണിതം കൃത്യമായി എഴുതിക്കൊടുത്താൽ, കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കമ്പ്യൂട്ടറിനെക്കൊണ്ട് ചെയ്യിക്കാം. വ്യാസം 1 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ 5, 10, 20, 30 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ ജിയോജിബ്ര കണക്കാക്കിയതിന്റെ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



ഈ സംഖ്യകൾ, വ്യാസം 1 ആയ (സെന്റിമീറ്ററോ, മീറ്ററോ എന്തായാലും) വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നറിയാം. അപ്പോൾ ചില ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്.

- 2.94, 3.09, 3.13, 3.14, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഈ സംഖ്യകൾ ഏതു സംഖ്യയുടെ അടുത്തേക്കാണ് നീങ്ങുന്നത്?
- ഈ സംഖ്യയിൽനിന്ന് വ്യാസം 1 അല്ലാത്ത വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവെങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് ആദ്യം ഉത്തരം പറയാം.

അതിനുമുമ്പ് ചില കണക്കുകളാവാം.

(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം തന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

i) വ്യാസം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ii) അത്തരമൊരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വ്യാസം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിലാണ്. സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) വ്യാസം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

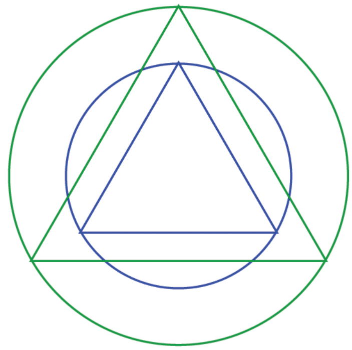
ബഹുഭുജങ്ങളിലൂടെ

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും, സമചതുരത്തിന്റേയും ഷഡ്ഭുജത്തിന്റേയും അളവുകളുമായി താരതമ്യം ചെയ്തുകൊണ്ടുള്ള കണക്കുകൾ പ്രാചീനകാലത്തു തന്നെ കാണാം. ഉദാഹരണമായി, ബി.സി. 1600 ലേതെന്നു കണക്കാക്കപ്പെടുന്ന, ബാബിലോണിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ, വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$ ഭാഗമാണെന്ന് പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്; അതായത് $\frac{24}{25}$ ഭാഗം. ഇത് ഏകദേശം ശരിയുമാണ്.

വൃത്തത്തെ ഒറ്റപ്പെട്ട ബഹുഭുജങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ, ക്രമേണ വൃത്തത്തിനോടടുക്കാം എന്ന ചിന്ത ഗ്രീസിലാണ് ഉണ്ടായത്. ബി.സി. അഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ആന്റിഫോൺ അവതരിപ്പിച്ച ഈ ആശയം, നാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന യൂഡോക്സസ് കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കി. ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ക്രിയാപദ്ധതി ആവിഷ്കരിച്ചത്, ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന, ലോകത്തിലെ തന്നെ എക്കാലത്തേയും മികച്ച ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ഒരാളായ ആർക്കിമിഡിസ് ആണ്.

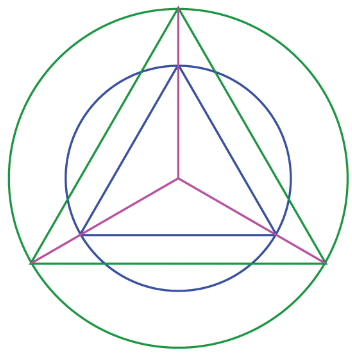
വ്യാസവും ചുറ്റളവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

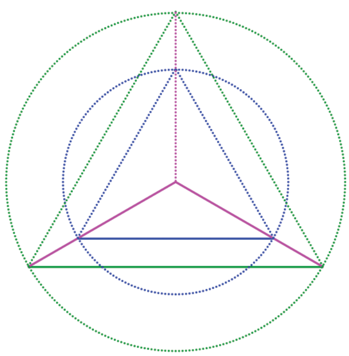


ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിൽ സമഭുജത്രികോണങ്ങൾ. ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നതിന്റെ കണക്കെന്താണ്?

ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂലകളും, വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിച്ചുനോക്കാം.



ഈ വരകൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളെയും മൂന്നു ചെറുത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നുണ്ടല്ലോ. താഴത്തെ ഒരു ജോടി ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കാം.

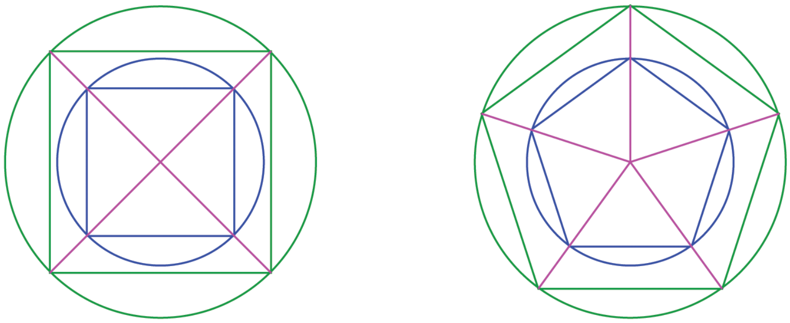


ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണ് (കാരണം?) ഇടതോ വലതോ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായതിനാൽ, താഴത്തെ വശങ്ങളും ഇതേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

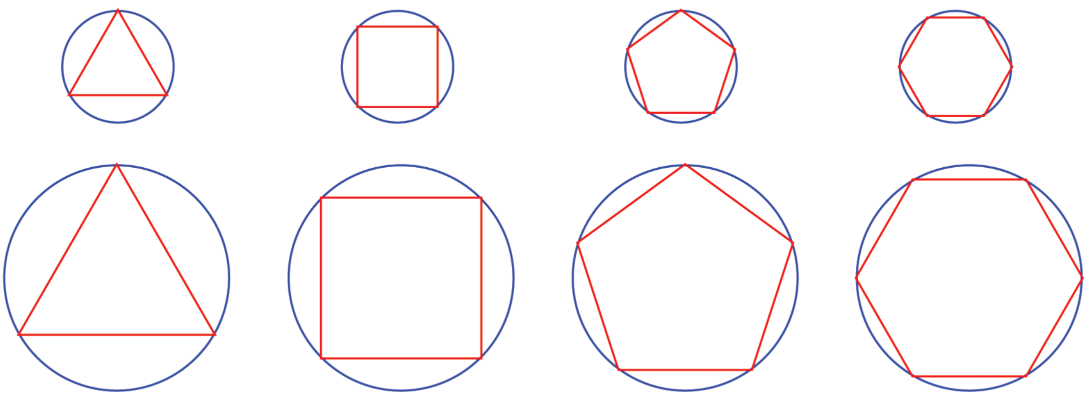
മറ്റു രണ്ടു ജോടി ചെറുത്രികോണങ്ങളിലും ഇതുപോലെതന്നെയാണല്ലൊ; അപ്പോൾ വൃത്തങ്ങളിലെ സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളും, അതിനാൽ

ചുറ്റളവുകളും ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ്; ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധംതന്നെയാണ് വ്യാസങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും.

ത്രികോണങ്ങൾക്കു പകരം മറ്റു ബഹുഭുജങ്ങളെടുത്താലും ഇതുപോലെ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ച്, ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, വ്യാസങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമാണെന്നു കാണാം.



ഇനി ഒരു വൃത്തത്തിലും, വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങായ വൃത്തത്തിലും, സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.



ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, അതതു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിലേക്കാണ് നീങ്ങുന്നത്; വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ, അതിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെയെല്ലാം ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

ഇക്കാര്യം സംഖ്യാപരമായി നോക്കാം. ചെറിയ വൃത്തത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് p_1, സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് p_2, പഞ്ചഭുജത്തിന്റേത് p_3, എന്നിങ്ങനെ എടുക്കാം; ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് c എന്നും. അപ്പോൾ p_1, p_2, p_3, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തുവരും.

വലിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$, . . . എന്നാണല്ലോ. p_1, p_2, p_3, . . . എന്നീ സംഖ്യ

ജിയോജിബ്രയിൽ a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡറും m, n എന്നീ പേരുകളിൽ രണ്ട് Interger Slider ഉം നിർമിക്കുക. ആരം a ആയി ഒരു വൃത്തവും ആരം ma ആയി മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. രണ്ട് വൃത്തങ്ങളിലും വശങ്ങളുടെ എണ്ണം n വരത്തക്കവിധം സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരച്ച് അവയുടെ ചുറ്റളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. m = 2 ആകുമ്പോൾ (വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം ചെറുതിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ്) . ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? ബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം മാറ്റി നോക്കൂ. m = 3 ആകുമ്പോഴോ? ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എന്തായാലും ഈ ബന്ധങ്ങൾ നിലനിൽക്കുന്നുണ്ടോ? a മാറ്റി നോക്കൂ.

കൾ c യോട് അടുക്കുന്നതിനാൽ $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $2c$ യോടടുക്കും; അതായത്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്.

ജ്യാമിതീയമായി നോക്കുമ്പോൾ വലിയ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുക്കുന്നു എന്നാണ് കാണുന്നത്. സംഖ്യാപരമായി ആലോചിക്കുമ്പോൾ അവ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് അടുക്കുവെന്നും കിട്ടുന്നു. അങ്ങനെ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നുവരുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങിനു പകരം മറ്റെതെങ്കിലും മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണെങ്കിൽ, ചുറ്റളവും അതേ തോതിൽ മാറുമെന്ന് ഇതുപോലെ കാണാം.

വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ മാറുന്നത്, വ്യാസങ്ങളുടെ തോതിലാണ്.

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം;

വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, വ്യാസങ്ങളുടെ അംശബന്ധംതന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ, വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, ഏതു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കാനും ഈ വ്യാസത്തിനെ ഈ സംഖ്യ ഗുണിച്ചാൽ മതി.

അങ്ങനെ ആദ്യഭാഗത്ത് ചോദിച്ച രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരമായി.

?

(1) ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരച്ച സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 24 സെന്റിമീറ്റർ.

i) ഇതേ വൃത്തത്തിൽ മൂലകളെടുത്തു വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

ii) ഈ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിൽ മൂലകളെടുത്തു വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

iii) ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിൽ മൂലകളെടുത്തു വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്രയാണ്?

(2) ഒരു കമ്പി വളച്ച് 4 സെന്റിമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള വൃത്തമുണ്ടാക്കി. ഇതിന്റെ പകുതി നീളമുള്ള കമ്പി വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമെന്തായിരിക്കും?

(3) വ്യാസം 2 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 6.28 മീറ്ററാണെന്നു അളന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു. വ്യാസം 3 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്രയാണെന്ന് അളക്കാതെ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

പുതിയൊരു സംഖ്യ

വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എന്താണെന്ന ആദ്യത്തെ ചോദ്യം പരിശോധിക്കാം.

ആദ്യഭാഗത്തു കണ്ടതുപോലെ ഇങ്ങനെയൊരു വൃത്തത്തിൽ മൂലകളായി വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കിയാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ സംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം കിട്ടും. സാധാരണയായി ജിയോജിബ്രയിൽ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായാണ് സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നത്. ഇത് പതിനഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയാക്കാം (Options → Rounding) നാലു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കിട്ടും:

വശങ്ങൾ	ചുറ്റളവ്	വശങ്ങൾ	ചുറ്റളവ്
3	2.5981	15	3.1187
4	2.8284	20	3.1287
5	2.9389	25	3.1333
6	3.0000	30	3.1359
7	3.0372	35	3.1374
8	3.0615	40	3.1384
9	3.0782	45	3.1390
10	3.0902	50	3.1395

അപ്പോൾ വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 3.14 നോടടുത്ത ഒരു സംഖ്യയാണെന്നു കാണാം.

വശത്തിന്റെ നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം പോലെ തന്നെ, വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല. വികർണക്കണക്കുപോലെ ഇതു തെളിയിക്കുക അത്ര എളുപ്പമല്ല; പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് ഒരു തെളിവ് കണ്ടുപിടിച്ചത്.

$\sqrt{2}$, $2 + \sqrt{3}$ എന്നീ സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഈ സംഖ്യയ്ക്ക് ഒരു പ്രധാന വ്യത്യാസമുണ്ട്; ഇതിനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയോ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയോ മൂലങ്ങളൊന്നും ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാൻ കഴിയില്ല. ഗണിതത്തിൽ ഈ സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു പ്രത്യേക ചിഹ്നമുണ്ട്: π

ഗ്രീക്ക് ഭാഷയിലെ "പൈ" (pi) എന്ന അക്ഷരമാണിത്.

അതായത്, വ്യാസം 1 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് π സെന്റിമീറ്റർ, വ്യാസം 2 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π സെന്റിമീറ്റർ; വ്യാസം

$1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $\frac{3}{2}\pi$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, അതിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ π മടങ്ങാണ്.

പലപ്പോഴും വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നത് നിശ്ചിത ആരത്തിൽ ആയതിനാൽ ഇക്കാര്യം ആരത്തിന്റെ കണക്കായാണ് സാധാരണയായി പറയുന്നത്.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ 2π മടങ്ങാണ്.

പേരു വന്ന വഴി

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് മാറുന്നത് വ്യാസത്തിന്റെ തോതിലാണെന്ന് അറിഞ്ഞതോടെ, എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ ഒരേ മടങ്ങാണെന്ന് തിരിച്ചറിഞ്ഞു. എത്ര മടങ്ങ്, എന്നായി പിന്നീടുള്ള അന്വേഷണം.

ആദ്യകാലത്ത് ഈ സംഖ്യയുടെ ഏകദേശവിലകളായ ഭിന്നസംഖ്യകളാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. വിവിധ ദേശങ്ങളിൽ, വിവിധ കാലത്ത്, ഇത്തരം ഏകദേശവിലകൾ കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെട്ടു. ഈ സംഖ്യ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ലെന്ന് തെളിയിച്ചത് വളരെക്കാലത്തിനുശേഷമാണെങ്കിലും, ഇക്കാര്യം നേരത്തെതന്നെ തിരിച്ചറിഞ്ഞിട്ടുണ്ടാകണം.

ഈ വൃത്തസംഖ്യയ്ക്ക് π എന്ന പേരിട്ടത് എ.ഡി. 1707 ൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ വില്യം ജോൺസ് എന്ന (അത്രയൊന്നും പ്രസിദ്ധനല്ലാത്ത) ഗണിതകാരനാണ്.

സ്വിറ്റ്സർലാണ്ടിൽ ജനിച്ച പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ലിയോൺഹാർഡ് ഓയ്‌ലെർ (Leonhard Euler) അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൃതികളിൽ ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങിയതോടെയാണ്, ഈ ചിഹ്നത്തിനു പ്രചാരം ലഭിച്ചതും, അത് ഉറച്ചതും.

ഭിന്നസംഖ്യ അല്ലാത്തതിനാൽ, π യോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാനേ കഴിയൂ. ബി.സി മൂന്നാംനൂറ്റാണ്ടിൽ, ഗ്രീസിലെ ആർക്കിമീഡീസ് 96 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജമുപയോഗിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ $3\frac{10}{71}$ മടങ്ങിനേക്കാൾ കൂടുതലും $3\frac{1}{7}$ മടങ്ങിനേക്കാൾ കുറവുമാണെന്ന് കണക്കാക്കി. ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, നാലു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ.

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$

(ആർക്കമിഡീസ് നിശ്ചയിച്ച $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ആണ്, ഏറെക്കാലം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്)

എ.ഡി. പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കേരളത്തിലെ മാധവൻ, എത്ര കൃത്യതയിലും π കണക്കാക്കാൻ, ജ്യാമിതി ഉപയോഗിക്കാതെ തികച്ചും സംഖ്യാപരമായ ഒരു മാർഗം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

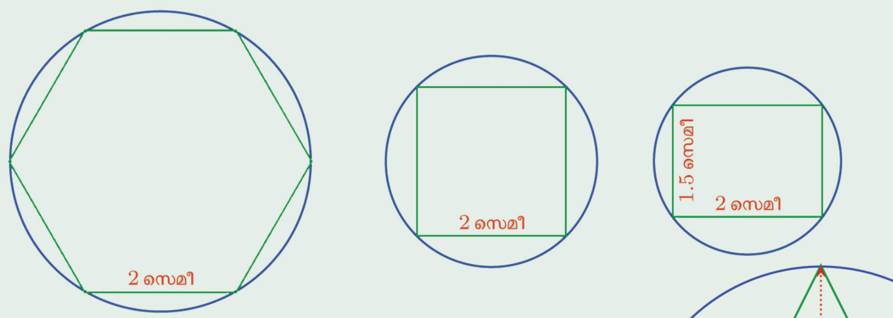
എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങളിൽ സാധാരണയായി നാലു ദശാംശം വരെ മാത്രമേ π ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരാറുള്ളു. ഉദാഹരണമായി, ആരം 5 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കിയാൽ

$$\pi \times 2 \times 5 \approx 31.416 \text{ മീറ്റർ}$$

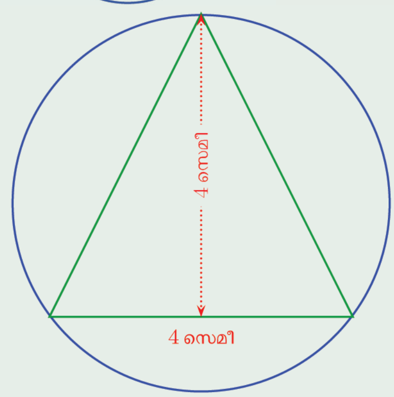
ഇനിയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം, ചുറ്റളവ് π യുടെ ഗുണിതമായി എഴുതിയാൽ മതി.

(1) ചുവടെ ചിത്രങ്ങളിൽ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തങ്ങളിലായ സമഷഡ്ഭുജം, സമചതുരം, ചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു. വൃത്തങ്ങളുടെയെല്ലാം ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

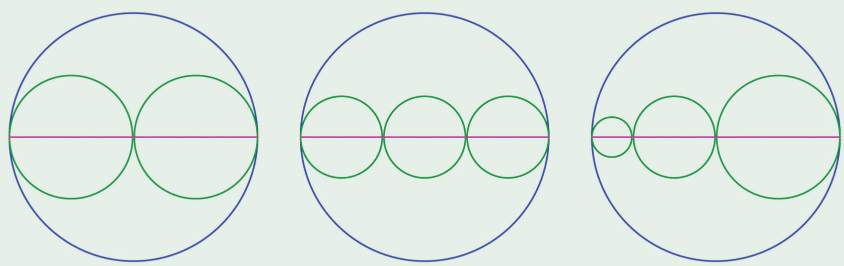


(2) ചിത്രത്തിൽ, വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്രയാണ്?

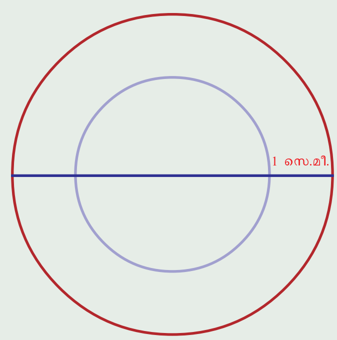


(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലെല്ലാം, വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ ഒരേ വരയിലാണ്. ആദ്യത്തെ രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിൽ, ചെറിയ വൃത്തങ്ങൾക്ക് ഒരേ വ്യാസമാണ്:



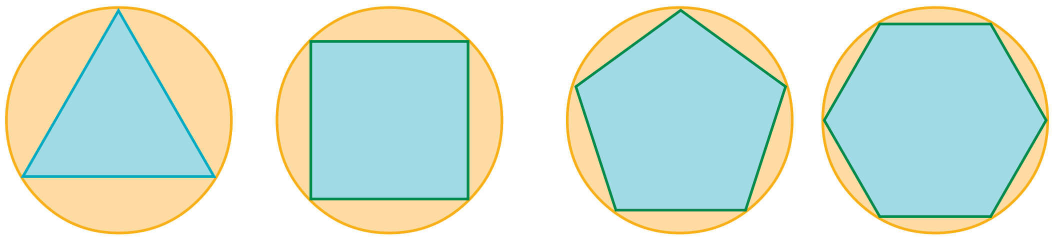
എല്ലാ ചിത്രങ്ങളിലും, ചെറിയ വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകളുടെ തുകയാണ് വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ, ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ചിത്രത്തിലെ വര, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്. വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

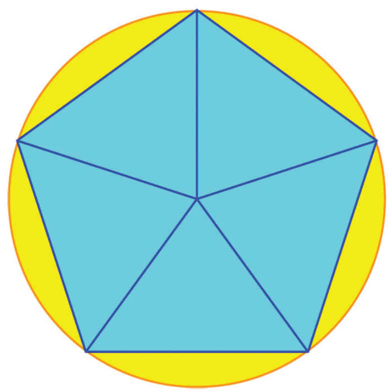


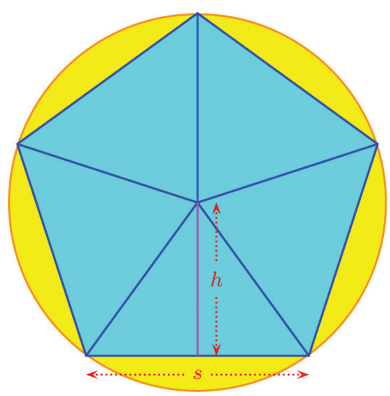
പരപ്പളവ്

വൃത്തത്തിനകത്തെ സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അതിന്റെ ചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുക്കുന്നതുപോലെ, അതിന്റെ പരപ്പളവ് വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോടും അടുക്കും:



വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, അതിനുള്ളിലെ സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കൂടുന്നു എന്നു കണക്കാക്കിയാൽ മതി. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ബഹുഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ബഹുഭുജത്തിനെ തുല്യത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടും.





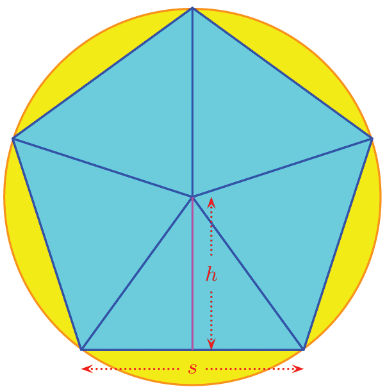
പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം s എന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നുമെടുത്താൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}sh$

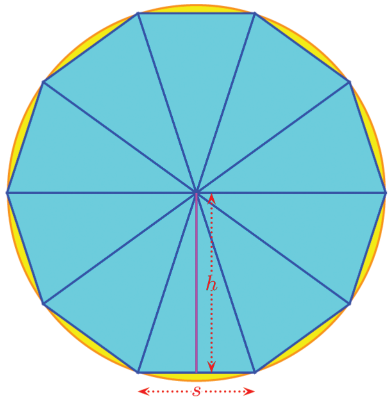
ഇത്തരം അഞ്ചു ത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് പഞ്ചഭുജം; അതിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ്

$$5 \times \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2} \times 5s \times h$$

ഇതിലെ s എന്നത് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ, $5s$ എന്നത് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്; ഇതിനെ p എന്നെഴുതിയാൽ, പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ph$

സമപഞ്ചഭുജത്തിനു പകരം, ഏതു സമബഹുഭുജമെടുത്താലും അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഇതുപോലെ ചുറ്റളവിന്റെയും കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബനീളത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു കാണാം. വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ ബഹുഭുജം മാറുമ്പോൾ, ചുറ്റളവും, ഈ ലംബനീളവും മാറും:





വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണം മുതലുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ ക്രമമായി $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരു വശത്തേക്കുള്ള ലംബനീളങ്ങൾ $h_1, h_2, h_3, \ldots$ എന്നുമെടുത്താൽ, പരപ്പളവുകൾ $\frac{1}{2}p_1h_1$, $\frac{1}{2}p_2h_2$, $\frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയാകും.

ഇവയിലെ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നീ ചുറ്റളവുകൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്ത് വരും; $h_1, h_2, h_3, \ldots$ എന്നീ ലംബനീളങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിനോട് അടുത്തടുത്തു വരും. അതിനാൽ, ഇവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും, ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും. ഗുണനഫലങ്ങളുടെ പകുതിയോ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ജ്യാമിതീയമായി നോക്കുമ്പോൾ വൃത്തത്തിനകത്തെ സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോട് അടുക്കുന്നു എന്നു കാണാം; ഇക്കാര്യം സംഖ്യാപരമായി വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ഈ പരപ്പളവുകൾ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയോട് അടുക്കുന്നു. എന്നു മനസിലാക്കാം. ഇതിൽനിന്ന് പരപ്പളവിനെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

π കേരളത്തിൽ

പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കേരളത്തിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന, ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞനും ഗണിതകാരനുമായിരുന്ന മാധവൻ (സംഗമഗ്രാമ മാധവൻ) π യോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച മാർഗം ഗണിത ചരിത്രത്തിലെ ഒരു വഴിത്തിരിവാണ്.

$$1, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$$

എന്നിങ്ങനെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ കൂട്ടിയും കുറച്ചും തുടർന്നാൽ $\frac{\pi}{4}$നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്ന് അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇതെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്

$$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ സ്കോട്ട്ലാൻഡിലെ ഗ്രിഗറി, ജർമനിയിലെ ലൈബ്നിറ്റ്സ് എന്നിവർ ഇതേ രീതി തന്നെ അവരുടേതായ രീതികളിൽ വീണ്ടും കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായി).

ഈ രീതിയിൽക്കിട്ടുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ വളരെ പതുക്കെയാണ് π യെ സമീപിക്കുന്നത് എന്നൊരു പോരായ്മയുണ്ട്. ആർക്കിമിഡീസ് കണ്ടുപിടിച്ച ഭിന്നസംഖ്യയിലെത്താൻ ഏതാണ്ട് 4000 സംഖ്യകളുടെ ഇത്തരത്തിലുള്ള തുക വേണ്ടി വരും. എന്നാൽ മാധവൻ തന്നെ

$$\frac{1}{\sqrt{12}}\pi = 1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{5\times3^2}-\frac{1}{7\times3^3}+\cdots$$

എന്ന പുതുക്കിയ രീതി ഉപയോഗിച്ച്, $\pi \approx 3.14159265359$ എന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു.

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, അതിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

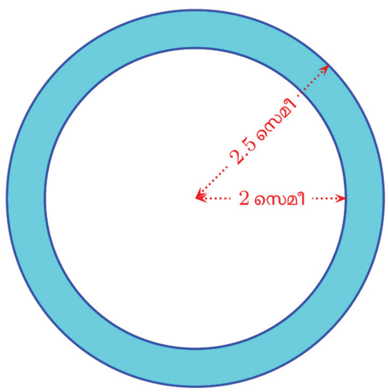
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ ചുറ്റളവ് $2\pi r$ എന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരവർഗത്തിന്റെ π മടങ്ങാണ്.

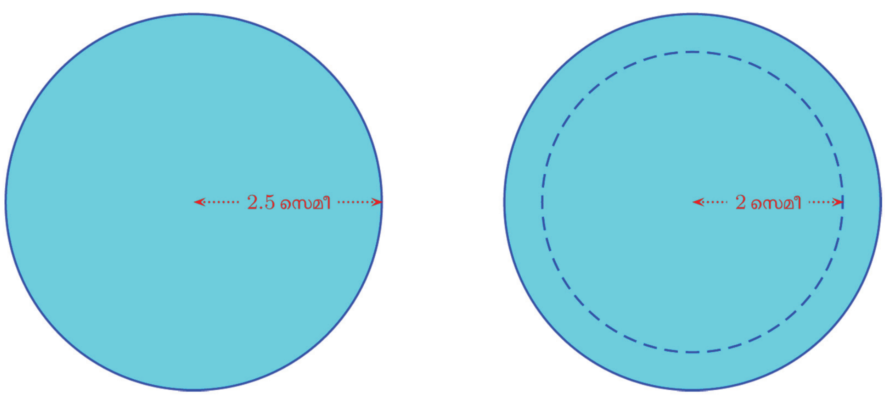
ഉദാഹരണമായി, ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 25π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ചിത്രം നോക്കൂ.



ഈ വൃത്തവലയത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

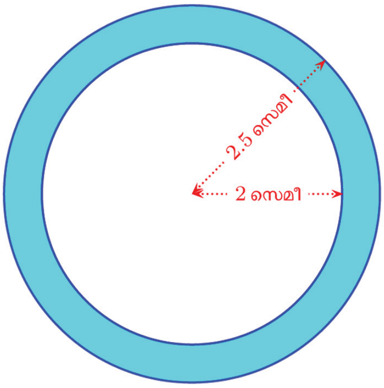
ഒരു വലിയ വൃത്തത്തിൽനിന്ന് ഒരു ചെറിയ വൃത്തം മുറിച്ചു മാറ്റിയതായി ഇതിനെ കാണാമല്ലോ.

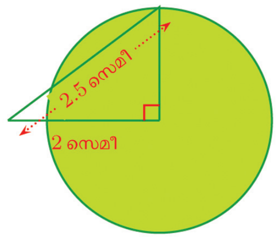


അപ്പോൾ വലയത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$6.25\pi - 4\pi = 2.25\pi \text{ ച.സെ.മീ.}$$

ഇനി ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു മട്ടത്രികോണവും ഒരു വൃത്തവും വരച്ചാലോ?



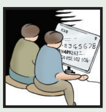


പുതിയ വൃത്തത്തിന്റെയും വലയത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

കണക്ക്, കമ്പ്യൂട്ടർ, π

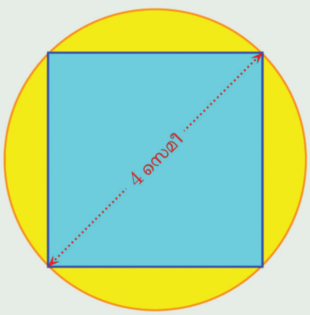
ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഭാരതത്തിലെ പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ശ്രീനിവാസ രാമാനുജൻ, π യോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മാധവന്റെ മാർഗം പോലെയുള്ള അനേകം രീതികൾ കണ്ടുപിടിച്ചു.

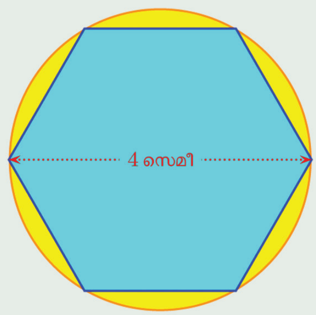
ഇവയിൽ ചിലത് കമ്പ്യൂട്ടറിൽ ഉപയോഗിച്ച്, 1989 ൽ നൂറു കോടിയിലധികം ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇന്നത് ഏതാണ്ട് 10^{13} സ്ഥാനങ്ങൾ വരെയായിട്ടുണ്ട്.



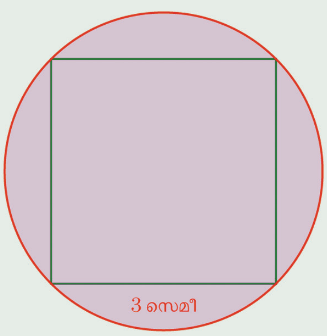
?

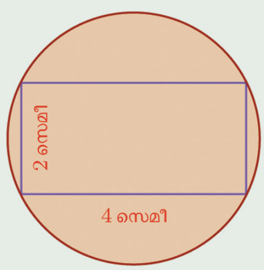
(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ, വൃത്തത്തിന്റെയും ബഹുഭുജത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കണക്കാക്കുക.





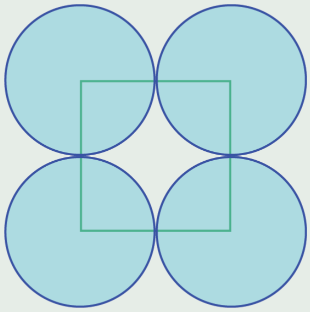
(2) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചത് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

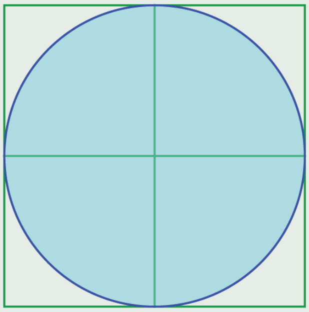




രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

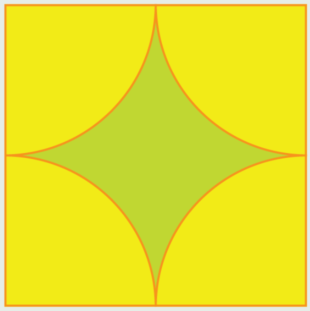
(3) ഒരു സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ നാലു മൂലകൾ കേന്ദ്രമായും, വശത്തിന്റെ പകുതി ആരമായും വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്ന സമചതുരം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽ കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

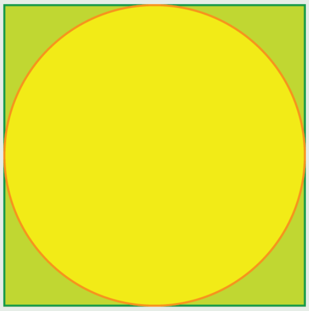




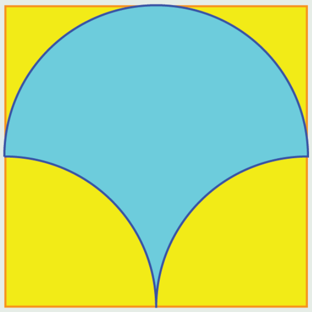
വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് നാലു ചെറുവൃത്തങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ചുവടെയുള്ള രണ്ട് ചിത്രങ്ങളിലെയും സമചതുരങ്ങൾക്ക് ഒരേ വലുപ്പവുമാണ്. പച്ച ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.





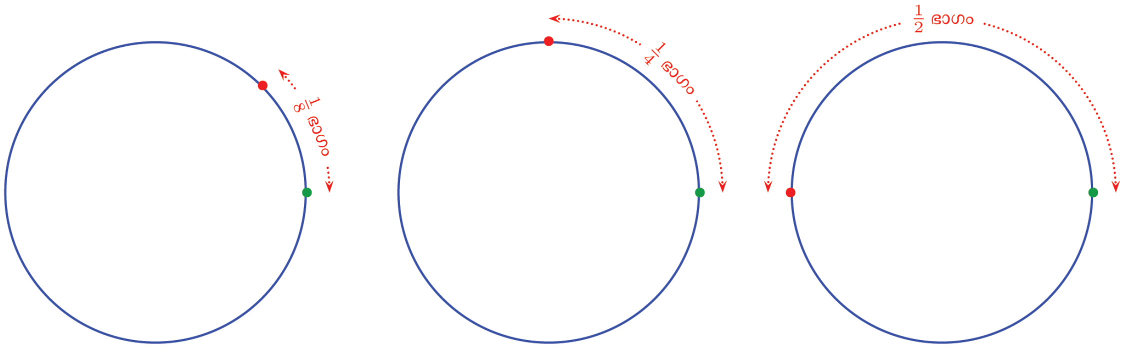
(5) ഒരു സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.



ചിത്രത്തിൽ നീലനിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

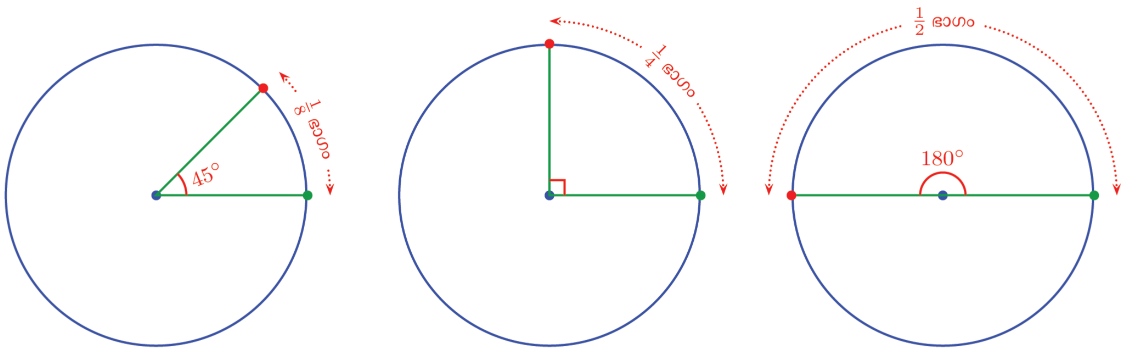
നീളവും കോണും

ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങി, വൃത്തത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു സങ്കൽപ്പിക്കുക. സഞ്ചാരത്തിന്റെ പല സമയത്തുള്ള ചിത്രങ്ങളാണിവ.



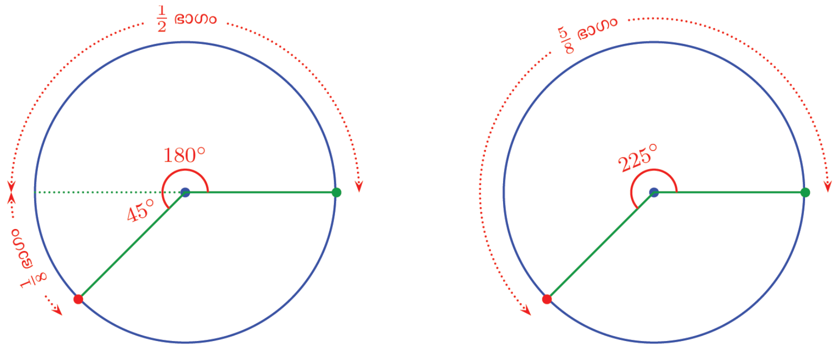
ഈ സഞ്ചാരം ഒരു കറക്കമായതിനാൽ, വൃത്തത്തിലൂടെ എത്ര ദൂരം നീങ്ങി എന്നതിനു പകരം, വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ എത്ര ഡിഗ്രി തിരിഞ്ഞു എന്നു പറയാം.

വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ എടുത്തതും, $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ $360^\circ \div 4 = 90^\circ$ എടുത്തതുമെല്ലാം ഓർമയുണ്ടോ? (ആറാംക്ലാസിലെ **കോണുകൾ** എന്ന പാഠം)



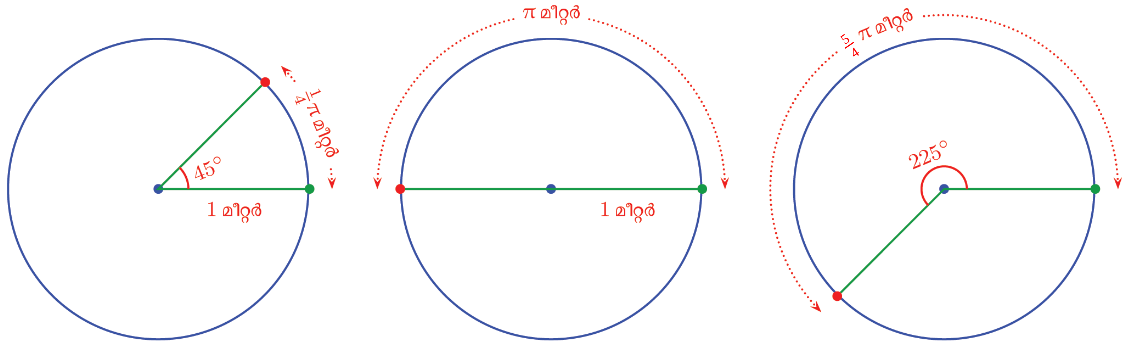
അങ്ങനെ സഞ്ചാരം നീളമായും, കോണായും പറയാം. അപ്പോളൊരു ചോദ്യം. വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി കഴിഞ്ഞ്, വീണ്ടുമൊരു എട്ടിലൊരു ഭാഗം നീങ്ങുമ്പോൾ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ ഭാഗം; ഇത് തിരിവായി എങ്ങനെ പറയും?

വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം 180°; $\frac{1}{8}$ ഭാഗമെന്നാൽ 45°; അപ്പോൾ 180° തിരിഞ്ഞുകഴിഞ്ഞ്, വീണ്ടും 45° യും കൂടി തിരിഞ്ഞു: ആകെ $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ തിരിഞ്ഞുവെന്നു പറയാം:



ഇങ്ങനെ വൃത്തം മുഴുവൻ ചുറ്റി തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തെത്തുന്നതു വരെയുള്ള യാത്രയിലെ ഓരോ സമയത്തും എത്ര സഞ്ചരിച്ചു എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളായോ, തിരിവിന്റെ അളവായി 360° വരെയുള്ള കോണുകളായോ പറയാം.

ഇതിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 മീറ്റർ എന്നു കൂടി എടുത്താലോ? വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π മീറ്റർ, അപ്പോൾ ദൂരങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗത്തിനു പകരം നീളമായിത്തന്നെ പറയാം.

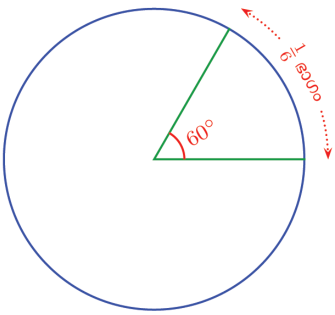


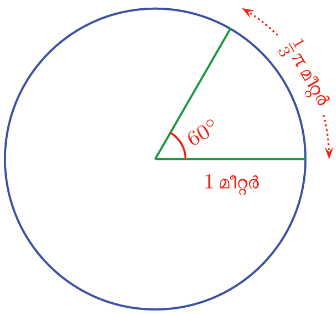
അങ്ങനെ ഓരോ സമയത്തും എത്ര ദൂരം നീങ്ങിയെന്നു മീറ്ററായി പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ എത്ര തിരിഞ്ഞുവെന്നു ഡിഗ്രിയായും പറയാം.

60° തിരിയുമ്പോൾ, വൃത്തത്തിലൂടെ എത്ര മീറ്റർ നീങ്ങും?

വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം നീങ്ങിയെന്ന് ആദ്യം നോക്കാം. 1° എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗമാണല്ലോ. അപ്പോൾ 60° എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ

$60 \times \frac{1}{360} = \frac{1}{6}$ ഭാഗം; വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π മീറ്ററായതിനാൽ, ഇത് $\frac{1}{3}\pi$ മീറ്റർ:

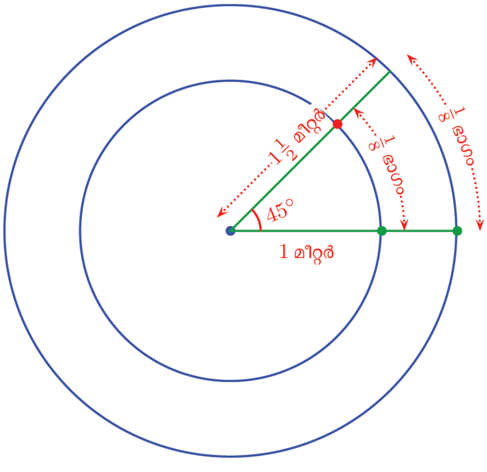


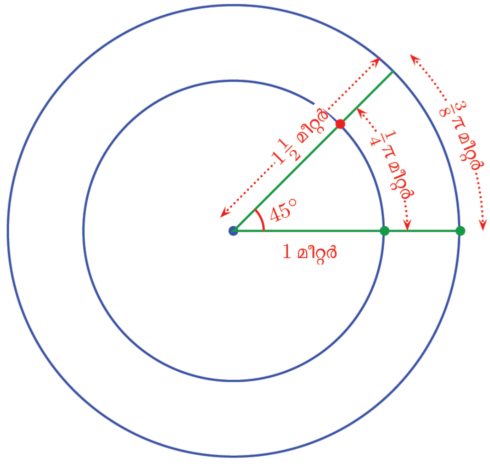


പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ തിരിഞ്ഞത്, 2π മീറ്ററിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങിയത്,

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററാക്കിയാലോ? ചുറ്റളവ് 3π മീറ്ററാകും. അപ്പോൾ തിരിവിനനുസരിച്ച് നിങ്ങിയ ദൂരം കണക്കാക്കാൻ, 3π മീറ്ററിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ എടുക്കണം. അതായത്, തിരിയുന്നതിനനുസരിച്ചുള്ള വൃത്തഭാഗങ്ങൾക്കു മാറ്റമില്ലെങ്കിലും, നീളങ്ങളുടെ മീറ്റർ കണക്ക് മാറും.

ഉദാഹരണമായി. 45° തിരിയുമ്പോൾ, ഈ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം തന്നെയാണ് നീങ്ങുന്നത്; പക്ഷേ, വൃത്തം വലുതായതിനാൽ നീങ്ങിയ ദൂരം $\frac{3}{8}\pi$ മീറ്റർ ആകും.



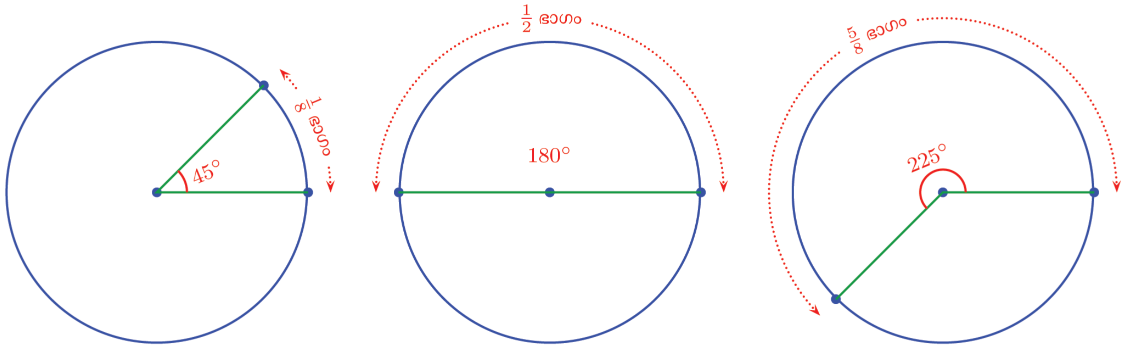


പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

> ആരം r മീറ്ററായ വൃത്തത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് x° തിരിയുമ്പോൾ, വൃത്തത്തിലൂടെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം $2\pi r \times \frac{x}{360}$ മീറ്റർ.

ഇനി ഇക്കാര്യം കണക്കുഭാഷയിലെങ്ങനെയാണ് പറയുന്നതെന്നു നോക്കാം. ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ഭാഗത്തിനു ചാപം (arc) എന്നാണു പറയുന്നത്; ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന ആരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണിനെ, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ (central angle) എന്നും.

അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 45°, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180°, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 225° എന്നെല്ലാം പറയാം.



വൃത്തത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരത്തിന്റെ തത്വം, വൃത്തത്തിന്റെ കേവലഗണിത തത്വമാക്കാം:

> ആരം r ആയ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ x° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം $2\pi r \times \frac{x}{360}$.

മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

> **ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ, ചുറ്റളവിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് ചാപത്തിന്റെ നീളം**

ഉദാഹരണമായി, ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

ഇതു മനസിൽത്തന്നെ ചെയ്യാം. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, 6π സെന്റിമീറ്റർ. 60° എന്നത് 360° യുടെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമായതിനാൽ, ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് ചാപം. അപ്പോൾ അതിന്റെ നീളം π സെന്റിമീറ്റർ.

ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 50° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളമോ?

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 5π സെന്റിമീറ്റർ; അതിന്റെ $\frac{50}{360}$ ഭാഗമാണ് ചാപത്തിന്റെ നീളം, അതായത്

$$5\pi \times \frac{50}{360} = \frac{25}{36}\pi \approx 2.2 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം. ആരം 9 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ഇരുമ്പുവട്ടത്തിൽ നിന്ന്, കേന്ദ്രകോൺ 30° ആയ ഒരു കഷണം മുറിച്ചെടുത്തു. ഇതു വളച്ച് ചെറിയൊരു വട്ടമുണ്ടാക്കി. ചെറുവട്ടത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

കേന്ദ്രകോൺ 30° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$; അതായത്, മുറിച്ചെടുത്ത കഷണത്തിന്റെ നീളം $18\pi \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}\pi$ സെന്റിമീറ്റർ. ഇതാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്; അപ്പോൾ അതിന്റെ ആരം $\frac{3}{2}\pi \div 2\pi = \frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ

കുറെക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു കണക്കാക്കാം. വലിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗമാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്. ആരവും ചുറ്റളവും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായതിനാൽ, വലിയ വട്ടത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗം തന്നെയാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ആരം: അതായത്, $9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ.

(1) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 40° ആയ ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം 3π സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്? ആരമോ?

(2) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 25° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

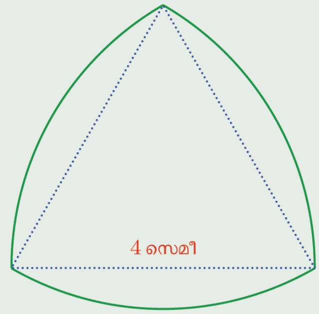
- i) ഇതേ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 75° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?
- ii) ആരം ഇതിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 75° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

(3) ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വളയിൽനിന്ന് ഒരു കഷണം മുറിച്ചെടുത്ത്, ആരം $\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററായ മോതിരമുണ്ടാക്കണം.

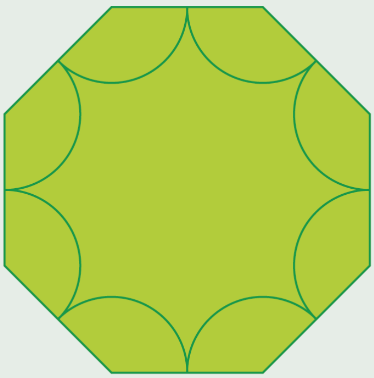
- i) മുറിച്ചെടുക്കുന്ന കഷണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയായിരിക്കണം?
- ii) വളയുടെ മിച്ചമുള്ള ഭാഗം കൊണ്ട് അൽപം ചെറിയ മറ്റൊരു വളയുണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ആരം എത്രസെന്റിമീറ്ററാണ്?

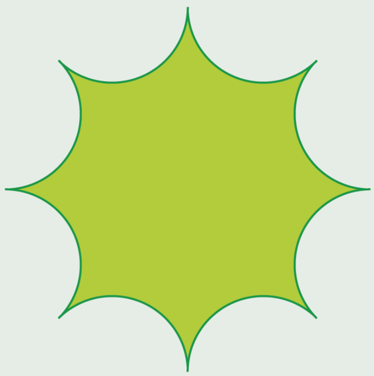
(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂല കേന്ദ്രമായും മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരച്ച ചിത്രം നോക്കുക.

ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?



(5) ഒരു സമ അഷ്ടഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായി വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരച്ച്, ചുവടെക്കാണുന്ന രൂപം വെട്ടിയെടുക്കുന്നു.

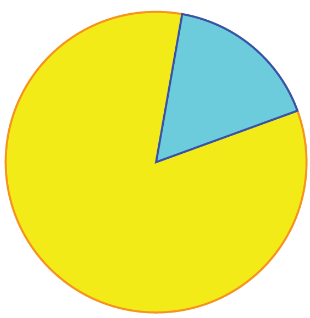




വെട്ടിയെടുത്ത രൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

കോണും പരപ്പളവും

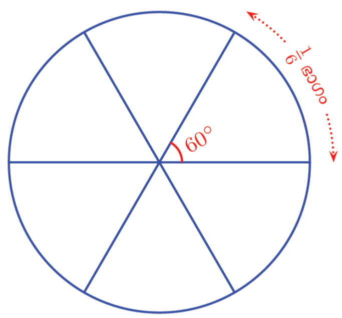
വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ് ചാപം. ഒരു ചാപവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽക്കൂടിയുള്ള ആരങ്ങളും ചേർന്നാൽ വൃത്തപ്പരപ്പിന്റെ ഒരു ഭാഗമാകും.

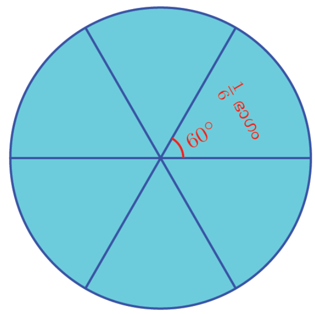


ഇത്തരമൊരു വൃത്തഭാഗത്തെ വൃത്താംശം (sector) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതിലെ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിനെ വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്നു പറയുന്നു.

കേന്ദ്രകോൺ മാറുന്നതിനുസരിച്ച്, ചാപത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതുപോലെ, വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും മാറും. രണ്ടിന്റെയും കണക്ക് ഒരു പോലെയാണ്. ഉദാഹരണമായി കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റള

വിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ്; കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗവും.





ഇതുപോലെ, കേന്ദ്രകോൺ 1° ആയ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗവും, കേന്ദ്രകോൺ 1° ആയ വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗവുമാണ്.

അപ്പോൾ കേന്ദ്രകോണും ചാപത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധംപോലെ കേന്ദ്രകോണും വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും ഇങ്ങനെ പറയാം.

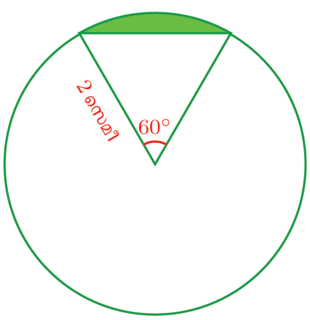
ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ, 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയും പറയാം.

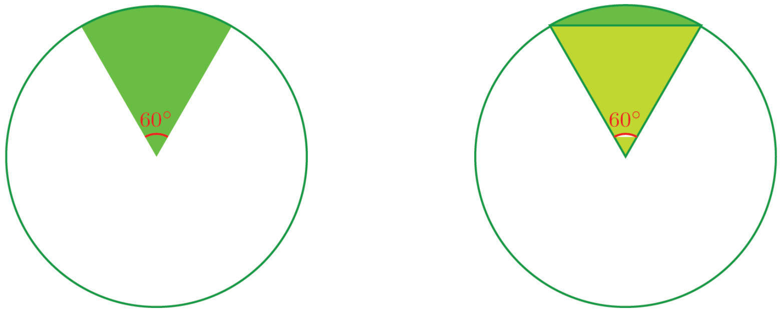
ആരം r ആയ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ x° ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

ഉദാഹരണമായി, ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 40° ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ ഭാഗമാണ്; വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 9π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കുക. ചിത്രത്തിലെ നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?



വൃത്താംശത്തിൽനിന്നൊരു ത്രികോണം മാറ്റിയാൽ ഈ ഭാഗം കിട്ടുമല്ലോ.

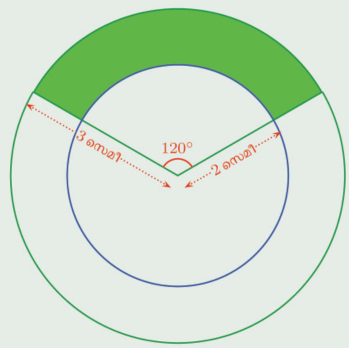


വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗം; അതായത്, $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

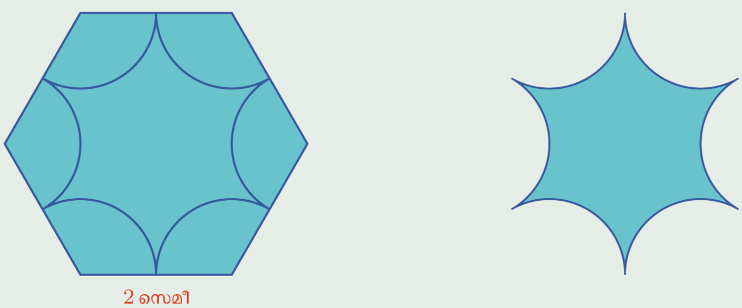
ത്രികോണം സമഭുജമാണ് (കാരണം?) അതിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

(1) ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്? ആരം 6 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ ഇതുതന്നെയായ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

(2) ചിത്രത്തിലെ പച്ചനിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക

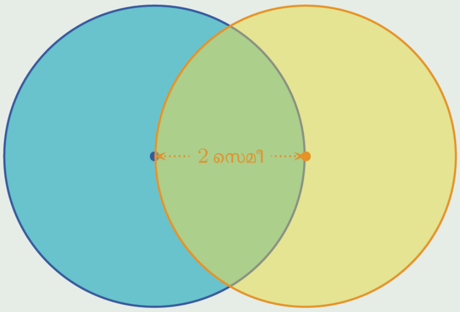


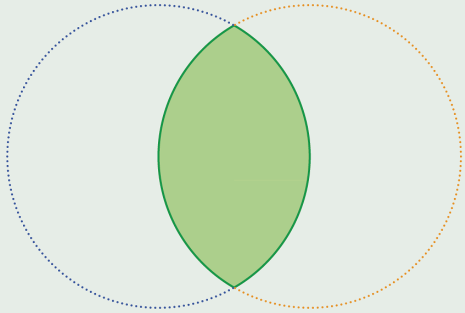
(3) ഒരു സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായി വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരച്ച്, ചുവടെകാണുന്ന രൂപം വെട്ടിയെടുക്കുന്നു.



മുറിച്ചെടുത്ത രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

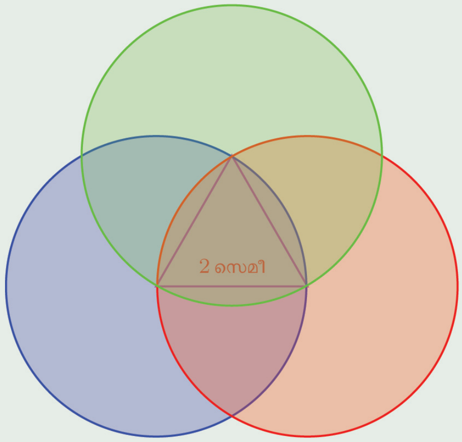
(4) രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിൽ ഓരോന്നും മറ്റൊന്നിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ചിത്രമാണ് ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്നത്;





രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിലും ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(5) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയും കേന്ദ്രമായി, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരച്ച ചിത്രമാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

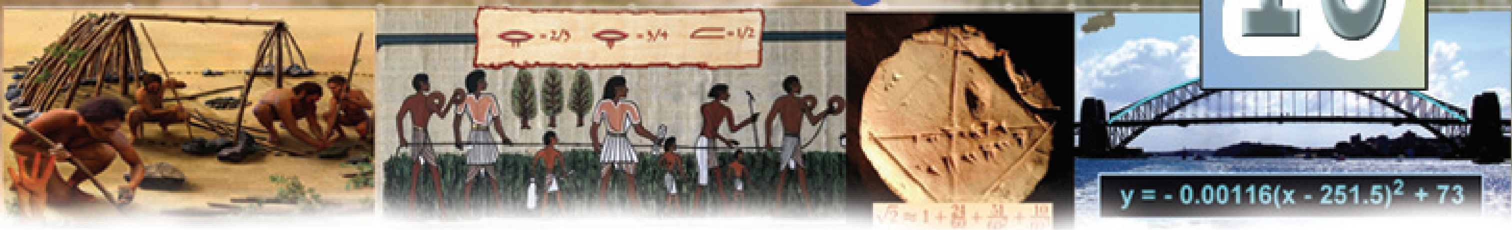


മൂന്നു വൃത്തങ്ങളിലും ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്കുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന, വശങ്ങളുടെ എണ്ണം തുല്യമായ, സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസങ്ങളുടെ അംശബന്ധംതന്നെയാണെന്നു തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്കുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് അവയുടെ ചുറ്റളവുകൾക്ക് വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകളുമായുള്ള ബന്ധം വ്യാഖ്യാനിച്ച്, വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ മാറുന്നത് വ്യാസങ്ങളുടെ തോതിലാണെന്ന് കണ്ടെത്തുന്നു.			
• π എന്ന സംഖ്യയെ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടി, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നു.			
• വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, ചുറ്റളവും, പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സ്ഥാപിക്കുന്നു.			
• വൃത്തത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളവും, വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും കേന്ദ്രകോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വിശദീകരിക്കുന്നു.			

10 രേഖീയസംഖ്യകൾ

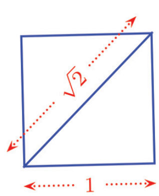


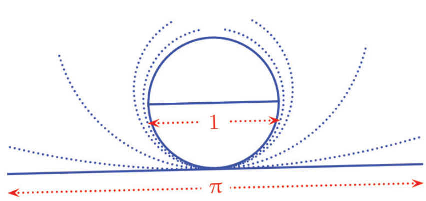
രണ്ടുതരം സംഖ്യകൾ

വരകളുടെ നീളങ്ങളെ സംഖ്യകളായി പറയുന്നതെങ്ങനെയാണ്? ഏതെങ്കിലും ഒരു നിശ്ചിത നീളം 1 എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളത്തെ 2 എന്നും, പകുതി നീളത്തെ $\frac{1}{2}$ എന്നും, അതിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങ് നീളത്തെ $1\frac{1}{2}$ എന്നുമൊക്കെ പറയാം.

ഇങ്ങനെ 1 എന്നെടുക്കുന്ന നീളത്തെ, നീളത്തിന്റെ ഒരു ഏകകം (unit of length) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത്തരമൊരു ഏകകം നിശ്ചയിക്കുന്നതോടെ, മറ്റു പല നീളങ്ങളെയും ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ എണ്ണൽസംഖ്യകളായും ഭിന്നസംഖ്യകളായും പറയാം.

പക്ഷേ ഈ ഏകകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളായോ, ഭിന്നസംഖ്യകളായോ പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വശത്തിന്റെ നീളം ഈ ഏകകമായ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം, ഈ ഏകകം വ്യാസമായ വൃത്തം നിവർത്തിയ വരയുടെ നീളം:





അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളും കേവലസംഖ്യകളുടെ ക്രിയാബന്ധങ്ങളുമെല്ലാം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുമ്പോൾ സൗകര്യത്തിനായി ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ **ഉപയോഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം) അപ്പോൾ, $\sqrt{2}$, π പോലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനമായ $-\sqrt{2}$, $-\pi$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളും ആവശ്യമുണ്ട്.

എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും, ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കും അവയുടെ ന്യൂനങ്ങൾക്കും പൂജ്യത്തിനുമെല്ലാം പൊതുവായി ഭിന്നകസംഖ്യകൾ (rational numbers) എന്നു പറയുന്നു. ഇങ്ങനെ അല്ലാത്ത സംഖ്യകളെയെല്ലാം അഭിന്നകസംഖ്യകൾ (irrational numbers) എന്നും പറയുന്നു.

എണ്ണൽസംഖ്യകളെയും ഭിന്നരൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 5 നെ $\frac{5}{1}$ എന്നോ, $\frac{10}{2}$ എന്നോ പലതരത്തിൽ എഴുതാം. അംശമോ ഛേദമോ ന്യൂന എണ്ണൽസംഖ്യയായെടുത്ത്, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ന്യൂനങ്ങളെയും ഭിന്നരൂപത്തിലെഴുതാം. പൂജ്യത്തിനെ $\frac{0}{1}$ എന്നും എഴുതാം. അപ്പോൾ ഭിന്നകങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു രൂപമുണ്ട്: x, y എണ്ണൽസംഖ്യകളോ അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളോ ആയ $\frac{x}{y}$. ഇതിൽ x പൂജ്യവുമാകാം. എന്നാൽ അഭിന്നകങ്ങളിൽ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ പോലുള്ള വർഗമൂലങ്ങളും, ഭിന്നകങ്ങളുടെ ക്രിയകളായൊന്നും പറയാൻ കഴിയാത്ത π പോലുള്ള സംഖ്യകളുമെല്ലാമുണ്ട്; നിയതമായ ഒരു പൊതുരൂപത്തിലും അവയെ തളയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

വേറെയുമുണ്ട് വ്യത്യാസങ്ങൾ, രണ്ടു ഭിന്നകങ്ങളുടെ തുകയും, വ്യത്യാസവും, ഗുണനഫലവും, ഹരണഫലവുമെല്ലാം ഭിന്നകസംഖ്യകൾതന്നെ (തെളിയിക്കാമോ?)

എന്നാൽ, രണ്ട് അഭിന്നകസംഖ്യകളുടെ തുക ഭിന്നകമോ, അഭിന്നകമോ ആവാം. ഉദാഹരണമായി $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ അഭിന്നകമാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. അതിന്

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

എന്നെടുക്കുക

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

എന്നു കണക്കാക്കാം (**പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ, **ഹരണം** എന്ന ഭാഗം). അപ്പോൾ

$$a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$$

എന്നും, അതിൽ നിന്ന്

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) = \sqrt{3}$$

എന്നും കാണാം. ഇനി a ഭിന്നകസംഖ്യയാണെങ്കിൽ $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ ഉം ഭിന്നകസംഖ്യതന്നെ; പക്ഷേ $\sqrt{3}$ ഭിന്നകസംഖ്യയല്ല. അതിനാൽ, a യും ഭിന്നകസംഖ്യ അല്ല. അതായത്, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ അഭിന്നകസംഖ്യയാണ്. ഇതുപോലെ

$1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$ ഇവ രണ്ടും അഭിന്നകമാണെന്നു കാണാം. എന്നാൽ ഇവയുടെ തുക 2 ആണ്, അതൊരു ഭിന്നകസംഖ്യയുമാണ്.

ഒരു അഭിന്നകസംഖ്യയുടെയും, ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യയുടെയും തുക അഭിന്നകമാണെന്നു തെളിയിക്കുക എളുപ്പമാണ്. a എന്ന ഒരു അഭിന്നകസംഖ്യയും, b എന്ന ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യയുമെടുക്കുക. ഇവയുടെ തുക c എന്നെടുത്താൽ, $a + b = c$ എന്നും, അതിൽനിന്ന്

$$c - b = a$$

എന്നുമെഴുതാമല്ലോ. ഇതിൽ b ഭിന്നകമാണ്, ഇനി c യും ഭിന്നകമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വ്യത്യസമായ $c - b$ യും ഭിന്നകമാകും, പക്ഷേ ഈ വ്യത്യാസം, അഭിന്നകമായ a ആണല്ലോ. അപ്പോൾ c ഭിന്നകമല്ല. അഭിന്നകമാണ്.

(1) ഭിന്നകസംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപമുപയോഗിച്ച്, ഏതു രണ്ടു ഭിന്നകസംഖ്യകളുടെയും തുകയും, വ്യത്യാസവും, ഗുണനഫലവും ഹരണഫലവും ഭിന്നകസംഖ്യതന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

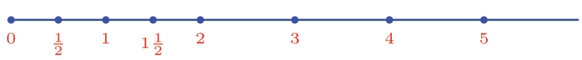
(2) ഏത് അഭിന്നകസംഖ്യയുടെയും, പൂജ്യമല്ലാത്ത ഭിന്നകസംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലം അഭിന്നകസംഖ്യയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) വ്യത്യസ്തമായ രണ്ടു അഭിന്നകസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഭിന്നകസംഖ്യ ആകുന്ന ഒരു ഉദാഹരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ബിന്ദുക്കളും സംഖ്യകളും

ഭിന്നകങ്ങളെയും, അഭിന്നകങ്ങളെയുമെല്ലാം ചേർത്ത് സംഖ്യകളെ പൊതുവായി രേഖീയസംഖ്യകൾ (real numbers) എന്നു പറയുന്നു.

എന്തുകൊണ്ട് ഈ പേര് എന്നു നോക്കാം. ഒരു വരയുടെ ഇടത്തെ അറ്റത്ത് ഒരു ബിന്ദുവും അതിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് മറ്റൊരു ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 1 (ഏകകം) ആയെടുത്ത്, വലതുവശത്തുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും അകലം സംഖ്യകളായി എഴുതാമല്ലോ.



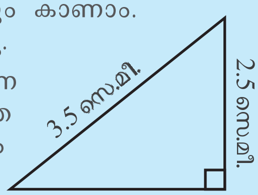
എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും അകലം അടയാളപ്പെടുത്തണമെങ്കിൽ, അഭിന്നകസംഖ്യകളും വേണ്ടിവരും.

അഭിന്നക അളവുകൾ

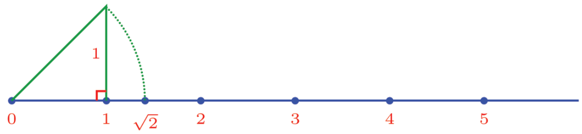
നീളങ്ങൾ മാത്രമല്ല, പരപ്പളവും വ്യാപ്തവുമെല്ലാം അഭിന്നകസംഖ്യകളായി വരാം. ഉദാഹരണമായി $\sqrt{3}$ നീളവും $\sqrt{2}$ വീതിയുമുള്ള ചതുരത്തിന്റെപരപ്പളവ് $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ ആണല്ലോ.

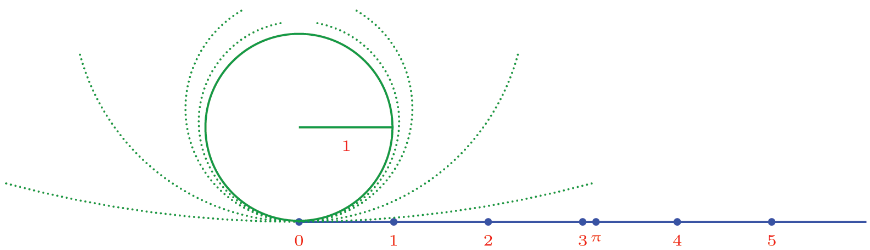
$\sqrt{6}$ നെ നീളമായും കാണാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?



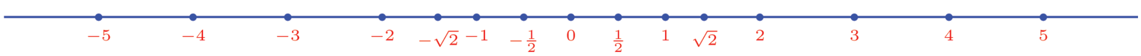
അധിസംഖ്യകളായ എല്ലാ അഭിന്നക സംഖ്യകളേയും നീളങ്ങളായി കാണുന്നത് ഒരു സൗകര്യമാണ്.





ഈ വര 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഇടത്തോട്ടും നീട്ടാമല്ലോ, ആ ഭാഗത്തെ ബിന്ദുക്കളെ എങ്ങനെ സംഖ്യകൾക്കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തും?

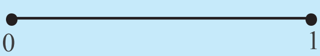
അതിന് വലതുവശത്തെ സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.



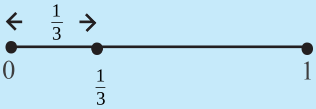
അങ്ങനെ ഈ വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളെയും രേഖീയസംഖ്യകൾകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്താം. മറിച്ച്, രേഖീയസംഖ്യകളെയെല്ലാം ഈ വരയിലെ (രേഖയിലെ) ബിന്ദുക്കളായി കാണാം.

സംഖ്യാസാന്ദ്രത

0 നും 1 നും ഇടയിൽ എത്ര സംഖ്യകളുണ്ട്? എണ്ണൽസംഖ്യകളൊന്നും തന്നെയില്ല. എന്നാൽ, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ പോലെയുള്ള ഭിന്നകസംഖ്യകളും $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\pi}$ പോലെയുള്ള അഭിന്നകസംഖ്യകളുമെല്ലാം ചേർന്ന് എണ്ണിയാൽ തീരാത്ത സംഖ്യകൾ 0 നും 1 നും ഇടയിലുണ്ടല്ലോ. ഇത് ജ്യാമിതീയമായും കാണാം. ഒരു വര വരച്ച് ഒറ്റത്ത് 0 എന്നും മറ്റേ അറ്റത്ത് 1 എന്നും എഴുതുക.



ഇനി, ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ച് ആ ബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കാം.



അപ്പോൾ വരയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും ഒരു സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വരയിലെത്ര ബിന്ദുക്കളുണ്ട്?

ഇത്തരമൊരു വരയെ സംഖ്യാരേഖ (number line അല്ലെങ്കിൽ real line) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സംഖ്യാരേഖയിൽ 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വലത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങുംതോറും സംഖ്യകൾ വലുതാകുന്നുണ്ടല്ലോ. ഇടത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങുമ്പോഴോ?

-1, -2 ഇവയിൽ ഏതാണ് വലുത്?

-1 എന്നാൽ പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് 1 കുറവ്; -2 ആയാലോ? പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് 2 കുറവ്, അതായത് -1 ൽ നിന്ന് വീണ്ടും 1 കുറവ്. അതിനാൽ -2 ആണ് -1 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യ. ഗണിതഭാഷയിൽ $-2 < -1$.

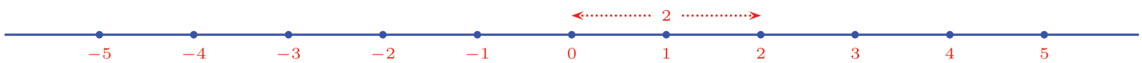
അപ്പോൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് വലത്തോട്ടു നീങ്ങുമ്പോൾ വലിയസംഖ്യകളും, ഇടത്തോട്ടു നീങ്ങുമ്പോൾ ചെറിയ സംഖ്യകളുമാണ് കാണുന്നത്.

പൂജ്യത്തിനുപകരം, ഏതു സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങിയാലും, ഇതുതന്നെയാണല്ലോ സംഭവിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ ഏതു രണ്ടു രേഖീയസംഖ്യകൾ എടുത്താലും, സംഖ്യാരേഖയിൽ ഇവയിലെ വലിയ സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനം, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ വലതു ഭാഗത്തായിരിക്കും.

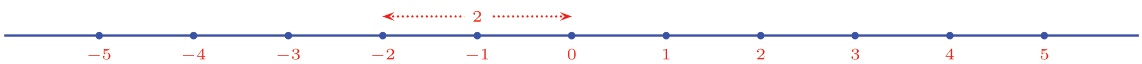
അങ്ങനെ വലുത്, ചെറുത് എന്ന സംഖ്യാബന്ധം, സംഖ്യാരേഖയിൽ വലത്, ഇടത് എന്ന ജ്യാമിതീയ ബന്ധമായി മാറുന്നു.

ഇനി സംഖ്യാരേഖയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്ന ജ്യാമിതീയ ആശയം, ഈ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തുന്ന സംഖ്യകളുപയോഗിച്ച് പറയുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ആദ്യം പൂജ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലമെടുക്കാം.

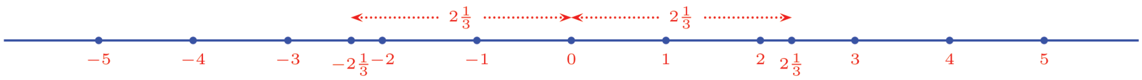
ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യകളായി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതുതന്നെ 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള അകലമനുസരിച്ചാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 2 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുവും 0 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 2.



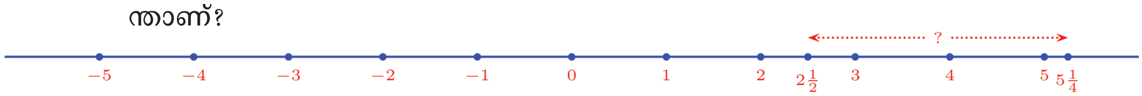
ഇതേ അകലത്തിൽ 0 എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ഇടതുവശത്തുള്ള ബിന്ദുവിനെയാണ് −2 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയത്.



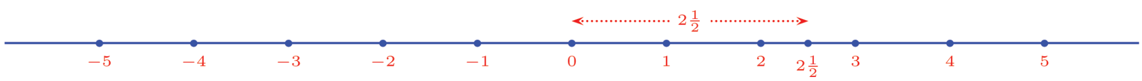
ഇതുപോലെ $2\frac{1}{3}$ എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലവും $-2\frac{1}{3}$ എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലവും $2\frac{1}{3}$ തന്നെയാണ്:

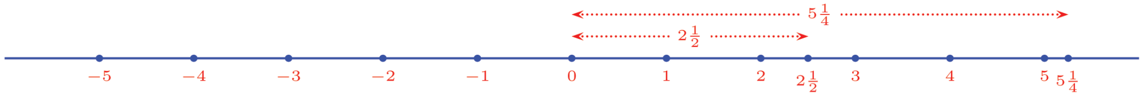


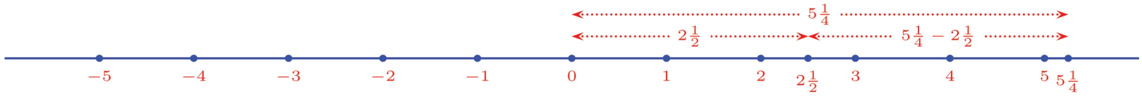
ഇനി പൊതുവേ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $2\frac{1}{2}$ എന്ന ബിന്ദുവും, $5\frac{1}{4}$ എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലമെന്താണ്?



ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം, 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഇവ ഓരോന്നിലേക്കുമുള്ള അകലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമല്ലേ?

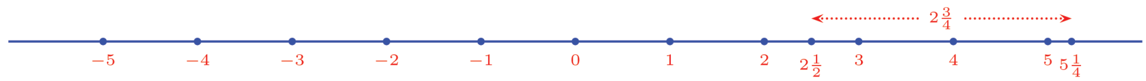






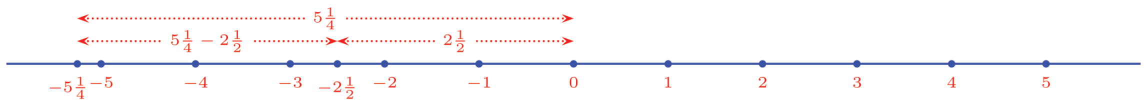
അതായത്, $2\frac{1}{2}$ എന്ന ബിന്ദുവും $5\frac{1}{4}$ എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം

$$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

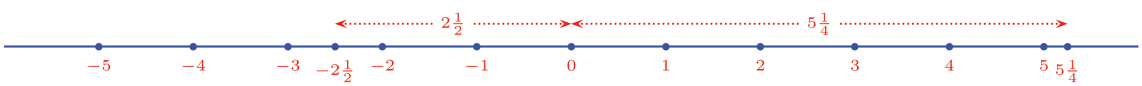


$-2\frac{1}{2}$ ഉം $-5\frac{1}{4}$ ഉം തമ്മിലുള്ള അകലമായാലോ?

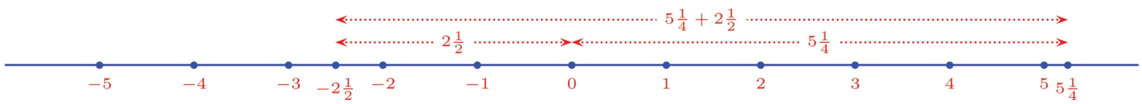
അപ്പോഴും പൂജ്യത്തിൽനിന്നുള്ള വലിയ അകലത്തിൽനിന്ന് ചെറിയ അകലം കുറച്ചാൽപ്പോരേ?



ഇനി $-2\frac{1}{2}$ ഉം $5\frac{1}{4}$ ഉം ആയാലോ?



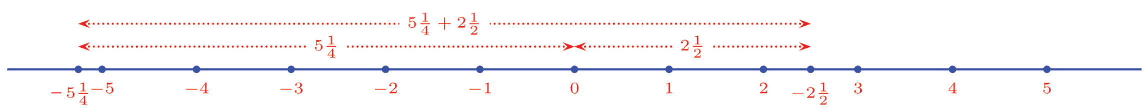
ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ പൂജ്യത്തിനിരുവശത്തും ആയതിനാൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാൻ, പൂജ്യത്തിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടണം:



അതായത്, $-2\frac{1}{2}$ ഉം $5\frac{1}{4}$ ഉം തമ്മിലുള്ള അകലം

$$2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

$2\frac{1}{2}$ ഉം $-5\frac{1}{4}$ ഉം തമ്മിലുള്ള അകലവും ഇതുതന്നെയാണല്ലോ:



ഇപ്പോൾ കണ്ട അകലങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചെഴുതിനോക്കാം.

ബിന്ദുക്കൾ	അകലം
$2\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2},\ -5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$
$2\frac{1}{2},\ -5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$

ഇതിലെ ആദ്യത്തെ ജോടി സംഖ്യകളിൽ, അകലം കണക്കാക്കിയത്, വലിയ സംഖ്യയായ $5\frac{1}{4}$ ൽ നിന്ന്, ചെറിയ സംഖ്യയായ $2\frac{1}{2}$ കുറച്ചിട്ടാണ്.

രണ്ടാമത്തെ ജോടിയിലോ? അതിൽ വലിയ സംഖ്യ $-2\frac{1}{2}$; ഇതിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യയായ $-5\frac{1}{4}$ കുറച്ചുനോക്കാം.

$$-2\frac{1}{2} - \left(-5\frac{1}{4}\right) = -2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

ഇതുതന്നെയല്ലേ അകലമായി കിട്ടിയതും? അപ്പോൾ ഈ ജോടിയിലും അകലം, വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യ കുറച്ചതുതന്നെയാണ്.

മൂന്നാമത്തെ ജോടിയിലോ? വലിയ സംഖ്യ $5\frac{1}{4}$ ചെറിയ സംഖ്യ $-2\frac{1}{2}$. വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ

$$5\frac{1}{4} - \left(-2\frac{1}{2}\right) = 5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$$

ഈ ജോടിയിലും അകലം, വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യ കുറച്ചതാണ്. അവസാന ജോടിയും നോക്കാം. വലുത് $2\frac{1}{2}$, ചെറുത് $-5\frac{1}{4}$

$$2\frac{1}{2} - \left(-5\frac{1}{4}\right) = 2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

അപ്പോൾ ബിന്ദുക്കൾ രണ്ടും പൂജ്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തായാലും രണ്ടും ഇടതുവശത്തായാലും, ഒന്നു വലതുവ

അല്പം ചരിത്രം

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകളും അവയുടെ അംശബന്ധങ്ങളും കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാമെന്ന പൈഥാഗറസിന്റെ തത്വശാസ്ത്രം, ഹിപ്പാസസിന്റെ വാദങ്ങളിലൂടെ തകർന്നത് പറഞ്ഞല്ലോ. എന്നാൽ അഭിന്നകസംഖ്യകൾ എന്നൊരു സങ്കല്പം ഗ്രീസിലെ ഗണിത ചിന്തയിൽ ഉണ്ടായില്ല. സംഖ്യകൾക്കു പകരം നീളങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയാണ് തുടർന്നുണ്ടായത്. അതുകൊണ്ടു തന്നെ സംഖ്യാപരമായ തത്വങ്ങളെല്ലാം ജ്യാമിതീയ ഭാഷയിലാണ് അക്കാലത്തെ ഗ്രീക്കുഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ കാണുന്നത്.

ശത്തും മറ്റൊന്ന് ഇടതുവശത്തുമായാലും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം സംഖ്യകളിലെ വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചതുതന്നെയാണ്.

ഒരു സംഖ്യ പൂജ്യമായാലും, ഇതു ശരിയാകുമോ? ഉദാഹരണമായി, 0, 2 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം 2 ഇനി 0, -2ആയാലും, അകലം 2 തന്നെ, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ $0-(-2)=2$

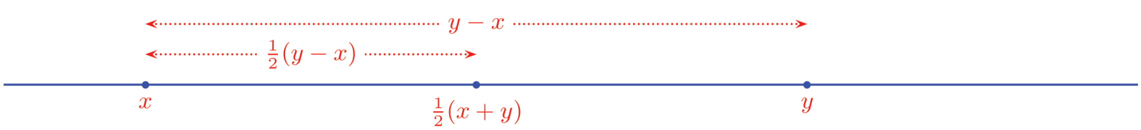
സംഖ്യാരേഖയിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും, അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളിൽ വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചതാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ച്, സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ മധ്യബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാം. ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളിൽ ചെറുത് x എന്നും, വലുത് y എന്നുമെടുക്കാം. അപ്പോൾ x ന്റെ വലതുവശത്താണ് y. അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $y-x$

x എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് $y-x$ അകലെയാണ് y എന്ന ബിന്ദു; മധ്യബിന്ദു എന്നത്, x ൽ നിന്ന് ഇതിന്റെ പകുതി ദൂരം വലത്തോട്ടാണ്:

അതായത്, മധ്യബിന്ദു

$$x+\frac{1}{2}(y-x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}(x+y)$$



സംഖ്യാരേഖയിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെയും മധ്യബിന്ദു, അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ പകുതി സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്.

ഉദാഹരണമായി, $-2\frac{1}{2}$ ന്റെയും $4\frac{3}{4}$ ന്റെയും മധ്യബിന്ദു.

$$\frac{1}{2}\left(-2\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$$

(1) സംഖ്യാരേഖയിൽ, ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി സംഖ്യകളും സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക

i) $1, -5$ ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ iii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

iv) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ v) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}$

(2) ഒന്നാംചോദ്യത്തിലെ ഓരോ ജോടി ബിന്ദുക്കളുടെയും മധ്യബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യ കണക്കാക്കുക.

(3) സംഖ്യാരേഖയിൽ $\frac{1}{3}$ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനും $\frac{1}{2}$ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭാഗത്തിനെ നാലു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

ബീജഗണിതം

സംഖ്യാരേഖയിൽ 3 എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 3 തന്നെ. -2 എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 2.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ ഒരു അധിസംഖ്യയും പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം ആ സംഖ്യ തന്നെ. ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയും പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം, സംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കളഞ്ഞാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

ഇത് ബീജഗണിതത്തിലെങ്ങനെ പറയും?

x അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ x ഉം, പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം x തന്നെ. x ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിലോ?

(സംഖ്യകളെ അക്ഷരങ്ങളായെഴുതുമ്പോൾ, ന്യൂനസംഖ്യയാണോ അധിസംഖ്യയാണോ എന്നൊന്നും നോക്കാതെ രണ്ടു തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെയും x, y എന്നൊക്കെ ഒരുപോലെയാണ് എഴുതുന്നതെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ)

അപ്പോൾ ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ ന്യൂനചിഹ്നം കളയുക എന്നതിനെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയണം. ഒരു സംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം അതേ സംഖ്യയാണെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?

ഉദാഹരണമായി,

$$-(-2) = 2$$

അതായത്, ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കളയുക എന്നതിനു പകരം, അതിന്റെ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നു പറഞ്ഞാൽ മതി. അപ്പോൾ x ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ന്യൂനചിഹ്നം കളഞ്ഞ അധിസംഖ്യ കിട്ടാൻ $-x$ എടുത്താൽ മതി. ഉദാഹരണമായി $x = -3$ ആണെങ്കിൽ

$$-x = -(-3) = 3$$

ഇനി സംഖ്യാരേഖയിൽ x എന്നൊരു ന്യൂനസംഖ്യയും പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം $-x$ എന്നു പറയാം.

ഇങ്ങനെ $x > 0$ ആണെങ്കിൽ (അതായത് x അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ) x തന്നെയായും, $x < 0$ ആണെങ്കിൽ (അതായത് x ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ) $-x$ ആയും എടുക്കുന്ന ക്രിയയെ ചുരുക്കി $|x|$ എന്നാണെഴുതുന്നത്. ഇതിനെ x ന്റെ കേവലമൂല്യം (absolute value) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|\pi| = \pi \qquad |-\pi| = \pi$$

പൂജ്യത്തിന്റെ കേവലമൂല്യം പൂജ്യംതന്നെയായിട്ടാണ് എടുക്കുന്നത്. ഇതെല്ലാം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ -x & x < 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ 0 & x = 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

ഇതുവരെ പറഞ്ഞതെല്ലാം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും, മറ്റൊരുസംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ സംഖ്യയുടെ കേവല മൂല്യമാണ്.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ

സംഖ്യാരേഖയിൽ 0 സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും x എന്ന സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $|x|$

ഇനി സംഖ്യാരേഖയിലെ x, y എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ബീജഗണിതത്തിൽ എങ്ങനെ എഴുതാമെന്നു നോക്കാം. വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നു ചെറിയ സംഖ്യകുറച്ചുകിട്ടുന്നതാണ് അകലമെന്നു കണ്ടു. അപ്പോൾ x, y ഇവയിൽ വലുതേതാണ് എന്നതിനെ അനുസരിച്ചാണ് അകലം തീരുമാനിക്കേണ്ടത്.

$x > y$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $x - y$

$x < y$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $y - x$

x എന്ന സംഖ്യ y എന്ന സംഖ്യയേക്കാൾ വലുതാണെന്ന് പറയുന്നതിനു പകരം $x - y$ അധിസംഖ്യയാണെന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ $x - y > 0$ എന്നും പറയാം. ഇതുപോലെ x എന്ന സംഖ്യ y എന്ന സംഖ്യയേക്കാൾ ചെറുതാ

ണെന്നു പറയുന്നതിനുപകരം $x-y$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ $x-y<0$ എന്നും പറയാം.

$x-y>0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $x-y$

$x-y<0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $y-x$

ഇനി $x-y$, $y-x$, എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ എന്നോർത്തുനോക്കൂ. ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്നു മറ്റൊന്നു കുറയ്ക്കുന്നതിന്റെ ന്യൂനമാണ് മറിച്ചു കുറയ്ക്കുന്നതെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഉപയോഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം)

അതായത് x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$y-x = -(x-y)$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ അകലക്കണക്ക് വീണ്ടും മാറ്റിയെഴുതാം.

$x-y>0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $x-y$

$x-y<0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $-(x-y)$

ഇതൊന്നുകൂടി ശ്രദ്ധിച്ചുനോക്കൂ. $x-y$ അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതുതന്നെയും, $x-y$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ന്യൂനവുമല്ലേ എടുത്തിരിക്കുന്നത്? ഇതല്ലേ $x-y$ എന്ന സംഖ്യയുടെ കേവലമൂല്യം?

അപ്പോൾ അകലത്തെക്കുറിച്ച് രണ്ടായിക്കണ്ടത്, ഇനി ഒന്നാക്കാം.

> സംഖ്യാരേഖയിൽ x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x-y|$.

സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

> **സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവലമൂല്യമാണ്.**

ഉദാഹരണമായി, സംഖ്യാരേഖയിലെ 2, 5 എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$|2-5| = |-3| = 3$$

2, −5 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമോ?

$$|2-(-5)| = |2+5| = |7| = 7$$

ഇനി ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

$|x-1| = 3$ ആകണമെങ്കിൽ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?

ഇത് പലതരത്തിൽ ചെയ്യാം. ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ $|x-1|$ എന്നത് സംഖ്യരേഖയിൽ x, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്. ഈ അകലം 3 ആകണം.

വർഗമൂലവും കേവലമൂല്യവും

x അധിസംഖ്യയായാലും ന്യൂനസംഖ്യയായാലും, $|x|$ അധിസംഖ്യതന്നെയാണ്. ഇതേപോലെ, x അധിസംഖ്യയായാലും ന്യൂനസംഖ്യയായാലും x^2 അധിസംഖ്യതന്നെ.

ഏതു അധിസംഖ്യയ്ക്കും രണ്ടുവർഗമൂലമുണ്ട്. അതിലെ അധിസംഖ്യയായ വർഗമൂലത്തെയാണ് $\sqrt{\ }$ ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$\sqrt{x^2}$ എന്താണ്?

ഉദാഹരണമായി, $x = 4$

എന്നെടുത്താൽ $x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = x$$

$x = -4$ ആയാലോ?

$x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = -x$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

ഇതിൽ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് ഇതാണ്

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ ആണെങ്കിലും $\sqrt{x^2}$ എന്നത് x തന്നെ ആകണമെന്നില്ല.

1 ന്റെ വലതുവശത്ത്, അകലം 3 ആയ സംഖ്യ $1 + 3 = 4$

1 ന്റെ ഇടതുവശത്ത്, അകലം 3 ആയ സംഖ്യ $1 - 3 = -2$ ഉം

അപ്പോൾ $x = 4$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -2$

ഇനി ബീജഗണിതരീതിയിൽ ആലോചിച്ചാലോ? $x > 1$ ആണെങ്കിൽ $|x-1| = x-1$ ആണല്ലോ. $x - 1 = 3$ ആകണമെങ്കിൽ $x = 4$ ആകണം.

$x < 1$ ആയാലോ? അപ്പോൾ $|x-1| = 1-x$ ആണ്. $1 - x = 3$ ആകണമെങ്കിൽ $x = 1 - 3 = -2$ ആകണം.

ചോദ്യം അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കിയാലോ?

> $|x+1| = 3$ ആകണമെങ്കിൽ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?

ജ്യാമിതീയമായി ഇതു ചെയ്യാൻ, $|x+1|$ നെ ഒരു അകലമായി കാണണം. സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവലമൂല്യമാണല്ലോ അകലമായി കിട്ടുന്നത്. അപ്പോൾ ആദ്യം $x + 1$ നെ തുകയ്ക്കു പകരം വ്യത്യാസമായി എഴുതണം:

$$x + 1 = x - (-1)$$

ഇതിൽനിന്ന് $|x+1|$ എന്നത്, സംഖ്യാരേഖയിൽ x ഉം -1 തമ്മിലുള്ള അകലമാണെന്ന് കാണാം.

ഇനി ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ -1 ന്റെ വലതുവശത്ത് 3 അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദു $-1 + 3 = 2$ എന്നും, ഇടതുവശത്ത് അകലം 3 ആയ ബിന്ദു $-1 -3 = -4$ എന്നും കാണാം.

ഈ കണക്കും ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ചെയ്തുനോക്കൂ.

ഒരു കണക്കുകൂടി:

> x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $|x|^2 = x^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

x അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ $|x| = x$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$|x|^2 = x^2$$

x ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിലോ? $|x| = -x$. അപ്പോൾ

$$|x|^2 = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x \times x = x^2$$

അവസാനമായി, $x = 0$ ആണെങ്കിലോ? $|x| = 0$

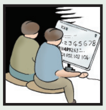
$$|x|^2 = 0^2 = 0$$

ഇനി $x = 0$ ആയതിനാൽ

$$x^2 = 0^2 = 0$$

അപ്പോൾ, $x = 0$ ആണെങ്കിൽ

$$|x|^2 = 0 = x^2$$



(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമവാക്യവും ശരിയാകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $|x - 1| = |x - 3|$

ii) $|x - 3| = |x - 4|$

iii) $|x + 2| = |x - 5|$

iv) $|x| = |x + 1|$

(2) $1 < x < 4$, $1 < y < 4$ ആണെങ്കിൽ $|x - y| < 3$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) $x < 3$, $y > 7$ ആണെങ്കിൽ $|x - y| > 4$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

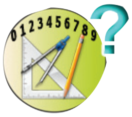
(4) $|x + y| = |x| + |y|$ ആകുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ x, y കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) $|x + y| < |x| + |y|$ ആകുന്ന സംഖ്യകൾ x, y ഉണ്ടോ?

(6) $|x + y| > |x| + |y|$ ആകുന്ന സംഖ്യകൾ x, y ഉണ്ടോ?

(7) $|x - 2| + |x - 8| = 6$ ആകണമെങ്കിൽ, x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?

(8) $|x - 2| + |x - 8| = 10$ ആകണമെങ്കിൽ, x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?



x ആയി പല സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ, $|x - 2| + |x - 8|$ എന്ന സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാവാം?

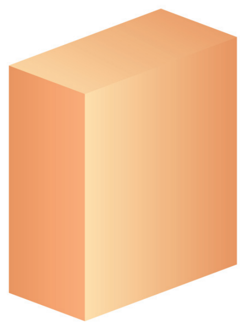
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാനാവശ്യമായ എല്ലാ സംഖ്യകളെയും, അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളെയും ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളായി കാണാമെന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്ന ജ്യാമിതീയ ആശയത്തെ, കേവലമൂല്യം എന്ന സംഖ്യാപരമായ ആശയമായി വിവർത്തനം ചെയ്യുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• കേവലമൂല്യങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ചില സമവാക്യങ്ങളെ ജ്യാമിതീയമായും സംഖ്യാപരമായും വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു, അത്തരം പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.			

11 സ്തംഭങ്ങൾ

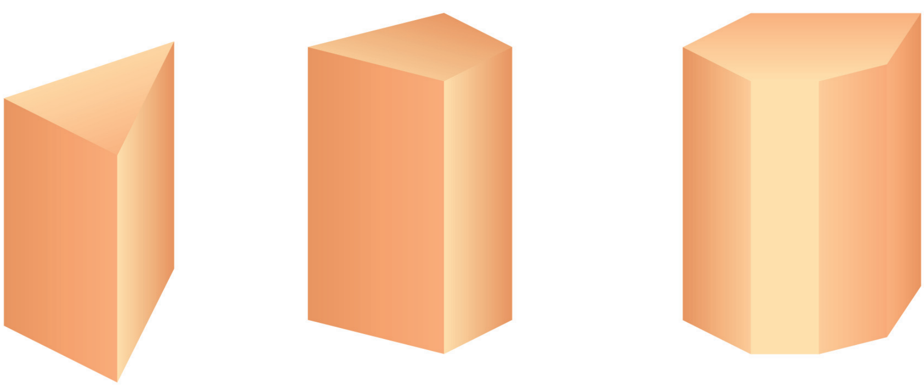
പാദം പലതരം

ചതുരക്കട്ടകളെക്കുറിച്ചും, അവയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ചും ആറാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചല്ലോ:



പല ചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഇതിന്റെ പുറംകൂട്, അഥവാ ഉപരിതലം. താഴെയും മുകളിലും ഒരേ പോലുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ, ഇടതും വലതും രണ്ടെണ്ണം, മുന്നിലും പിന്നിലും മൂന്നാമതൊരു ജോടി; ആകെ ആറു ചതുരങ്ങൾ.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



പരപ്പും, ഉയരവുമുള്ള ഇവയെ ത്രിമാനരൂപങ്ങൾ (three dimensional shapes) അല്ലെങ്കിൽ ഘനരൂപങ്ങൾ (solids) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇവയ്ക്കെല്ലാം പൊതുവായ മറ്റു ചില സവിശേഷതകളുണ്ട്.

ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ

വിവിധതരം ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാം. ഇതിനായി തുടക്കത്തിൽ ചില തയാറെടുപ്പുകൾ ആവശ്യമാണ്.

- ജിയോജിബ്ര തുറന്ന് View വിൽനിന്ന് Algebra, Graphic, 3D എന്നിവ തുറക്കുക.
- 3D Graphics ൽ വലതുക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Graphic എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന Preferences എന്ന ജാലകത്തിൽ Show Axes, Use clipping, Show clipping എന്നിവയ്ക്ക് നേരെയുള്ള ✓ അടയാളം കളയുക.
- Options → Labelling → No New Object നൽകിയാൽ വരയ്ക്കുന്ന രൂപങ്ങളുടെ പേര് എഴുതിവരുന്നത് ഒഴിവാക്കാം. ഇനി സ്തംഭങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

Graphic ൽ ത്രികോണം, ചതുരം എന്നിങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം വരയ്ക്കുക (ഇതിനായി Grid ഉപയോഗിക്കാം). ഈ രൂപം 3D Graphics ലും കാണാൻ കഴിയും. 3D Graphics ൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Extrude to Prism or Cylinder ഉപയോഗിച്ച് 3D Graphics ൽ കാണുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം നൽകുക. 3D Graphics ൽ ഒരു സ്തംഭം ലഭിക്കും. Rotate 3D Graphics View ഉപയോഗിച്ച് ഈ സ്തംഭത്തിനെ തിരിച്ചും മറിച്ചുമൊക്കെ നോക്കാൻ കഴിയും.

Graphics ൽ വരച്ച ജ്യാമിതീയരൂപത്തിന്റെ ആകൃതി മാറ്റുന്നതിനനുസരിച്ച് സ്തംഭത്തിന്റേയും ആകൃതി മാറുന്നത് കാണാം. ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമായി സ്ലൈഡറിന്റെ പേര് നൽകിയിയാൽ ഉയരം ആവശ്യത്തിനനുസരിച്ച് മാറ്റാം.

ആദ്യത്തെ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലം, ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും, മൂന്നു ചതുരങ്ങളും ചേർന്നതാണ്. രണ്ടാമത്തേതിൽ ത്രികോണങ്ങൾക്കു പകരം ചതുർഭുജങ്ങളും, മൂന്നാമത്തേതിൽ ഷഡ്ഭുജങ്ങളുമാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ബഹുഭുജങ്ങളും, അവയുടെ വശങ്ങളോരോന്നും എതിർവശങ്ങളായി ഒരേ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുമാണ് ഇവയുടെയെല്ലാം ഉപരിതലം. ഇത്തരം രൂപങ്ങളുടെ പൊതുവായ പേര് ബഹുഭുജസ്തംഭം (prism) എന്നാണ്.

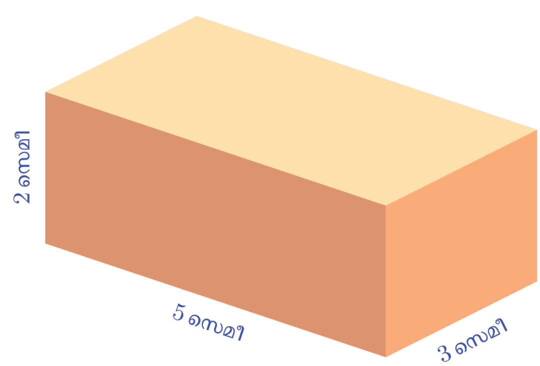
ഒരു സ്തംഭത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളെയും ചതുരങ്ങളെയുമെല്ലാം അതിന്റെ മുഖങ്ങൾ (faces) എന്നാണ് പറയുന്നത്. താഴത്തും മുകളിലുമുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളെ പാദമുഖങ്ങളെന്നും, ചതുരങ്ങളെ പാർശ്വമുഖങ്ങളെന്നും പറയുന്നു. പാദമുഖങ്ങളുടെ ആകൃതിയനുസരിച്ച്, സ്തംഭങ്ങളെ, ത്രികോണസ്തംഭം, ചതുർഭുജസ്തംഭം എന്നെല്ലാം തരംതിരിക്കാം.

മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്, ഒരു ത്രികോണസ്തംഭവും, ഒരു ചതുർഭുജസ്തംഭവും, ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭവുമാണ്. ഇതുവരെ ചതുരക്കട്ട എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന രൂപത്തിനെ (അല്പം കൂടി കനത്തിൽ) ചതുരസ്തംഭം എന്നു വിളിക്കാം.

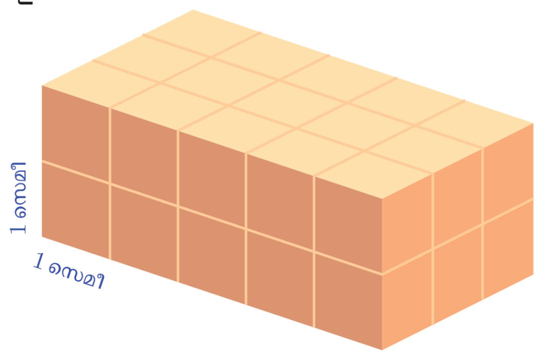
ബഹുഭുജങ്ങളും ചതുരങ്ങളും കാർഡ് ബോർഡിൽ വെട്ടിയെടുത്ത് പൊള്ളയായ പലതരം സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ.

വ്യാപ്തം

ആറാംക്ലാസിൽ ചതുരസ്തംഭങ്ങളുടെ (ചതുരക്കട്ടകളുടെ) വ്യാപ്തം കണക്കാക്കിയത് ഓർമയുണ്ടോ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരസ്തംഭം നോക്കുക.



ചുവടെകാണുന്നതു പോലെ ഇതിനെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരക്കട്ടകളായി ഭാഗിക്കാം:

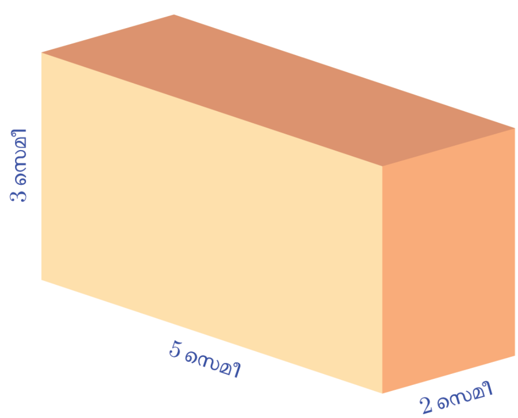


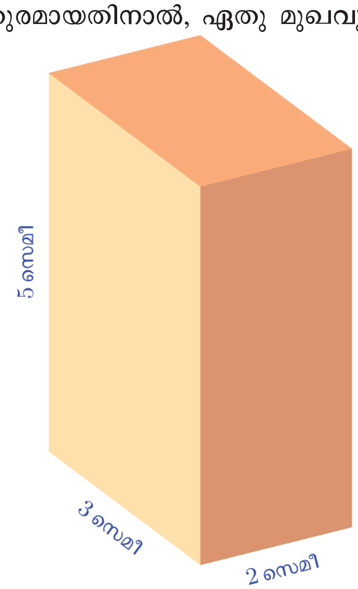
ഇതിൽ $5 \times 3 \times 2 = 30$ ചെറുസമചതുരക്കട്ടകളുണ്ട്. അതിനാൽ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 30 ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

ആറാംക്ലാസിൽ **ഭാഗങ്ങളുടെ ഭാഗം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭിന്നപ്പരപ്പ്** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെയും നീളവും വീതിയും ഉയരവുമെല്ലാം ഭിന്നസംഖ്യകളായാലും വ്യാപ്തം, ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നു കാണാം. **പുതിയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഗുണനം** എന്ന ഭാഗത്തിൽ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വിശദീകരിച്ചതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ അളവുകൾ അഭിന്നകസംഖ്യകളാണെങ്കിലും, വ്യാപ്തം അവയുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നും കാണാം.

ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം ഒരു ചതുരമാണ്: വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും; പരപ്പളവ് 5×3 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ഈ പരപ്പളവിന്റെയും സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമായ 2 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ് വ്യാപ്തം.

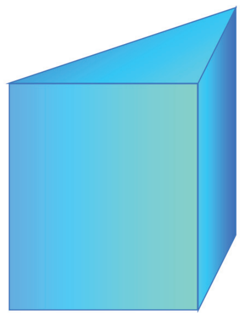
ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ എല്ലാ മുഖങ്ങളും ചതുരമായതിനാൽ, ഏതു മുഖവും പാദമായെടുക്കാം:



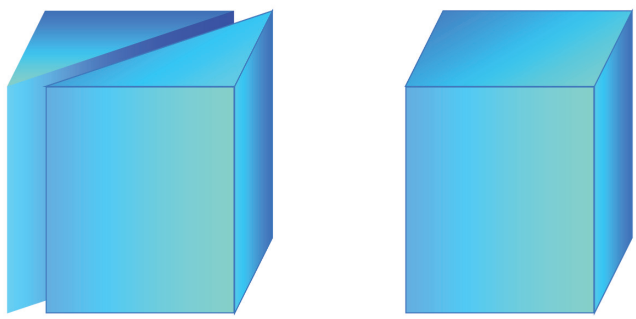


എങ്ങനെയെടുത്താലും, പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം തന്നെയല്ലേ വ്യാപ്തം?

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യമൊരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭമെടുക്കാം:

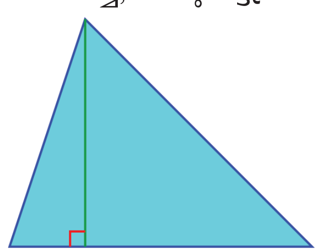


ഇതേപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണ സ്തംഭം കൂടി ചേർത്തു വച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭമുണ്ടാക്കാമല്ലോ:

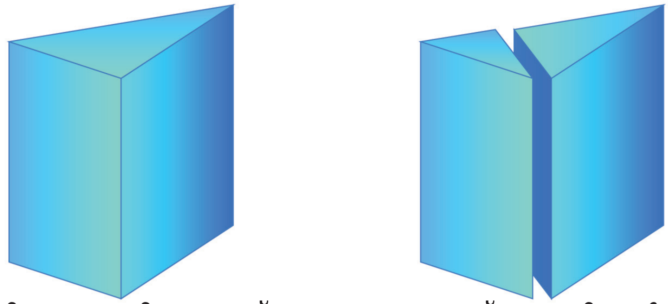


പാദമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് a എന്നെടുത്താൽ, ഇത്തരം രണ്ടെണ്ണം ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് (പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം) $2a$; ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ് ചതുരസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉയരം. അത് h എന്നെടുത്താൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $2ah$. ഇത് ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ട് ത്രികോണസ്തംഭങ്ങൾ ചേർന്ന വ്യാപ്തമാണ്. അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ah. അതായത്, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം.

ഇനി പാദം മട്ടമല്ലാത്ത ത്രികോണമാണങ്കിലോ? ഏതു ത്രികോണത്തെയും, ഒരു ശീർഷത്തിലൂടെ ലംബം വരച്ച്, രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കാം.



അപ്പോൾ പാദം മട്ടത്രികോണമല്ലാത്ത സ്തംഭത്തിന്റെയും പാദവും, മുകളിലെ ത്രികോണവും സമാന്തരവരകൾ കൊണ്ടു ഭാഗിച്ച്, ഈ വരകളിലൂടെ സ്തംഭത്തെ നെടുകെ മുറിച്ചാൽ, രണ്ടു മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളാകും.

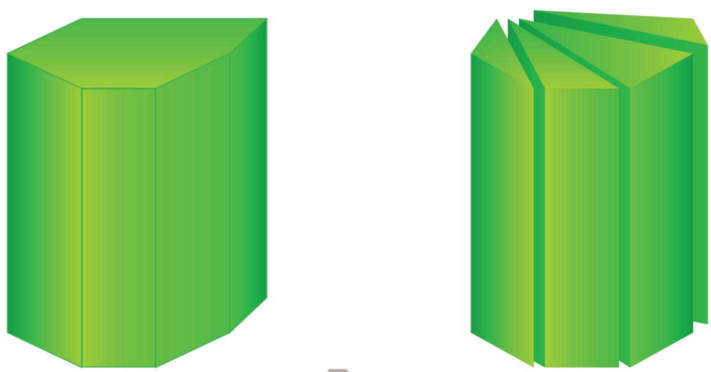


ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം കൂട്ടിയാൽ, ആദ്യത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കിട്ടുകയും ചെയ്യും. ഭാഗിക്കുന്നതിനു മുമ്പുള്ള സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് a, ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന സ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ് b, c എന്നെടുത്താൽ $a = b + c$. എല്ലാ സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഒരേ ഉയരമാണ്. ഇത് h എന്നെടുത്താൽ, മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക $bh + ch = (b + c)h = ah$. ഇത് ആദ്യത്തെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തമല്ലേ?

അങ്ങനെ ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്നു കിട്ടി.

ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും, ഒരു നിശ്ചിത മൂലയും മറ്റെല്ലാ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം; ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അങ്ങനെ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയുമാണ്:

അപ്പോൾ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തേയും, ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം:



സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് a ആണെന്നും, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം h ആണെന്നും എടുക്കാം. പാദത്തെ n ത്രികോണങ്ങളാക്കാമെങ്കിൽ ചിത്രത്തിൽക്കണ്ടതുപോലെ സ്തംഭത്തെ n ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി മുറിക്കാം. ഇവയുടെ പാദപ്പരപ്പ് $b_1, b_2, ..., b_n$ എന്നെടുത്താൽ, വ്യാപ്തം $b_1h, b_2h, ..., b_nh$ എന്നാകും. അപ്പോൾ ബഹുഭുജ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$b_1h + b_2h + ... + b_nh = (b_1 + b_2 + ... + b_n)h = ah$$

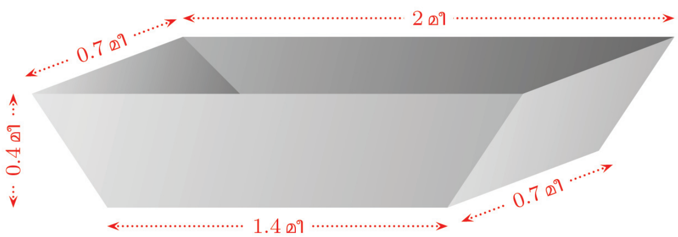
അതായത്,

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാദം, വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററായ സമഭുജത്രികോണവും, ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 10 = 40\sqrt{3} \text{ ഘനസെന്റിമീറ്റർ}$$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.



മുന്നിലെയും പിന്നിലെയും മുഖങ്ങൾ ഒരേ പോലെയുള്ള സമപാർശ്വലംബകങ്ങളായ സ്തംഭമാണിത്. ഇതിലെത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?

ഈ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times (2 + 1.4) \times 0.4 = 0.68 \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

സംഭരണിയുടെ വ്യാപ്തം,

$$0.68 \times 0.7 = 0.476 \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

ഒരു ഘനമീറ്ററെന്നാൽ ആയിരം ലിറ്റർ. അപ്പോൾ സംഭരണിയിൽ 476 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

(ഗുണപാഠം: സ്തംഭം എപ്പോഴും പാദം താഴെയായി വയ്ക്കണമെന്നില്ല)

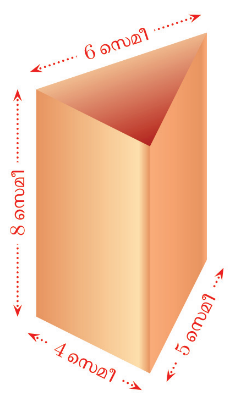
(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 15 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(2) മഴവെള്ളം ശേഖരിക്കാനായി, സ്കൂൾമുറ്റത്ത് സമഷഡ്ഭുജാകൃതിയിൽ ഒരു കുഴിയുണ്ട്. ഇതിന്റെ ഒരു വശം 2 മീറ്ററും, കുഴിയുടെ ആഴം 3 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ ഒരു മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. അത് എത്ര ലിറ്ററാണ്?

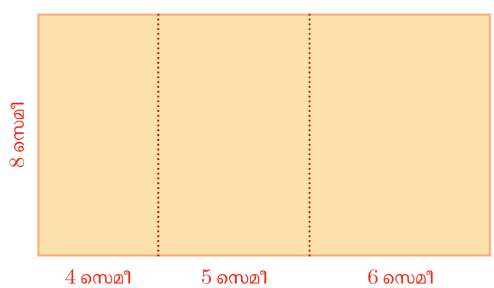
(3) സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ പാദം, വശങ്ങളെല്ലാം 16 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരമാണ്. പാത്രത്തിൽ 10 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. ഇതിൽ, വക്കുകളെല്ലാം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരക്കട്ട മുക്കിയാൽ, വെള്ളത്തിന്റെ നിരപ്പ് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ഉയരും?

പരപ്പളവ്

കട്ടിക്കടലാസുകൊണ്ട് ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു കുഴലുണ്ടാക്കണം:



മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചൊട്ടിച്ച് ഉണ്ടാക്കാം. ഒറ്റച്ചതുരം മടക്കിയൊട്ടിച്ചും ഉണ്ടാക്കാം:



ഒരു സ്തംഭത്തെ പൊളിച്ച് നിവർത്തിവയ്ക്കുന്ന രൂപം എങ്ങനെയുണ്ടാകുമെന്ന് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് കാണാൻ കഴിയും. **ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടതുപോലെ ഒരു സ്തംഭം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics ലെ Net ഉപയോഗിച്ച് സ്തംഭത്തിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ സ്തംഭം പൊളിച്ച് നിവർത്തിയ രൂപം ലഭിക്കും. ഇതിനോടൊപ്പം Graphics ൽ ഒരു സ്ലൈഡറും കിട്ടും. സ്ലൈഡർ നീക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് സ്തംഭം രൂപപ്പെട്ട് വരുന്നത് കാണാം. ആദ്യം വരച്ച സ്തംഭം മറച്ചു വയ്ക്കണമെങ്കിൽ Algebra View ലെ Prism എന്നതിൽ സ്തംഭത്തിന്റെ പേര് നൽകിയിരിക്കുന്നതിന് നേരെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. വരച്ച ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ മറച്ചുവയ്ക്കാൻ Algebra View യിലെ Point എന്ന് എഴുതിയിരിക്കുന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഒരുമിച്ചെടുക്കുക. തുടർന്ന് വലതു ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Show Object എന്നതിന് നേരെയുള്ള ✓ അടയാളം കളയുക.

ഇതുണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

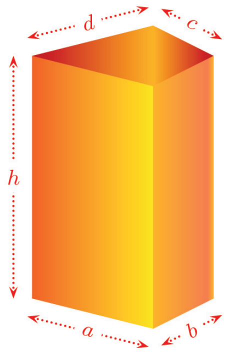
ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

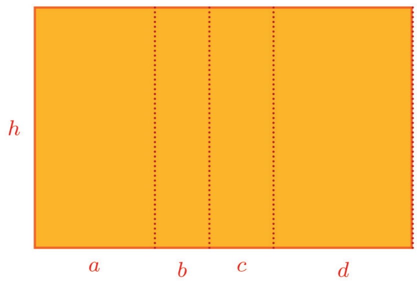
$(4 + 5 + 6) \times 8 = 15 \times 8 = 120$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് കൂട്ടിയതാണിത്. പൊതുവെ ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവിന്റെ തുകയെ അതിന്റെ പാർശ്വതല പരപ്പളവ് (lateral surface area) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത് ചുരുക്കി, പാർശ്വപ്പരപ്പ് എന്നും പറയാം.

ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, 15 നെ 8 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണ് ചെയ്തത്; ഇതിലെ $4 + 5 + 6 = 15$, പാദമായ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, 8 സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവുമല്ലേ? അൽപമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമെന്നു കാണാം.

പാദം ത്രികോണത്തിനു പകരം ചതുർഭുജമായാലോ?





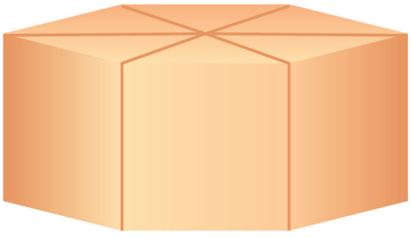
ഈ ചതുർഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് $(a + b + c + d)\,h$; അതായത്, പാദചതുർഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം. ഇതുപോലെ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാം:

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ ഉപരിതലത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, പാർശ്വപ്പരപ്പിനോട് പാദപ്പരപ്പുകൾ കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഒരു കണക്കു നോക്കാം:

മരം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് 48 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, അതിന്റെ ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം ആറെണ്ണം ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭമുണ്ടാക്കി:



ഇതു മുഴുവൻ വർണക്കടലാസൊട്ടിച്ച് ഭംഗിയാക്കാൻ, എത്ര ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

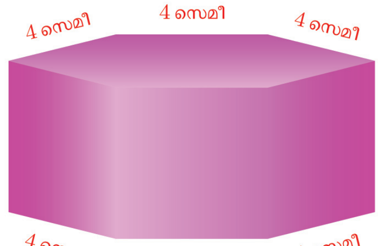
ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ മുഴുപ്പരപ്പാണിവിടെ വേണ്ടത്; അതിന് പാർശ്വപ്പരപ്പും, പാദപ്പരപ്പുകളും കൂട്ടണം.

പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് വേണം. അതിന് ത്രികോണപാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കണം.

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, പാദചുറ്റളവു കിട്ടും. അപ്പോൾ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് $48 \div 4 = 12$ സെന്റിമീറ്റർ.

പാദം ഒരു സമഭുജത്രികോണമായതിനാൽ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ മൂന്നുമടങ്ങാണ് ചുറ്റളവ്; ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $12 \div 3 = 4$ സെന്റിമീറ്റർ.

കണക്കിലെ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് ഇനി കണക്കാക്കാമല്ലോ.



വശങ്ങളെല്ലാം 4 സെന്റിമീറ്ററായ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $6 \times 4 = 24$ സെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും 4 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് $24 \times 4 = 96$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി രണ്ടു പാദങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടണം. ഒരു ത്രികോണപാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

ഇവ ആറെണ്ണം ചേർന്ന ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

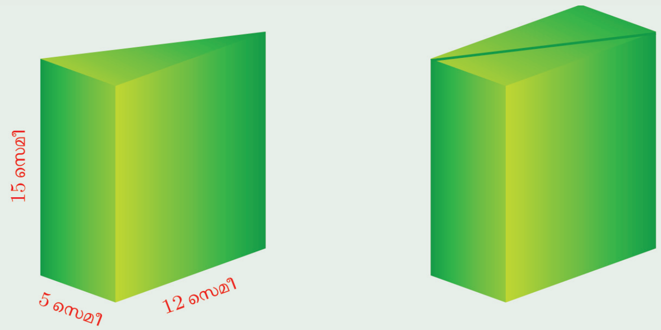
അപ്പോൾ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലം മുഴുവനെടുത്താൽ പരപ്പളവ്

$$96 + \left(2 \times 24\sqrt{3}\right) = 96 + 48\sqrt{3} = 48\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

$\sqrt{3}$ നോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയായി 1.73 എടുത്താൽ, ഇത് 179 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിനേക്കാൾ അല്പം കൂടുതലെന്നു കാണാം. ഏതായാലും 180 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് മതിയാകും.

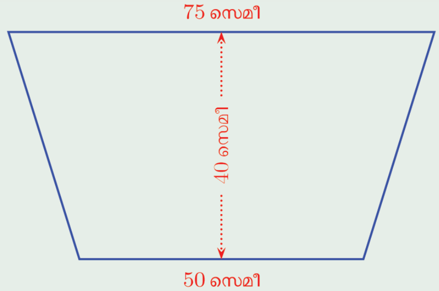
(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 12 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കുക.

(2) ചിത്രത്തിൽക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, പാദം മട്ടത്രികോണമായ രണ്ടു സ്തംഭങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി.



ഈ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പെത്രയാണ്?

(3) സ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ലംബകമുഖങ്ങളുടെ അളവുകൾ ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



സംഭരണിയുടെ നീളം 80 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇതിന്റെ അകത്തും പുറത്തും ചായമടിക്കാൻ., ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 100 രൂപാ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ വേണം?

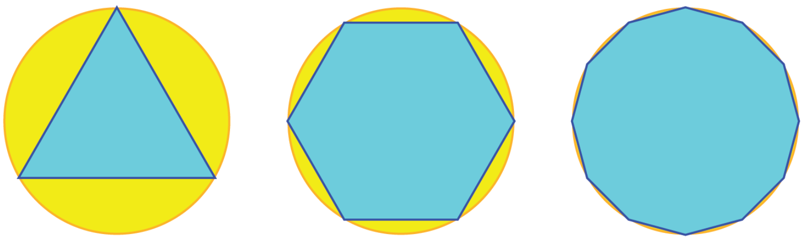
വൃത്തസ്തംഭം

അറ്റത്ത് തുല്യമായ ബഹുഭുജങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമായ രൂപങ്ങളാണ് ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങൾ. അറ്റത്ത് വൃത്തങ്ങളും, വശങ്ങൾ ചതുരങ്ങളായി മടങ്ങാതെ ഒഴുക്കൻ വളവുമായ സ്തംഭങ്ങളുമുണ്ട്; കട്ടിയും പൊള്ളയുമായ ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ധാരാളം കണ്ടിട്ടുണ്ടാകുമല്ലോ:

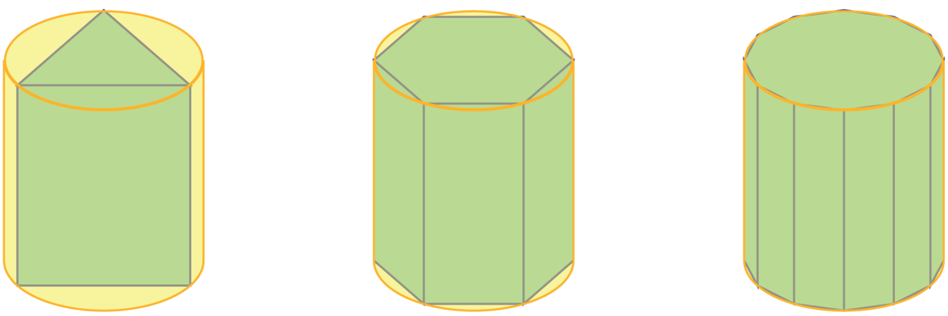
ഇത്തരം ഘനരൂപത്തെ വൃത്തസ്തംഭം (cylinder) എന്നാണു പറയുന്നത്.

വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണോ?

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കിയത്, അതിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുതലാക്കിയിട്ടാണല്ലോ:



അപ്പോൾ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളിൽ പാദത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ അവ വൃത്തസ്തംഭത്തിനോട് അടുക്കും:



വൃത്തസ്തംഭത്തിനുള്ളിലെ വിവിധ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ് p_1, $p_2, p_3, \dots$ എന്നും, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ തന്നെ പാദപ്പരപ്പ് c എന്നുമെടുത്താൽ, $p_1, p_2, p_3, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും. എല്ലാ സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഒരേ ഉയരമാണ്; അത് h എന്നെടുത്താൽ, ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം $p_1h, p_2h, p_3h, \dots$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ സംഖ്യകൾ ch എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം അടുത്തടുത്തു വരുന്നത്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിനോടാണ്. അങ്ങനെ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ch എന്നു കിട്ടും.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

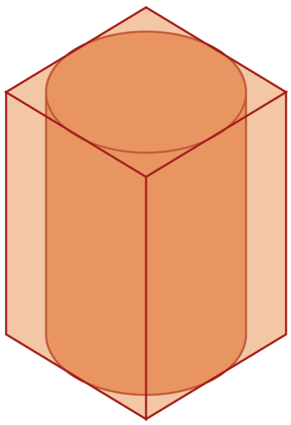
വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ π കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം

3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

> സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുണ്ട്. സ്തംഭത്തിന് 20 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരവുമുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തമാണ് ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം; ഉയരം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റേതുതന്നെ:



അതായത്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു തുല്യമാകണം.

അപ്പോൾ, പാദവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റീമീറ്റർ; പാദപരപ്പളവ് 25π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തം $25\pi \times 20 = 500\pi$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

?

(1) ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 32 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 20 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി. ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

(2) ഒരേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

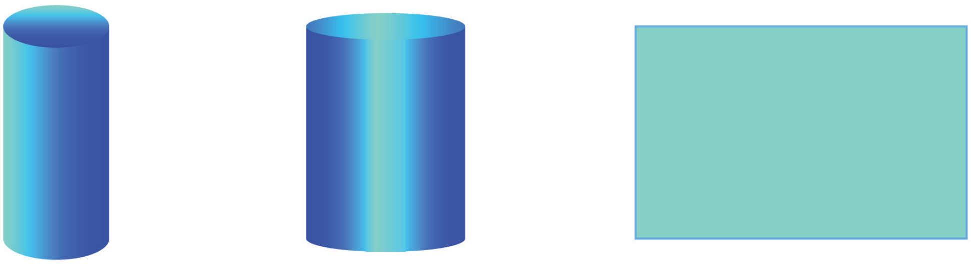
(3) രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ഉയരം 5:4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമാണ്.

i) ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ii) ആദ്യത്തെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 720 ഘനസെന്റിമീറ്റർ; രണ്ടാമത്തേതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

വക്രതലം

ചതുരാകൃതിയിലുള്ള കടലാസോ തകിടോ വളച്ച്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള കുഴലുണ്ടാക്കാം; മറിച്ച്, പൊള്ളയായ, രണ്ടറ്റവും തുറന്ന ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിനെ മുറിച്ച് വളവു നിവർത്തിയാൽ ഒരു ചതുരമാകും:



ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രതലപരപ്പളവ് (curved surface area) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചുരുക്കി വക്രപ്പരപ്പ് എന്നും പറയാം.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ്. മറ്റേ വശം പാദവൃത്തം നിവർത്തിയെടുത്തതാണ്; അതായത്, അതിന്റെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്. ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണ് വക്രപ്പരപ്പ്.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ π മടങ്ങാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വക്രപരപ്പ് $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇത് അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ, ഉപരിതലത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് കിട്ടാൻ, രണ്ടറ്റത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കൂടി കൂട്ടണം. അതായത്, $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

(1) ഒരു കിണറിന്റെ അകത്തെ വ്യാസം 2.5 മീറ്ററും, ആഴം 8 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിന്റെ ഉൾഭാഗം സിമന്റ് തേയ്ക്കുന്നതിന്, ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 350 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(2) 1.20 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു റോളറിന്റെ വ്യാസം 80 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്.

ഇത് ഒരു പ്രാവശ്യം കറക്കുമ്പോൾ, നിരപ്പാവുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

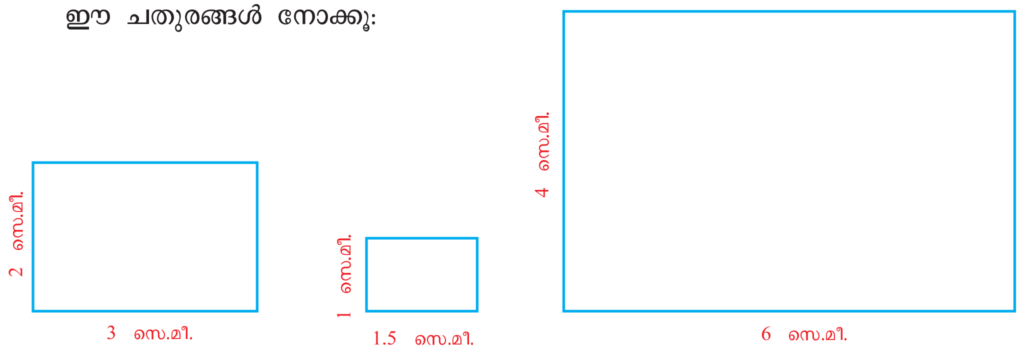
(3) ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രപ്പരപ്പും, പാദപ്പരപ്പും തുല്യമാണ് പാദത്തിന്റെ ആരവും സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള വിവിധ മാർഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പരപ്പളവ് എന്നിവ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സ്തംഭങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.			

12 അനുപാതം

ഈ ചതുരങ്ങൾ നോക്കൂ:

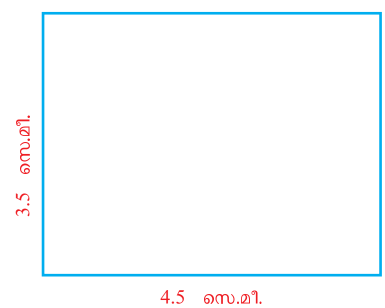


നീളവും വീതിയുമെല്ലാം വ്യത്യസ്തമാണ്; പക്ഷേ അതിലൊരു കണക്കില്ലേ?

ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്, രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളം; രണ്ടു മടങ്ങാണ് മൂന്നാമത്തെ ചതുരത്തിൽ. വീതിയും ഇതുപോലെതന്നെയല്ലേ?

അതായത്, ഈ ചതുരങ്ങളിൽ, നീളവും വീതിയും ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്.

ഇനി ഈ ചതുരം നോക്കൂ:



ഇതും ഇക്കൂട്ടത്തിൽപ്പെടുത്താമോ?

ആദ്യചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണ് ഇതിന്റെ നീളം; വീതി ഒന്നേമുക്കാൽ മടങ്ങും. നീളവും വീതിയും മാറിയത് ഒരേ തോതിലല്ലാത്തതിനാൽ, ഈ ചതുരം ഇക്കൂട്ടത്തിൽ ചേരില്ല.

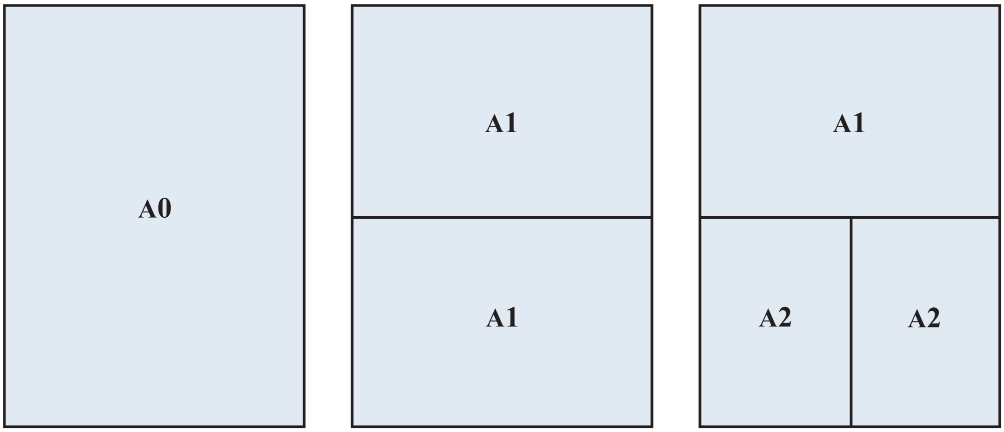
കൂട്ടത്തിലെ ആദ്യത്തെ ചതുരവുമായി ഒത്തുനോക്കിയാണല്ലോ തീരുമാനിച്ചത്. അല്ലാതെയും ഇതു കാണാം. കൂട്ടത്തിലെ എല്ലാ ചതുരത്തിലും, നീളം വീതിയുടെ ഒന്നര മടങ്ങല്ലേ? പുതിയ ചതുരത്തിൽ അങ്ങനെയല്ലല്ലോ. മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, കൂട്ടത്തിലെ മൂന്നു ചതുരങ്ങളിലും, നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2; പുതിയ ചതുരത്തിൽ ഇത് 9 : 7. ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ തുല്യമല്ല

അംശബന്ധങ്ങളുടെ തുല്യതയെ പൊതുവേ അനുപാതം (proportion) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതനുസരിച്ച്, ആദ്യം വരച്ച മൂന്നു ചതുരങ്ങളിലും, നീളവും വീതിയും ആനുപാതികമാണ് (proportional) എന്നു പറയാം.

നീളവും വീതിയും ആനുപാതികമായ ചതുരങ്ങൾ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ആവശ്യമുണ്ട്. പല വലുപ്പത്തിൽ ടെലിവിഷനുകൾ ഉണ്ടാക്കാറുണ്ടെങ്കിലും, എല്ലാറ്റിലും നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 16 : 9 ആയിരിക്കുമെന്നും, ഓരോ ദേശത്തെയും പതാകയുടെ നീളവും വീതിയും നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലാണെന്നും മറ്റും ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?

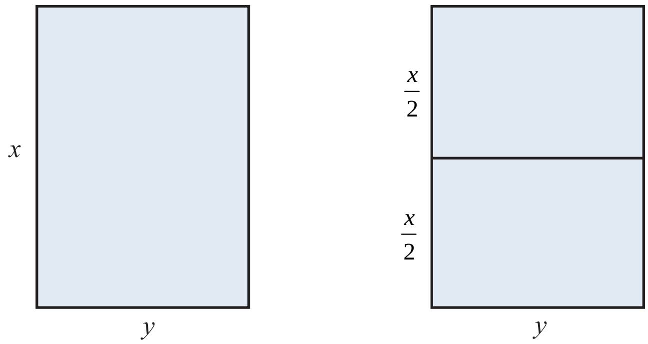
അനുപാതം ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം: എഴുതാനും മറ്റും സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്നത് A4 കടലാസാണല്ലോ. A0, A1, A2, ... എന്നിങ്ങനെ പല വലുപ്പത്തിലുള്ള കടലാസുകളുണ്ട്. എന്താണിതിന്റെ കണക്ക്?

A0 കടലാസിന്റെ പകുതിയാണ് A1 കടലാസ്, അതിന്റെ പകുതി A2 എന്നിങ്ങനെയാണ് വലുപ്പം കുറയുന്നത്;



മറ്റൊന്നുകൂടിയുണ്ട്: ഈ ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം ആനുപാതികമായിരിക്കണം.

അതെങ്ങനെ സാധിക്കുമെന്നു നോക്കാം. അതിന് ഇക്കൂട്ടത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു കടലാസ്, ഉദാഹരണമായി A1, എടുക്കാം, ഇതിന്റെ വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നും, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം y എന്നുമെടുക്കാം.



പകുതിയായി മുറിച്ച ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം y ഉം, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം $\frac{x}{2}$ ഉം ആണല്ലോ. രണ്ടു ചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാകണമെങ്കിൽ, x നെ y കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും y നെ $\frac{x}{2}$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലും ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടണം. $\frac{x}{2}$ കൊണ്ടുള്ള ഹരണമെന്നാൽ, $\frac{2}{x}$ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം; അതായത്

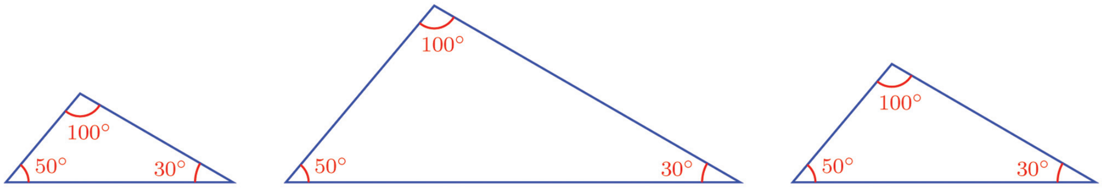
$$y \div \frac{x}{2} = y \times \frac{2}{x} = \frac{2y}{x}$$

അപ്പോൾ വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാകാനുള്ള സമവാക്യം

$$\frac{x}{y} = \frac{2y}{x}$$

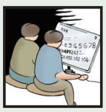
ഇതിൽ നിന്ന് $x^2 = 2y^2$ എന്നും, തുടർന്ന് $x = \sqrt{2}\, y$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, A0, A1, A2 . . . എന്നീ കടലാസുകളിലെല്ലാം വലിയ വശം, ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ്.

രണ്ടിൽക്കൂടുതൽ അളവുകളിലും ആനുപാതികത പറയാം. ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ.



ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. അതായത്, ഇവയിലെ ഏതു ജോടി ത്രികോണങ്ങളെടുത്താലും, അവയിലൊന്നിലെ വശങ്ങളുടെ നീളത്തെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് മറ്റൊന്നിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം (**ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യം** എന്ന പാഠം). മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഇവയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തന്നെയാണ് മറ്റെല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം. പുതിയ ശൈലിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.

മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഇത്തരം ആനുപാതിക ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. രസതന്ത്രത്തിലെ നിശ്ചിതാനുപാതതത്വമനുസരിച്ച്, ഏതു സംയുക്തകത്തിലെയും മൂലകങ്ങളുടെ ഭാരം ആനുപാതികമാണ്. ഉദാഹരണമായി വെള്ളത്തിലെ ഓക്സിജന്റെയും ഹൈഡ്രജന്റെയും ഭാരം ഏകദേശം 8 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. കൂറെക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ 100 ഗ്രാം വെള്ളത്തിൽ, ഏകദേശം 88.8 ഗ്രാം ഓക്സിജനും, 11.2 ഗ്രാം ഹൈഡ്രജനുമാണ്. (ഒരു കിലോഗ്രാം വെള്ളത്തിലോ?)



(1) ഒരാൾ 10000 രൂപയും 15000 രൂപയും രണ്ടു പദ്ധതികളിലായി നിക്ഷേപിച്ചു. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ, ആദ്യത്തെ തുകയ്ക്ക് 900 രൂപയും, രണ്ടാമത്തെ തുകയ്ക്ക് 1200 രൂപയും പലിശ കിട്ടി.

i) നിക്ഷേപിച്ച തുകകൾക്ക് ആനുപാതികമായാണോ പലിശ കിട്ടിയത്?

ii) ആദ്യത്തെ പദ്ധതിയിൽ തുകയും പലിശയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമെന്താണ്? രണ്ടാമത്തെ പദ്ധതിയിലോ?

iii) ആദ്യത്തെ പദ്ധതിയിൽ പലിശനിരക്ക് എത്ര ശതമാനമാണ്? രണ്ടാമത്തെ പദ്ധതിയിലോ?

(2) A0 കടലാസിന്റെ പരപ്പളവ് ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. A4 കടലാസിന്റെ നീളവും വീതിയും മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കുക.

(3) കാൽസ്യം കാർബണേറ്റിൽ കാൽസ്യം, കാർബൺ, ഓക്സിജൻ ഇവയുടെ ഭാരം 10 : 3 : 12 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഒരു സംയുക്തത്തിന്റെ 150 ഗ്രാം പരിശോധിച്ച്, അതിൽ 60 ഗ്രാം കാൽസ്യവും, 20 ഗ്രാം കാർബണും, 70 ഗ്രാം ഓക്സിജനുമാണെന്നു കണക്കാക്കി. ഇത് കാൽസ്യം കാർബണേറ്റ് ആണോ?

ആനുപാതികസ്ഥിരത

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം രണ്ടു മടങ്ങാക്കി വലുതാക്കിയാൽ, ചുറ്റളവ് എത്ര മടങ്ങാകും?

ആദ്യം വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്ററായിരുന്നെങ്കിൽ, ഇപ്പോൾ അവയെല്ലാം 2 സെന്റിമീറ്ററായി. ചുറ്റളവ് ആദ്യം 4 സെന്റിമീറ്ററായിരുന്നത്, ഇപ്പോൾ 8 സെന്റിമീറ്ററായി. ചുറ്റളവും രണ്ടു മടങ്ങായി.

ഏതു സമചതുരത്തിനും ഇതു ശരിയാണോ?

പൊതുവായൊരു സംഖ്യാബന്ധം ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാൻ, ബീജഗണിതമാണല്ലോ നല്ലൊരു മാർഗം. ആദ്യം വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചുറ്റളവ് $4x$ സെന്റിമീറ്റർ; വശങ്ങളെല്ലാം രണ്ടു മടങ്ങായപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് $4 \times 2x = 8x$ സെന്റിമീറ്റർ, അതായത് ചുറ്റളവും രണ്ടു മടങ്ങായി. വശങ്ങളെല്ലാം പകുതിയാക്കിയാലോ? ഒന്നര മടങ്ങാക്കിയാലോ?

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും, ചുറ്റളവും ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്, മറ്റൊരുരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, സമചതുരമെത്ര മാറ്റിയാലും വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല.

ഇവിടെ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് ചുറ്റളവ് മാറുന്നതെന്നും പറയാം. അപ്പോൾ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പലതരത്തിൽ പറയാം.

- ഏതു സമചതുരത്തിലും, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ 4 മടങ്ങാണ് ചുറ്റളവ്.
- ഏതു സമചതുരത്തിലും വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 4 ആണ്.
- സമചതുരത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്.
- സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് ചുറ്റളവ് മാറുന്നത്.

ഏതു സമചതുരത്തിന്റെയും വികർണത്തിന്റെ നീളം, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണെന്ന്, **പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇത് മേലെഴുതിയതുപോലെ എങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം?

ഇനി സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവുകൾക്കു പകരം പരപ്പളവുകളെടുത്താലോ? വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ, വശങ്ങളുടെ നീളം രണ്ടു മടങ്ങാക്കിയാൽ, പരപ്പളവ് 4 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ വശത്തിന്റെ നീളവും, പരപ്പളവും ഒരേ തോതിലല്ല മാറുന്നത്, അഥവാ അവ ആനുപാതികമല്ല.

Dilate from Point ഉപയോഗിച്ച് സദൃശരൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത് **ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യം** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ സദൃശരൂപം വരയ്ക്കുക. ഇവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം, ചുറ്റളവ്, പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡർ നീക്കി, താഴെ പറയുന്ന ഓരോ ജോടി അളവുകളിലും ആദ്യത്തേതിന് അനുപാതികമായാണോ രണ്ടാമത്തേത് മാറുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും
ii) വശത്തിന്റെ നീളവും പരപ്പളവും
iii) ചുറ്റളവും പരപ്പളവും

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽനിന്നൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം; ഒരു വരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്ന വസ്തു, 1 സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്ററും, 2 സെക്കന്റിൽ 20 മീറ്ററും, $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ 5 മീറ്ററും സഞ്ചരിക്കുന്നു.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, x സെക്കന്റിൽ $10x$ മീറ്ററാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. അതായത്, സമയത്തിന്റെ 10 മടങ്ങ് എന്ന തോതിലാണ് ദൂരമെപ്പോഴും മാറുന്നത്; അഥവാ, സമയവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 10 തന്നെയാണ്. ദൂരം സമയത്തിന് ആനുപാതികമാണ്.

ഇനി വേഗം എപ്പോഴും മാറുന്നുവെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി, മുകളിൽനിന്ന് ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം ഓരോ ക്ഷണവും മാറുന്നുണ്ട്; x സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നത്. $4.9x^2$ മീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ ഒരു സെക്കന്റിൽ 4.9 മീറ്ററും, രണ്ടു സെക്കന്റിൽ 19.6 മീറ്ററുമാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. അതായത്, ഈ സഞ്ചാരത്തിൽ, സമയവും ദൂരവും ഒരേ തോതിലല്ല മാറുന്നത്; അവയുടെ അംശബന്ധം ഓരോ സമയത്തും മാറുന്നു. അവ ആനുപാതികമല്ല.

ഈ സഞ്ചാരത്തിൽത്തന്നെ, x സെക്കന്റിലെ വേഗം y മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെടുത്താൽ, സമയ-വേഗ സമവാക്യം $y = 9.8\,x$ എന്നാകും. സമയത്തിന് ആനുപാതികമായാണോ വേഗം മാറുന്നത്?

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു നോക്കാം.

സന്ദർഭം	അളവുകൾ		സമവാക്യം	ആനുപാതികം
	x	y		
സമചതുരം	വശം	ചുറ്റളവ്	$y = 4x$	അതെ
	വശം	വികർണം	$y = \sqrt{2}\,x$	അതെ
	വശം	പരപ്പളവ്	$y = x^2$	അല്ല
സഞ്ചാരം ഒരേ വേഗം	സമയം	ദൂരം	$y = 10x$	അതെ
സഞ്ചാരം മാറുന്ന വേഗം	സമയം	ദൂരം	$y = 4.9\,x^2$	അല്ല
	സമയം	വേഗം	$y = 9.8x$	അതെ

ഇതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്താണ്? ഒരളവ് മാറുമ്പോൾ, അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അളവുകളെല്ലാം അതിനനുസരിച്ചു മാറുന്നു, സ്വതന്ത്രമായി മാറുന്ന അളവിന്റെ നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആയിട്ടാണ് ബന്ധപ്പെട്ട ഒരളവ് മാറുന്നതെങ്കിൽ, ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല; അതായത്, മാറ്റം അനുപാതികമാണ്.

ഇത് ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞുനോക്കാം: സ്വതന്ത്രമായി മാറുന്ന അളവിനെ x എന്നും, അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരളവിനെ y എന്നുമെടുക്കാം. ഏതു സന്ദർഭത്തിലും x എന്ന അളവിനെ k എന്ന നിശ്ചിതസംഖ്യ (x മാറുമ്പോഴും മാറാത്ത സംഖ്യ) കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് y എങ്കിൽ, ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

$$y = kx$$

എന്നെഴുതാം. ഈ സമവാക്യംതന്നെ

$$\frac{y}{x} = k$$

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു Angle slider α നിർമിക്കുക. ഒരു വര AB വരച്ച് അതുമായി α കോണളവിൽ ചരിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന മറ്റൊരു വര AB′ വരയ്ക്കുക. ഈ വരയിൽ ഒരു ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തി അതിൽനിന്നു AB യ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ലംബവും AB യും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി ലംബം മറച്ച് വയ്ക്കാം. CA, CD എന്നീ വരകൾ വരച്ച് നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. CA, CD എന്നീനീളങ്ങൾ ആനുപാതികമായാണോ മാറുന്നത്? 30°, 45°, 60° എന്നിങ്ങനെയുള്ള കോണുകളിൽ ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക.

എന്നുമെഴുതാം, അപ്പോൾ ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : k$ ആയിത്തന്നെ മാറാതെ നിൽക്കുന്നുവെന്നു കാണാം. അതായത്, x ന് ആനുപാതികമായാണ് y മാറുന്നത്.

ആനുപാതികമാറ്റത്തിന്റെ സമവാക്യത്തിലെ നിശ്ചിതസംഖ്യയെ ആനുപാതികസ്ഥിരം (proportionality constant) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി ഭൂമിയിലേക്ക് വീഴുന്ന വസ്തുവിന്റെ സമയ-വേഗ സമവാക്യത്തിൽ 9.8 ആണ് ആനുപാതികസ്ഥിരം; ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലമുള്ള ത്വരണം (accelaration due to gravity) എന്നാണ് ഈ സംഖ്യയുടെ ഭൗതികവ്യഖ്യാനം.

ഇതുപോലെ ഒരേ പദാർത്ഥം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വസ്തുക്കളുടെയെല്ലാം ദ്രവ്യമാനം (mass), വ്യാപ്തത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. ഇതിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരത്തെയാണ് പദാർത്ഥത്തിന്റെ സാന്ദ്രത (density) എന്നു പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, ഇരുമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത 7.87; ചെമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത 8.96. അതായത്, ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനം, വ്യാപ്തത്തിന്റെ 7.87 മടങ്ങും, ചെമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനം, വ്യാപ്തത്തിന്റെ 8.96 മടങ്ങുമാണ്.

?

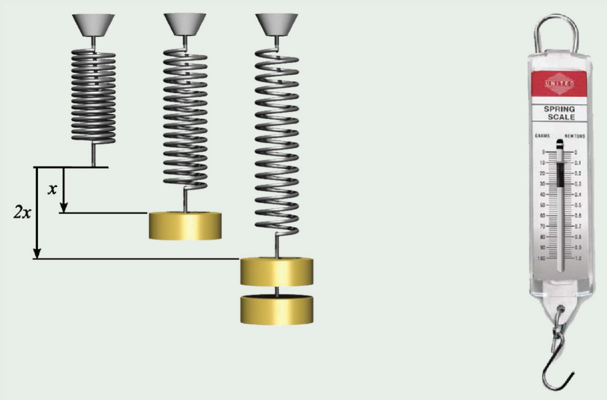
(1) ചുവടെപറയുന്ന ഓരോ ജോടി അളവുകളിലും, ആദ്യത്തേതിന് ആനുപാതികമായാണോ രണ്ടാമത്തേത് മാറുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക; ആനുപാതികമായവയിൽ, ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക.

- i) വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും ചുറ്റളവും.
- ii) വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും പരപ്പളവും.
- iii) ഒരു വരയിലുരുളുന്ന ഒരു വളയത്തിന്റെ കറക്കങ്ങളുടെ എണ്ണവും, നേരേ സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും.
- iv) വാർഷികമായി പലിശ കണക്കാക്കുന്ന പദ്ധതിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്ന തുകയും, ഒരു വർഷത്തെ പലിശയും.
- v) സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിലൊഴിക്കുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തവും, പാത്രത്തിലെ വെള്ളത്തിന്റെ ഉയരവും.

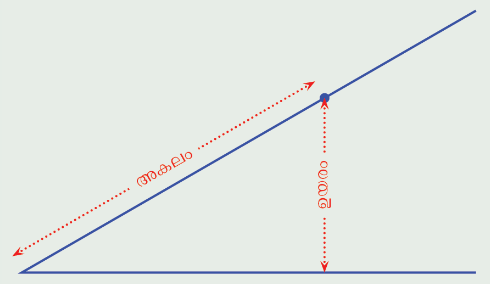
(2) മഴപെയ്യുമ്പോൾ ഓരോ ചതുരശ്രമീറ്ററിലും വീഴുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, തുല്യമാണെന്നെടുക്കാം. ഇതനുസരിച്ച്.

- i) ഒരു സ്ഥലത്തു വീഴുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവിന് ആനുപാതികമാണെന്നു സമർഥിക്കുക.
- ii) അടുത്തടുത്തു വയ്ക്കുന്ന സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള പാത്രങ്ങളിലെല്ലാം ഒരേ ഉയരത്തിൽ മഴവെള്ളം നിറയുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(3) ഒരു സ്പ്രിങ്ങിൽ ഭാരം തൂക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ നീളത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം, ഭാരത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. സ്പ്രിങ്ങ്ത്രാസിൽ ഭാരങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ഇതെങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാമെന്നു വിശദീകരിക്കുക.



(4) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന കോണിൽ, ചരിഞ്ഞ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാമെടുത്താൽ, കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്നുള്ള അകലം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച്, താഴത്തെ വരയിൽനിന്നുള്ള ഉയരവും മാറും.



i) ഉയരം മാറുന്നത്, അകലത്തിന് ആനുപാതികമായിട്ടാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ii) 30°, 45°, 60° കോണുകളിൽ ഈ ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക.

പലതരം അനുപാതം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണവും, അതിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഈ ബന്ധം ആനുപാതികമാണോ?

ത്രികോണത്തിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക 180°; ഷഡ്ഭുജത്തിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക 720°. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ടുമടങ്ങായപ്പോൾ, കോണുകളുടെ തുക രണ്ടു മടങ്ങിനേക്കാൾ കൂടുതലായി. അപ്പോൾ ഈ ബന്ധം ആനുപാതികമല്ല.

വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽനിന്ന് 2 കുറച്ച സംഖ്യകൊണ്ട് 180° നെ ഗുണിച്ചതാണ്, അകക്കോണുകളുടെ തുകയെന്നറിയാം, അതായത്, വശങ്ങളുടെ എണ്ണം n എന്നും കോണുകളുടെ തുക s° എന്നുമെടുത്താൽ

$$s = 180\,(n - 2)$$

ഇതിലെ $n - 2$ എന്ന സംഖ്യയെ m എന്നെഴുതിയാലോ?

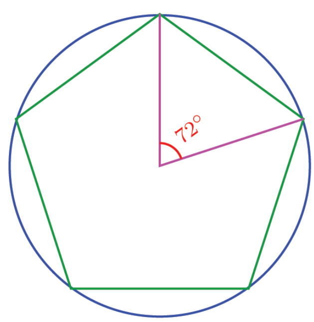
സമവാക്യം

$$s = 180\,m$$

എന്നാകും; അപ്പോൾ s എന്ന അളവ്, m എന്ന അളവിന് ആനുപാതികമാണ്. സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ബഹുഭുജങ്ങളിലെല്ലാം, അകക്കോണുകളുടെ തുക, വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽനിന്ന് രണ്ടു കുറച്ചതിന് ആനുപാതികമാണ്.

ഇങ്ങനെ ഒരളവിനോട് മറ്റൊരളവ് ആനുപാതികമല്ലെങ്കിലും, ആദ്യത്തെ അളവിനെ അൽപമൊന്നു മാറ്റിയതിനോട് ആനുപാതികമാകുന്ന പല സന്ദർഭങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ നിശ്ചിത (π കൊണ്ടുള്ള) ഗുണിതമായതിനാൽ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന് ആനുപാതികമല്ല; എന്നാൽ, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനോട് ആനുപാതികമാണ്. ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽനിന്ന് ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്ന വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, സമയത്തിന് ആനുപാതികല്ലെങ്കിലും, സമയത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണ്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഏതു സമബഹുഭുജത്തിലും എല്ലാ മൂലകളിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ. അടുത്തടുത്ത മൂലകൾ ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ കണക്കെന്താണ്?



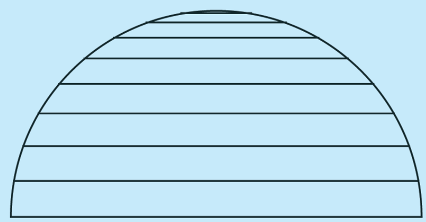
x വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജത്തിൽ ഈ കേന്ദ്രകോൺ y° എന്നെടുത്താൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$y = \frac{360}{x} \qquad y = 360 \times \frac{1}{x}$$

അതായത്, ഇവിടെ x ന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് y മാറുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഒരളവിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്

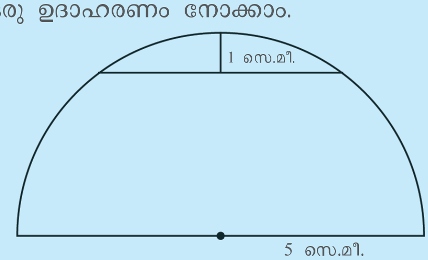
അനുപാതപ്രശ്നം

ചിത്രത്തിൽ ഒരു അർധവൃത്തത്തിൽ കുറേ ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



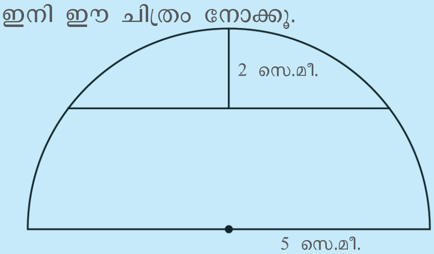
മുകളിൽ നിന്നുള്ള അകലം കൂടുന്തോറും ഞാണിന്റെ നീളവും കൂടുന്നുണ്ടല്ലോ. ഈ മാറ്റം ആനുപാതികമാണോ?

ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.



മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ ഞാണിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. (ചെയ്തു നോക്കൂ!)

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

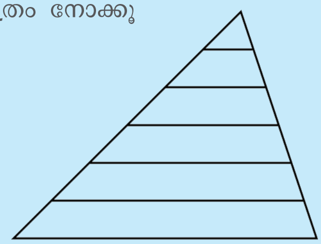


ഇപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയി.

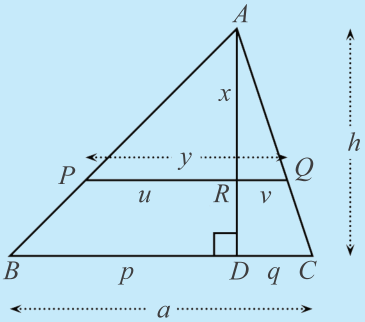
മുകളിൽനിന്നുള്ള അകലം ഇരട്ടിച്ചപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം ഇരട്ടി ആകുകയല്ലല്ലോ ചെയ്തത്. അപ്പോൾ ഈ മാറ്റം ആനുപാതികമല്ല.

ഉയരവും വീതിയും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ



ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി കുറേ വരകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. മുകളിലത്തെ ശീർഷത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം കൂടുന്തോറും ഈ സമാന്തരവരകളുടെ നീളം കൂടുന്നുണ്ടല്ലോ. ഇത് ആനുപാതികമാണോ?



ΔAPR, ΔABD ഇവ സദൃശമായതിനാൽ

$$\frac{u}{p} = \frac{x}{h}$$

ΔAQR, ΔACD ഇവ സദൃശമായതിനാൽ

$$\frac{v}{q} = \frac{x}{h}$$

ഇവയിൽ നിന്ന്

$$\frac{u}{x} = \frac{p}{h}, \quad \frac{v}{x} = \frac{q}{h}$$

അപ്പോൾ

$$\frac{y}{x} = \frac{u+v}{x} = \frac{p+q}{h} = \frac{a}{h}$$

വിവിധ സമാന്തരവരകൾക്ക് x, y ഇവ മാറും; a, h ഇവ മാറില്ലല്ലോ. അതായത്, x, y ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല.

ആനുപാതികമായി മറ്റൊരളവ് മാറുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലുമുണ്ട്. ഇത്തരം മാറ്റങ്ങളെ വിപരീതാനുപാതം (inverse proportion) എന്നു പറയുന്നു. അതായത് x എന്ന അളവ് മാറുന്നതനുസരിച്ച് y എന്ന അളവ് മാറുന്നതിന്റെ സമവാക്യം $y = \frac{k}{x}$ എന്ന രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, x നു വിപരീതാനുപാതത്തിൽ y മാറുന്നു എന്നു പറയുന്നു (ഇവിടെയും x മാറുന്നതനുസരിച്ച് മാറാത്ത സംഖ്യയാണ് k).

ഇത്തരം മാറ്റവുമായി വേർതിരിച്ചു പറയുന്നതിനുള്ള സൗകര്യത്തിനുവേണ്ടി, $y = kx$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള മാറ്റത്തെ നേരനുപാതം (direct proportion) എന്നും പറയാറുണ്ട്.

വിപരീതാനുപാതത്തിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 100 മീറ്റർ അകലെയുള്ള മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് നേർവരയിലൂടെ ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സങ്കൽപിക്കുക. സഞ്ചരിക്കുന്ന വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആണെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലെത്താൻ 10 സെക്കന്റ് വേണം; വേഗം കൂട്ടി 25 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആക്കിയാൽ, 4 സെക്കന്റ് മതി. പൊതുവെ, വേഗം x മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും, ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തെത്താൻ എടുക്കുന്ന സമയം y സെക്കന്റ് എന്നും എഴുതിയാൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയാകും.

$$y = \frac{100}{x}$$

അതായത്, x നു വിപരീതാനുപാതത്തിലാണ് y മാറുന്നത്.

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ പല അറിവുകളും അനുപാതത്തിന്റെ ഭാഷയിലാണ് പറയുന്നത്. അവയിൽ വളരെ പ്രധാനമായതാണ് ന്യൂട്ടന്റെ വിശ്വാകർഷണ നിയമം (law of universal gravitation)

> പ്രപഞ്ചത്തിലെ ഏതു രണ്ടു വസ്തുക്കളും പരസ്പരം ആകർഷിക്കുന്നു. ഈ ആകർഷണ ബലം, അവയുടെ ദ്രവ്യമാനങ്ങളുടെ ഗുണഫലത്തിന് നേരനുപാതത്തിലും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗത്തിന് വിപരീതാനുപാത്തിലുമാണ്.

രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ ദ്രവ്യമാനം m_1, m_2 എന്നും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം r എന്നുമെടുത്താൽ, ഈ നിയമത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(1) i) സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

ii) സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണോ? ആണെങ്കിൽ, ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

(2) പരപ്പളവ് ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററായ ചതുരങ്ങളിൽ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളവും മാറണം. ഈ ബന്ധം ബീജഗണിതസമവാക്യമായി എഴുതുക. അനുപാതത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ഈ ബന്ധം എങ്ങനെ പറയാം?

(3) ഒരേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ നീളവും, എതിർമൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അനുപാതമായി എങ്ങനെ പറയാം? ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിനു പകരം, ഏറ്റവും ചെറിയ വശമെടുത്താലോ?

(4) സമബഹുഭുജങ്ങളിൽ, വശങ്ങളുടെ എണ്ണവും, ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്? ഈ ബന്ധം അനുപാതമായി പറയാൻ കഴിയുമോ?

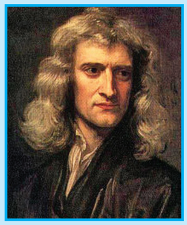
(5) ചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും ഒരു നിശ്ചിത വ്യാപ്തം വെള്ളം ഒരു കുഴലിലൂടെ ഒഴിക്കണം. വ്യത്യസ്ത കുഴലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് വെള്ളമൊഴുകുന്നതിന്റെ നിരക്ക് മാറ്റാം. ചുവടെപ്പറയുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ബീജഗണിതസമവാക്യമായും, അനുപാതമായു

i) വെള്ളം ഒഴുകുന്നതിന്റെ നിരക്കും, സംഭരണിയിലെ വെള്ളത്തിന്റെ ഉയരവും

ii) വെള്ളം ഒഴുകുന്നതിന്റെ നിരക്കും, സംഭരണി നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയവും.

ന്യൂട്ടൺ

പ്രകൃതിനിയമങ്ങൾ വ്യാഖ്യാനിക്കേണ്ടത് ഗണിതത്തിലൂടെയാണെന്ന ചിന്ത ആദ്യം അവതരിപ്പിച്ചത്, പതിനാറാംനൂറ്റാണ്ടിൽ ഗലിലെയോ ആണ്. ഈ ചിന്തയുടെ ഏറ്റവും മികച്ച പ്രകാശനമാണ് പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ന്യൂട്ടൺ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച പ്രകൃതിതത്വങ്ങളുടെ ഗണിതനിയമങ്ങൾ (Philosophia Naturalis Principia Mathematica) എന്ന ഗ്രന്ഥം. ചലനത്തിന്റെ ഗണിതനിയമങ്ങളും, വിശ്വാകർഷണ നിയമവും ഇതിലാണ് ന്യൂട്ടൻ അവതരിപ്പിച്ചത്. ഇതിനായി പുതിയ ചില ഗണിതരീതികൾതന്നെ അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഈ രീതികൾ പിന്നീട് കലനം (calculus) എന്നൊരു ഗണിതശാഖയായി വളർന്നു.



തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ട അളവുകൾക്കുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളിൽ, ആനുപാതികമായ മാറ്റം തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• ആനുപാതിക മാറ്റങ്ങളിലെ ആനുപാതിക സ്ഥിരത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം സമർഥിക്കുന്നു.			
• മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ആനുപാതിക മാറ്റങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• ആനുപാതികമായി മാറുന്ന അളവുകളെയും, വിപരീതാനുപാതികമായി മാറുന്ന അളവുകളെയും തിരിച്ചറിയുന്നു.			

13 സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ശരാശരി

ആറാംക്ലാസിൽ ശരാശരിയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചത് ഓർമയുണ്ടോ? ഒരു ശരാശരിക്കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന അഞ്ചു കൂട്ടുകാരുടെ ദിവസവരുമാനം ഇതൊക്കെയാണ്:

350 രൂപ, 400 രൂപ, 350 രൂപ, 450 രൂപ, 450 രൂപ,

ഇവരിൽ ഒരാളുടെ ശരാശരി ദിവസവരുമാനം എത്ര രൂപയാണ്?

അഞ്ചുപേരുടെയും ഒരു ദിവസത്തെ ആകെ വരുമാനത്തെ അഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിക്കണം. അതിൽ 350, 450 എന്നീ സംഖ്യകൾ രണ്ടു തവണയുണ്ടെന്നു കണ്ടാൽ, കൂട്ടുന്നത് അൽപം എളുപ്പമാക്കാം:

$$(2 \times 350) + (2 \times 450) + 400 = 2000$$

ശരാശരി 400 രൂപ.

ഓരോരുത്തരുടെയും വരുമാനം വെവ്വേറെ പറയാതെ, ശരാശരി ദിവസവരുമാനം 400 രൂപ എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഈ അഞ്ചുപേരുടെ സാമ്പത്തിക സ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് ഒരേകദേശ ധാരണയുണ്ടാകുമല്ലോ.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ പലതരം ജോലി ചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണവും ദിവസക്കൂലിയും പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
300	2
350	4
400	6
450	4
500	4

ശരാശരി ദിവസക്കൂലി എത്ര രൂപയാണ്?

ആകെ 20 ജോലിക്കാരുണ്ട്; ഇവരുടെ ആകെ കൂലി കണക്കാക്കണം. ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ആവർത്തിച്ചുള്ള കൂട്ടലുകൾ ഗുണനമായി എഴുതാമല്ലോ.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ആകെ കൂലി (രൂപ)
300	2	600
350	4	1400
400	6	2400
450	4	1800
500	4	2000
ആകെ	20	8200

ശരാശരി ദിവസക്കൂലി $8200 \div 20 = 410$ രൂപ എന്നു കണക്കാക്കാം.

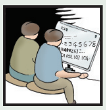
ഈ കണക്കിൽ എല്ലാവരുടെയും കൂലി, 300 രൂപയ്ക്കും, 500 രൂപയ്ക്കുമിടയിലാണ്. ശരാശരി കൂലിയായ 410 രൂപയും അതുപോലെ തന്നെ. ഇതെപ്പോഴും ശരിയാണോ?

ഉദാഹരണമായി, 100 നും 200 നും ഇടയ്ക്കുള്ള 8 സംഖ്യകളെടുത്തുവെന്നു കരുതുക. എല്ലാ സംഖ്യകളും 100 നു തുല്യമോ അതിൽക്കൂടുതലോ ആയതിനാൽ, ഈ 8 സംഖ്യകളുടെ തുക 800 നു തുല്യമോ, അതിൽക്കൂടുതലോ ആണ്; ഈ തുകയെ 8 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ശരാശരിയും 100 നു തുല്യമോ അതിൽക്കൂടുതലോ ആണ്.

ഇതുപോലെ, എല്ലാ സംഖ്യകളും 200 നു തുല്യമോ, അതിൽക്കുറവോ ആയതിനാൽ, ശരാശരിയും അതുപോലെയാണ് എന്നു കാണാം.

100, 200, 8 എന്നതിനു പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇതേ രീതിയിൽ ചിന്തിക്കാം. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

രണ്ടു നിശ്ചിതസംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള എത്ര സംഖ്യകളെടുത്താലും, അവയുടെ ശരാശരിയും ഈ നിശ്ചിത സംഖ്യകൾക്കിടയിലായിരിക്കും.



(1) ഒരു വോളിബോൾ ടീമിലെ 6 കളിക്കാർക്കും ഒരേ ഭാരമല്ല; ശരാശരി ഭാരം 60 കിലോഗ്രാമാണ്.

i) 60 കിലോഗ്രാമിനേക്കാൾ ഭാരം കൂടുതലുള്ള ഒരു കളിക്കാരനെങ്കിലുമുണ്ടെന്ന് സമർഥിക്കുക.

ii) 60 കിലോഗ്രാമിനേക്കാൾ ഭാരം കുറവായ ഒരു കളിക്കാരനെങ്കിലുമുണ്ടെന്ന് സമർഥിക്കുക.

(2) ശരാശരി 60 ആയ 6 സംഖ്യകൾ, ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ രീതിയിലും കണ്ടുപിടിക്കുക

i) 4 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ ചെറുത്, 2 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ വലുത്

ii) 4 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ വലുത്, 2 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ ചെറുത്

(3) ക്ലാസിൽ ഒരു കണക്കു പരീക്ഷ നടത്തി, മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ കുട്ടികളെ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്;

മാർക്ക്	കുട്ടികൾ
2	1
3	2
4	5
5	4
6	6
7	11
8	10
9	4
10	2

ക്ലാസിലെ ശരാശരി മാർക്ക് കണക്കാക്കുക

(4) ഒരു പ്രദേശത്തു ലഭിച്ച മഴയുടെ അളവനുസരിച്ച് ഒരു മാസത്തിലെ ദിവസങ്ങളെ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്:

മഴ (മി.മീ)	ദിവസങ്ങൾ
54	3
56	5
58	6
55	3
50	2
47	4
44	5
41	2

ആ മാസം അവിടെ ഒരു ദിവസം പെയ്ത മഴയുടെ ശരാശരി അളവെന്താണ്?

(5) ഒരു കർഷകന് ഒരു മാസം കിട്ടിയ റബ്ബർഷീറ്റിന്റെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിലുണ്ട്.

റബ്ബർ (കിഗ്രാം)	ദിവസങ്ങൾ
9	3
10	4
11	3
12	3
13	5
14	6
16	6

i) ഈ മാസത്തിൽ ഒരു ദിവസം ശരാശരി എത്ര കിലോഗ്രാം റബ്ബർഷീറ്റ് കിട്ടി?

ii) റബ്ബറിന്റെ വില കിലോഗ്രാമിന് 120 രൂപയാണ്. ഈ മാസത്തിൽ ഒരു ദിവസം റബ്ബറിൽ നിന്നു കിട്ടിയ ശരാശരി വരുമാനം എത്ര രൂപയാണ്?

വിഭാഗപ്പട്ടികകൾ

വിവരങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോഴും മറ്റും, വിഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ച് പട്ടികയാക്കുന്ന രീതി എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. അത്തരത്തിലൊരു കണക്കു നോക്കാം.

ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ ദിവസവേതനക്കാരുടെ തരം തിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ദിവസവേതനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
250 - 300	8
300 - 350	4
350 - 400	16
400 - 450	7
450 - 500	5

ഈ ഫാക്ടറിയിലെ ശരാശരി ദിവസവേതനം എത്രയാണ്?

ഇവിടെ ആകെ കൊടുക്കുന്ന ദിവസവേതനം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ? പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ, 8 ജോലിക്കാർക്ക് 250 രൂപയ്ക്കും 300 രൂപയ്ക്കും ഇടയ്ക്കുള്ള വേതനം കൊടുക്കുന്നുവെന്നല്ലാതെ കൃത്യമായി ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര കൊടുക്കുന്നുവെന്ന് പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. ഇവർക്ക് കൊടുക്കുന്ന ആകെ വേതനം കണക്കാക്കാൻ ഈ വിവരം മാത്രം പോരാ.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ഇല്ലാത്ത വിവരങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചില സങ്കൽപങ്ങൾ വേണ്ടി വരും. പട്ടികയിലെ ആദ്യവരിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള എട്ടുപേരുടെ

വേതനം വെവ്വേറെ അറിയില്ലെങ്കിലും, അവയെല്ലാം 250 രൂപയ്ക്കും, 300 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണെന്നറിയാം. അപ്പോൾ ഈ എട്ടുപേരുടെ ശരാശരി വേതനവും 250 രൂപയ്ക്കും, 300 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണ്. മാത്രവുമല്ല, സാധാരണഗതിയിൽ ഈ ശരാശരി 250 ന്റെയും 300 ന്റെയും ഏതാണ്ട് നടുക്കായിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

അതിനാൽ ഓരോ വിഭാഗത്തിലുമുള്ളവരുടെ ശരാശരി വേതനം, ആ വിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുക്കുവരുന്ന സംഖ്യ എന്ന സങ്കൽപമനുസരിച്ചാണ് ഇത്തരം പട്ടികകളിൽ നിന്ന് ശരാശരി കണക്കാക്കുന്നത്.

ഇതനുസരിച്ച്, ഈ കണക്കിലെ പട്ടിക ഇങ്ങനെ വലുതാക്കാം:

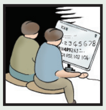
ദിവസവേതനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	വിഭാഗ മധ്യം	ആകെ വേതനം
250 - 300	8	275	2200
300 - 350	4	325	1300
350 - 400	16	375	6000
400 - 450	7	425	2975
450 - 500	5	475	2375
ആകെ	**40**		**14850**

ഇനി ശരാശരി ദിവസവേതനം കണക്കാക്കാമല്ലോ:

കേരളത്തിലെ മൊത്തം സ്കൂൾ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരവും ഭാരവും, കേരളത്തിലെ മൊത്തം ജനങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം എന്നിങ്ങനെയുള്ള വലിയ സംഖ്യാശേഖരങ്ങളിൽ നിന്ന്, അവയുടെ ഏകദേശസ്വഭാവത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചുരുക്കം ചില സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുന്ന പല രീതികളുണ്ട്. ആകെ

തൂകയെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക എന്നത് അവയിലൊന്നു മാത്രമാണ്. ഇത്തരത്തിൽ കണക്കാക്കുന്ന സംഖ്യകളെയെല്ലാം പൊതുവായി ശരാശരി (average), അല്ലെങ്കിൽ മധ്യപ്രവണത (central tendency) എന്നാണ്, ഇവയുടെ ഗണിതപഠനത്തിൽ പറയുന്നത്. സാധാരണ ശരാശരിയെന്നു വിളിക്കുന്ന, തുകയെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന, സംഖ്യയെ മാധ്യം (arithmetic mean or mean) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ ഫാക്ടറിയിലെ മാധ്യ ദിവസവേതനം 371.25 രൂപയാണ്.



(1) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ സംഖ്യയും മാധ്യമായി വരുന്ന 6 വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകൾ 10 നും 30 നും ഇടയിലായി കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) 20 ii) 15 iii) 25

(2) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഉയരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണുന്നത്.

ഉയരം (സെമീ)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
148 - 152	8
152 - 156	10
156 - 160	15
160 - 164	10
164 - 168	7

ഈ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ മാധ്യ ഉയരം എത്രയാണ്?

(3) ഒരു സർവകലാശാലയിലെ അധ്യാപകരുടെ എണ്ണം പ്രായമനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ചെഴുതിയപട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

പ്രായം	ആളുകളുടെ എണ്ണം
25 - 30	6
30 - 35	14
35 - 40	16
40 - 45	22
45 - 50	5
50 - 55	4
55 - 60	3

അധ്യാപകരുടെ മാധ്യ പ്രായം കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഭാരമനുസരിച്ചു തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	21 - 23	23 - 25	25 - 27	27 - 29	29 - 31	31 - 33
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	4		7	6	3	1

മാധ്യഭാരം 26 കിലോഗ്രാം എന്നു കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. 23 കിലോഗ്രാമിനും 25 കിലോഗ്രാമിനും ഇടയിൽ ഭാരമുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• വിഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ച പട്ടികകളിൽനിന്ന് മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുന്നു.			

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ