ತರಗತಿ IX

ಗಣಿತ

MATHEMATICS

ಭಾಗ 1

PART -1

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ

ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ (SCERT), ಕೇರಳ
2016

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ!

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ, ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆ ಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶದ ಮತ್ತು ಜನತೆಯ ಕ್ಷೇಮ ಹಾಗೂ ಸಮೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ಸದಾ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಅಳತೆಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳ ಕಲಿಕೆಯಾಗಿ ಗಣಿತವು ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವುದು. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ, ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರೂಪಗಳಾಗಿಯೂ ಕಂಡುಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುವಾಗ ಗಣಿತದ ಆಶಯ ತಲವು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು. ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗುವುವು. ಹೊಸ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ವಾಖ್ಯಾನಿಸಲು, ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಕೇತಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಸತ್ಯಾಂಶಗಳ ಕಾರ್ಯ ಕಾರಣ ಸಂಬಂಧವು, ಆಶಯಗಳ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತಿಯಾಗಿ ಬೆಳೆಯುವುದು. ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವು ಬೆಳೆಯುವುದು. ಅದರ ಮುಂದಿನ ಹಂತಕ್ಕೆ ಸ್ವಾಗತ.

ಡಾ. ಪಿ.ಎ ಫಾತಿಮ

ನಿರ್ದೇಶಕರು

ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ

TEXT BOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

PARTICIPANTS

T.P Prakashan
GHSS, Vazhakadu, Malappuram

Unnikrishnan M.V
GHSS Kumbla, Kasaragod

Vijayakumar T.K
GHSS Cherkala, Kasaragod

Ramanujam R
HSST, MNKM GHSS Pulapetta, Palakkad

Anil Kumar M.K.
HSA, SKMJ HSS Kalpetta, Wayanad

Anil C.Ushus
GHS Nedumbrum, Thiruvalla, Pattanamthitta

Krishnaprasad M
PMSA HSS, Chappangadi, Malappuram

Ubaidulla K.C.
SOHSS, Arikode, Malappuram

Rameshan N.K
R.G. MHSS Mokeri, Kannur

Jabir K.
GVHSS Mogral, Kasaragod.

Sreekumar T.
GGHSS, Karamana, Thiruvanathapuram

K.J. Prakash
GMGHSS Pattam, Thiruvanathapuram

Shijo David C
CMSSHSS Trissur

Froyd Francis P
VHSS Valancheri, Malapuram

Cover

Rajeevan N T
GHSS Tariyod, Wayanad

Experts

Dr. E Krishnan
Prof. (Rtd) University College, Thiruvananthapuram

Dr. Ramesh Kumar P.
Asst. Professor, Kerala University

Venugopal C
Asst. Professor, Govt College of Teacher Education, Thiruvananthapuram

Dr. Sharachandran
Rtd. Deputy Director
Collegeate Education, Kottayam

Academic Co-ordinator

Sujith Kumar G.
Resarch Officer, SCERT, Thiruvananthapuram

Translators

Balakrishna P.
BEMHSS, Kasaragod

Krishna Prakash S.
SNHS Perla

Raghava A.
GHSS Belluru

Harsha Kumar M.
SGKHS Kudlu

Rajesh Chandra
BEMHSS, Kasaragod

Prapulla Chandra C.H.
GHSS Adoor

Language Expert

Shridhara N.
Asst. Prof. Govt. College, Kasaragod

Course Co-ordinator

Dr. Faisal Mavulladathil
Research Officer, SCERT, Thiruvananthapuram

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ (SCERT)
ವಿದ್ಯಾಭವನ, ಪೂಜಪ್ಪುರ, ತಿರುವನಂತಪುರಂ–695 012

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

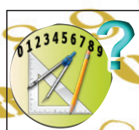
ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ
ಕೆಲವು ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.


ಐ.ಸಿ.ಟಿ. ಸಾಧ್ಯತೆ


ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ


ಸಂಶೋಧನೆ

ಪುನರವಲೋಕನ



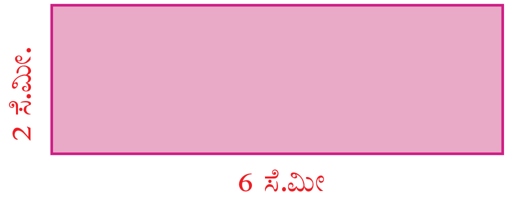
ಚರ್ಚಿಸೋಣ

1 ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 12 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು?

ಈ ರೀತಿಯಾಗಬಹುದು.

ಹೀಗೂ ಆಗಬಹುದು

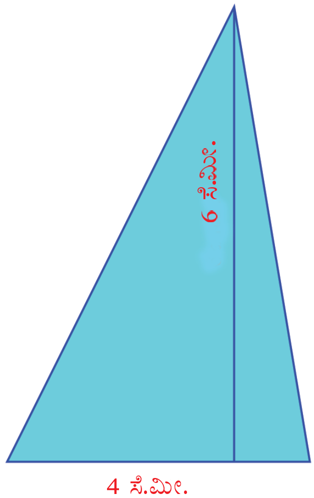


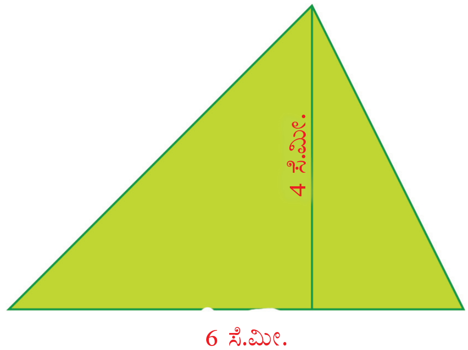
ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಆಗಬಹುದು ಅಲ್ಲವೇ?

ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು 8 ಸೆ.ಮೀ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದೂ ಹೇಳಿದರೆ? ಒಂದು ಆಯತ ಮಾತ್ರ ಇರುವುದಲ್ಲವೇ?

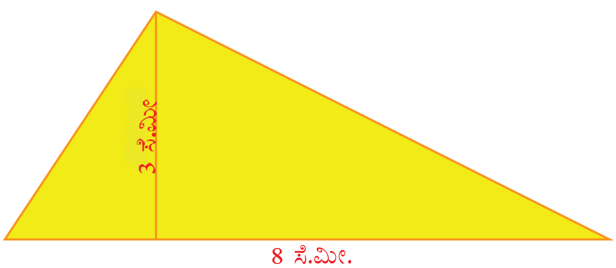
12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಬೇಕಾಗಿರುವುದಾದರೆ?

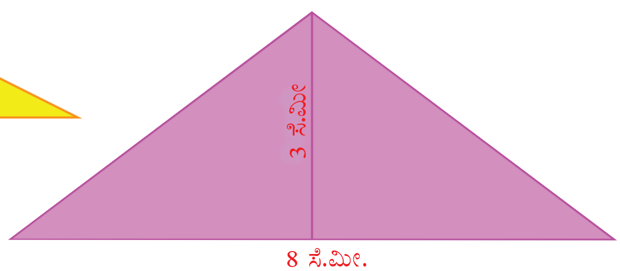
ಅದು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಬಹದು.



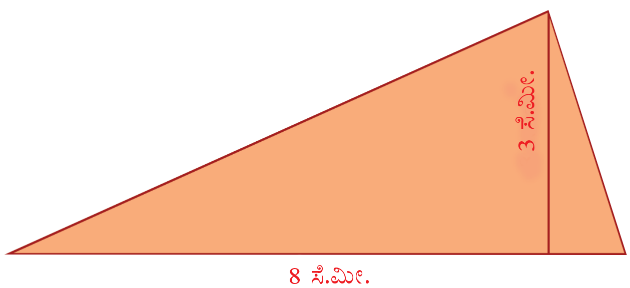


ಒಂದು ಭುಜವು 8 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದೂ ಹೇಳಿದರೆ? ಆಗಲೂ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಬಹುದಲ್ಲವೇ?

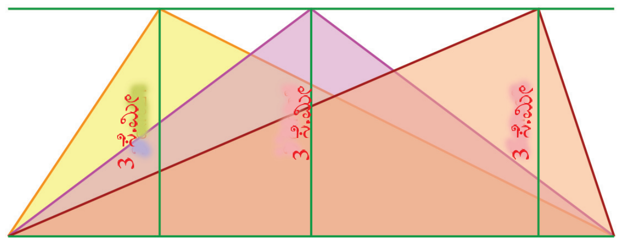




ಉದ್ದ 8 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಈ ಗೆರೆಯಿಂದಿರುವ ಎತ್ತರ 3 ಆಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. (Grid ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು) ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಮೊದಲ ಗೆರೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಆ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಗೆರೆಯ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುಬೇಕು. Area ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗುವುದೇ?



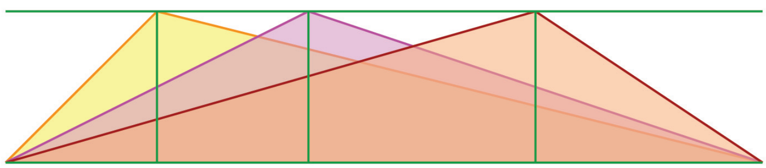
ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಮೇಲಿನ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಬದಲಾಗಿದೆ; ಪಾದವೂ ಉನ್ನತಿಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗಲಿಲ್ಲ.



ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳು ಪಾದದಿಂದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ. ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು: ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳೆಲ್ಲಾ ಪಾದದಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆ.

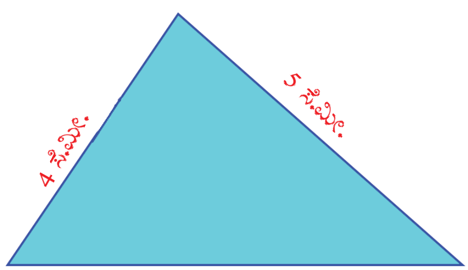
ಇದೇ ಪಾದವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳೆಲ್ಲವು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಆಗಿರಬೇಕಲ್ಲವೇ; ಬದಲಾಗಿ, ಈ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗಲೂ ಇದೇ ಪಾದವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುವು.

ಪಾದವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಬದಲಾದರೂ ಈಗ ಹೇಳಿದ ವಿಚಾರಗಳು ಸರಿಯಲ್ಲವೇ?



ಒಂದು ಭುಜವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಮೂರನೇ ಶಿರ, ಈ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಬದಲಾಗಿ, ಒಂದು ಭುಜ ಸಮಾನವೂ ಮೂರನೇ ಶಿರಗಳೆಲ್ಲಾ ಈ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯಲ್ಲಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವುದು.

ಇದನ್ನು ಯಾವೆಲ್ಲ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂದು ನೋಡುವ.



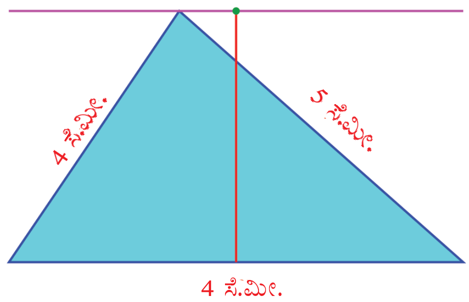
ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 4, 5, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಇನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ ಇದೇ ಆಗಿರುವ ಇದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

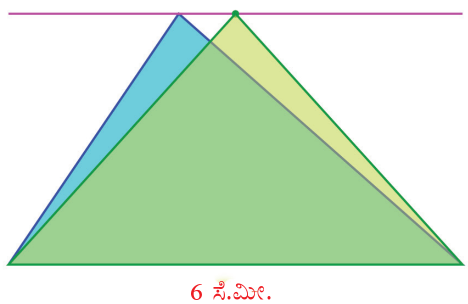
ರಚಿಸಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ಬದಲಾಗದಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಶಿರ ಎಲ್ಲಿರಬೇಕೆಂದು ಮಾತ್ರ ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗದೆ ಇರಬೇಕಾದರೆ, ಅದು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಈಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಾಗಿರಬೇಕು.

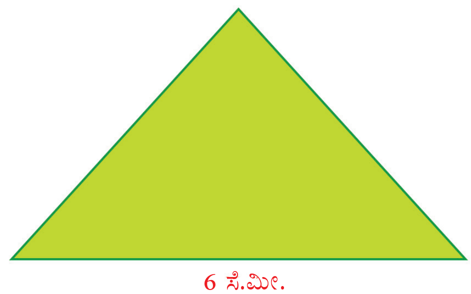
ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಮೇಲಿನ ಶಿರವು ಪಾದದಿಂದಿರುವ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ?

ಹಾಗಾದರೆ ಈಗ ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರವು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಕವು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಮೂರನೇ ಶಿರ.



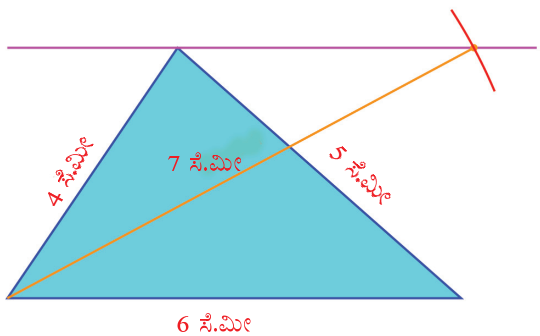
ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.



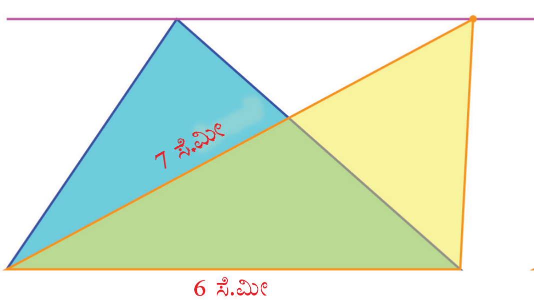


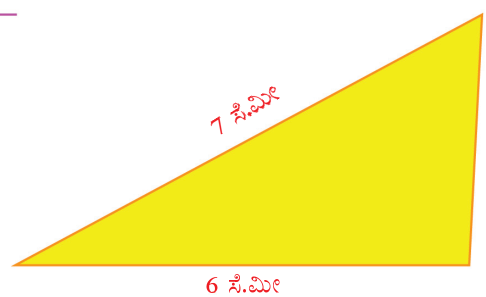
ಇನ್ನು ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ಇದೇ ಆಗಿರುವ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವು 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ?

ಎಡದ ಶಿರದಿಂದ 7 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಚಾಪವನ್ನು ಎಳೆದು, ಮೇಲಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?



ಆಗ ತ್ರಿಕೋನವು ಈ ರೀತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

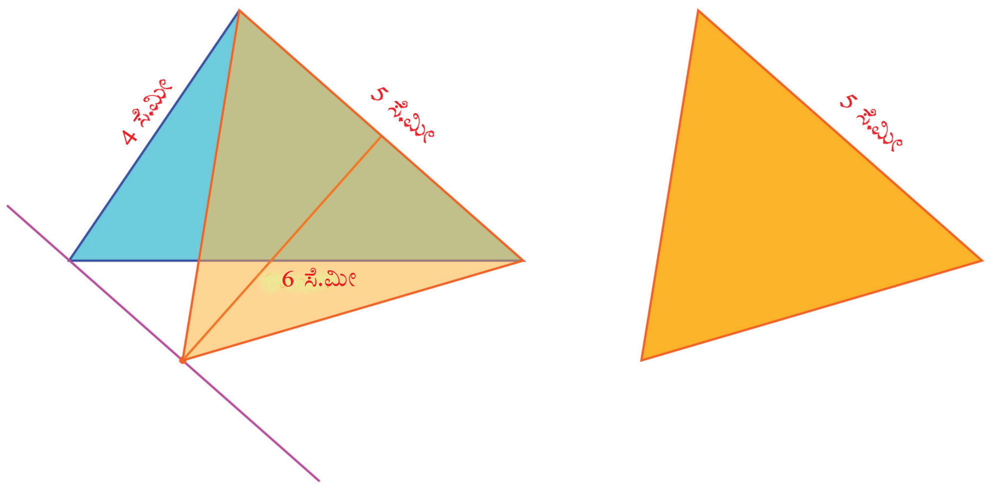




ಇದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು, ಒಂದು ಭುಜವು 5 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಬೇಕಾದರೋ?

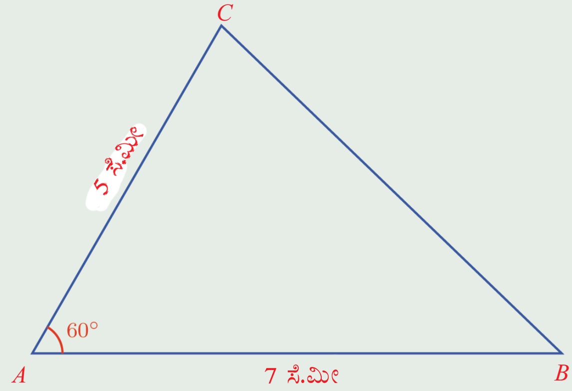
ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿ ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೇ ಪುನಃ ರಚಿಸಿ, ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಸ್ವಲ್ಪ ಬಾಗಿದ ತ್ರಿಕೋನ ಸಾಕೆಂದಾದರೆ ಇದೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಡದ ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಬಲ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಮಾಡಬಹುದು.



(1) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3, 4, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಮೂರು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.



ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ *ABP, ABQ, BCR* ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ

i) $AB = 7$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್, $\angle BAP = 90^\circ$

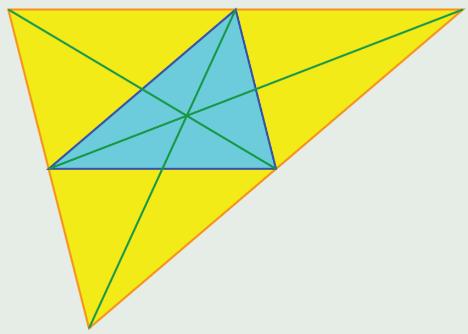
ii) $AC = 5$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್, $\angle ACQ = 60^\circ$

iii) $AB = 7$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್, $\angle ABC = 30^\circ$

(3) ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು, ಅದರಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೂ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವೂ ಶಿರಗಳಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ, ಶಿರಗಳೆಲ್ಲವೂ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

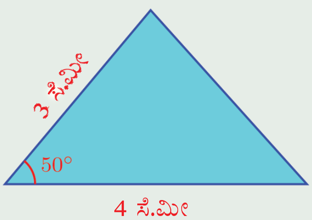
(4) ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 12 ಚ.ಸೆ.ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ(ಸಮಾನವಲ್ಲದ) ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು? ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 24 ಚದರ ಸೆ.ಮೀ. ಆದರೋ?

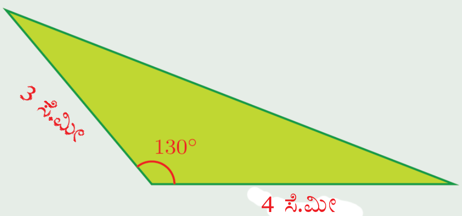
(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ನೀಲಬಣ್ಣದ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜಕ್ಕೂ ಎದುರಿನ ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದಾಗ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನ ಉಂಟಾದುದಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲ ತ್ರಿಕೋನದಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ?

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

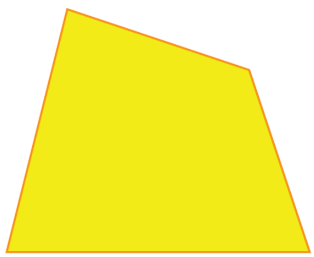




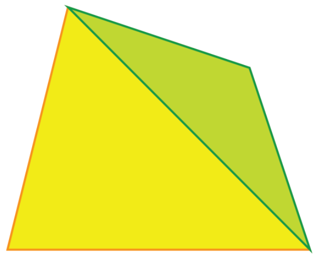
ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು?

ಚತುರ್ಭುಜವೂ ತ್ರಿಕೋನವೂ

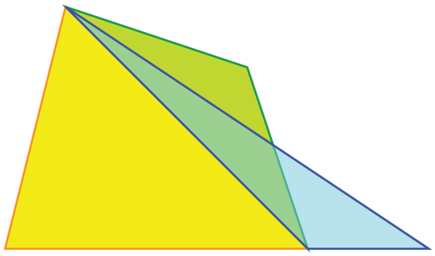
ಯಾವುದೇ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?



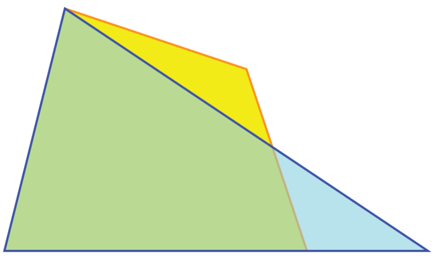
ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನೆಳೆದು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಲ್ಲವೇ.



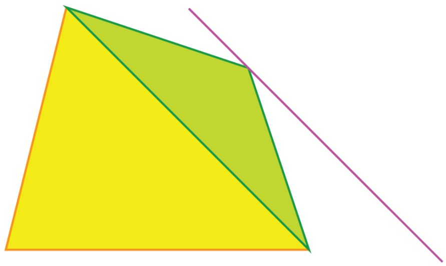
ಇನ್ನೊಂದು ದಾರಿಯಿದೆ. ಪಾದವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಬದಲಾಗದಂತೆ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜದ ಪಾದಕ್ಕೆಳೆದರೋ?



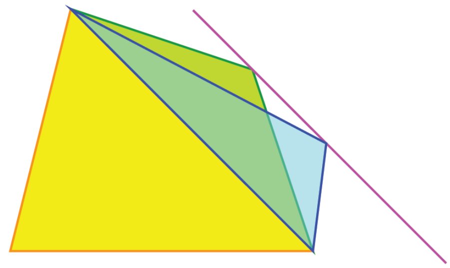
ಈಗ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಹಳದಿ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇವು ಸೇರಿದ ಆಕೃತಿಯೇ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನ. ಹೀಗೆ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಈ ಆಶಯವನ್ನು ನೆರವೇರಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡುವ. ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಪಾದವನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಶಿರ ಬದಲಾಯಿಸಲು ಆ ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆ ಎಳೆದರೆ ಸಾಲದೇ?

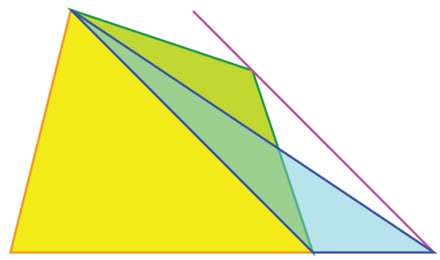


ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಶಿರವು ಈ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಎಷ್ಟು ದೂರಕ್ಕೆ ಸಾಗಿದರೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಹಾಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಹೊಸ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.



ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರವನ್ನು, ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜದ ಪಾದವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದಾಗ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೋ?

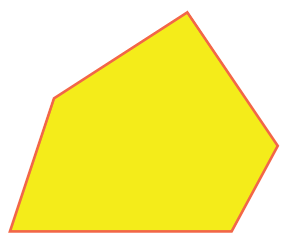
ಚತುರ್ಭುಜದಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವಾಯಿತಲ್ಲವೇ?



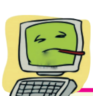
ತುಂಡರಿಸುವುದೂ ಹಿಂಪಡೆಯುವುದೂ

ಕಾಗದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಒಂದು ರೂಪವನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪವಾಗಿ ಜೊಡಿಸಿದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗದೆ ರೂಪವು ಬದಲಾಗುವ ಒಂದು ರೀತಿಯಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ಜೋಡಿಸುವ ಒಂದು ರೀತಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಿಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗದೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ ರೀತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಚತುರ್ಭಜವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ರೀತಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಹಲವಾರು ವೆಬ್‌ಸೈಟ್‌ಗಳ ವಿವರಗಳು www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html ಎಂಬ ವೆಬ್‌ಪೇಜಿನಲ್ಲಿದೆ.

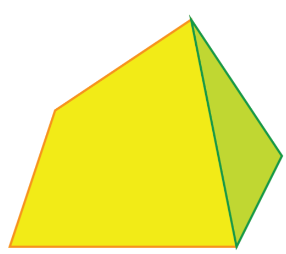
ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಪಂಚಭುಜವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



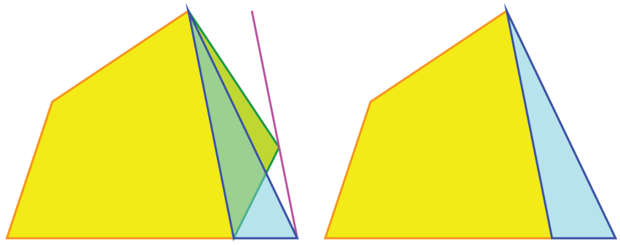
ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವೂ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವೂ ಆಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ.



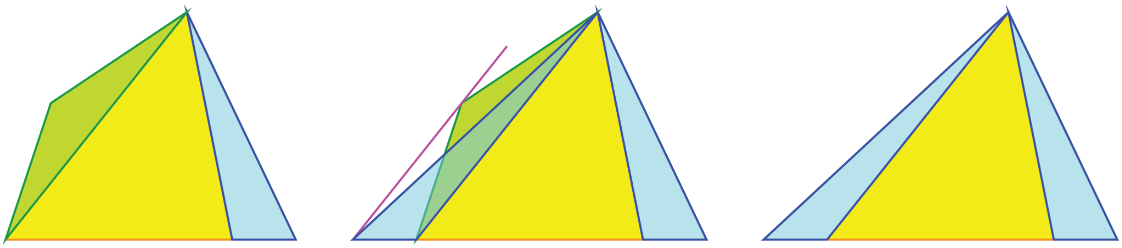
ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜ, ಪಂಚಭುಜ, ಷಡ್ಭುಜ ಮೊದಲಾದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

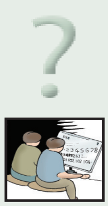


ಇನ್ನು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದು ಪಂಚಭುಜದ ಪಾದಕ್ಕೆ ತಲುಪಿಸಿದರೆ, ಪಂಚಭುಜದಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವಾಯಿತು.

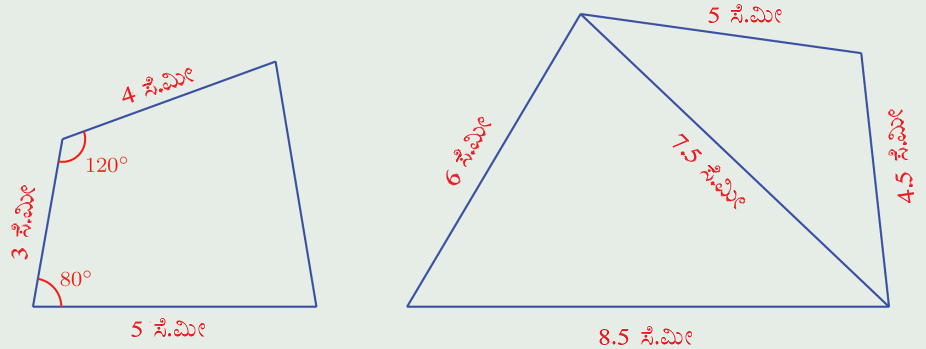


ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಡದ ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಕೆಳಗೆಳೆದರೆ ತ್ರಿಕೋನವಾಗುವುದು.





(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ. (ಬೇಕಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದು ನೋಡಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.)

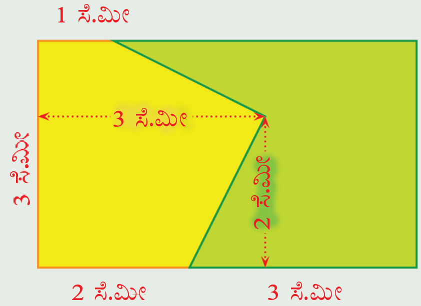


(2) ಒಂದು ಭುಜವು 6 ಸೆ.ಮೀ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಕೋನ 60° ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

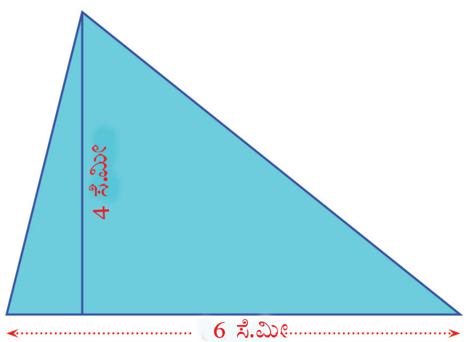
(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

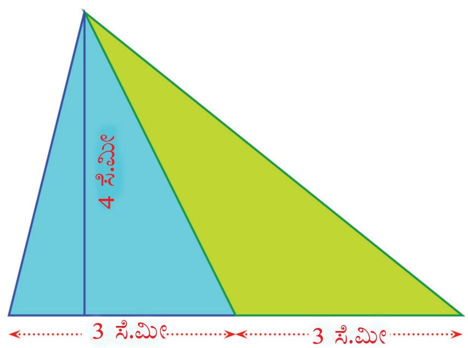
ಈ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದ ಒರೆಯಾದ ಗೆರೆಯ ಬದಲು ನೇರ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು ಆಯತನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.



ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗ

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



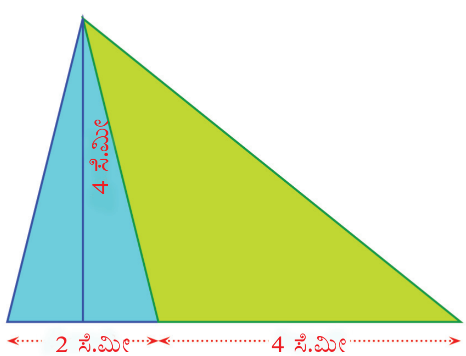


ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರ ಮತ್ತು ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಗೆರೆ, ಅದನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಕೊನಗಳನ್ನಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟಾಗಿದೆ?

ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪಾದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಎತ್ತರವೋ? ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ 4 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. 6 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಇತರ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೋ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಈಗ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 4 ಹಾಗೂ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 8 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಯಿತು.

ಅಂದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ. ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಿದ್ದೂ ಇದೇ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲವೇ? ಸಣ್ಣ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ದೊಡ್ಡ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದ.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೋ?

ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಿದ್ದು 1:2 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಿರುವುದೂ ಅದೇ ನಿಷ್ಪತ್ರಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದಿರುವ ಗೆರೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಹೇಗೆ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ? 2:3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದಾದರೋ?

ಉದ್ದಗಳು ಈ ರೀತಿಯಾಗುತ್ತವೆ.

ಸಣ್ಣ ಭಾಗದ ಉದ್ದ $6 \times \frac{2}{5}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ದೊಡ್ಡ ಭಾಗದ ಉದ್ದ $6 \times \frac{3}{5}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಈ ರೀತಿಯೂ:

ಸಣ್ಣ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $6 \times \frac{2}{5} \times 2 = 12 \times \frac{2}{5}$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ದೊಡ್ಡ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $6 \times \frac{3}{5} \times 2 = 12 \times \frac{3}{5}$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನಿಂದಿರುವ ಗೆರೆಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 12 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರನ್ನು 2:3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲೇ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಯಾವುದೇ ಆದರೂ, ಅದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ. ತ್ರಿಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾದರೂ ಹೇಳಿದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲ.

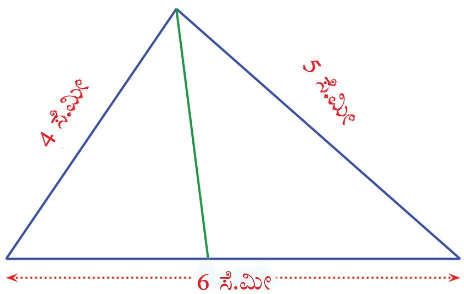
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಶಿರದಿಂದಲೂ ಎದುರಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯು ಆ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನೂ, ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ಎಳೆದ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಸಮಭಾಜಕವು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದೆವು. ಆಗ

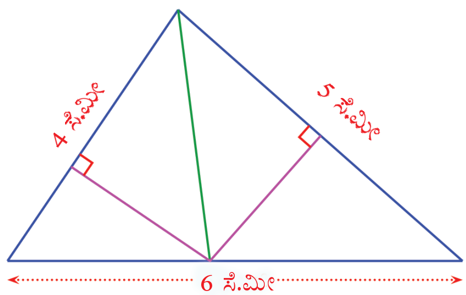
ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ: ಒಂದು ಶಿರದ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವು ಎದುರಿನ ಭುಜವನ್ನು (ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು) ಯಾವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ?

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರದ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಕೋನ ಸಮಭಾಜಕವು ವಿಭಾಗಿಸುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗಗಳ ಒಂದು ಭುಜದ ಅಳತೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆಗ ಈ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಎದುರಿನ ಶಿರದಿಂದ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಬೇಕು. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಅಳತೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಭುಜದ ಎದುರಿನ ಶಿರ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಈ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಕಾಣುವಾಗ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ತೋರುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಅದು ಸರಿಯೋ ಎಂದು ನೋಡುವ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಡದಲ್ಲೂ ಬಲದಲ್ಲೂ ಇರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಕರ್ಣವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ಕರ್ಣವು ಮೇಲಿನ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಕರ್ಣದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವೇ ಆಗಿವೆ. ಅಂದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಲಂಬ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ.



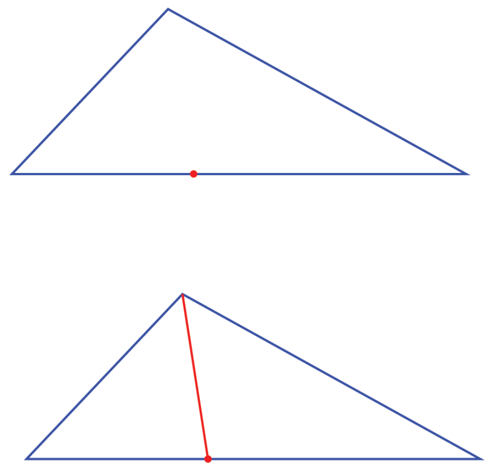
ಆಗ ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು 4ನ್ನೂ 5ನ್ನೂ ಈ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 4:5

ಮೊದಲು ನೋಡಿದಂತೆ, ಕೋನ ಸಮಭಾಜಕವು ಎದುರು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದೂ ಇದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

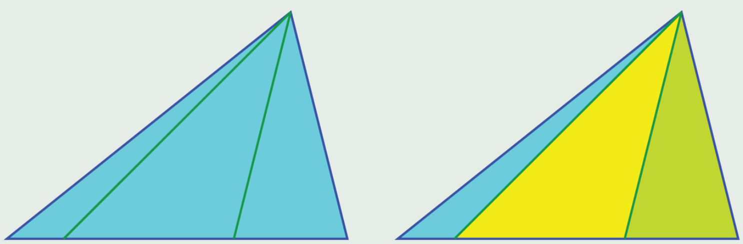
ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಯಾವುದೇ ಆದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವೂ ಎದುರಿನ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು ಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುವು ಆ ಭುಜವನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಮೇಲಿನ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವು ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನೂ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯೇ ಮೇಲಿನ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ.

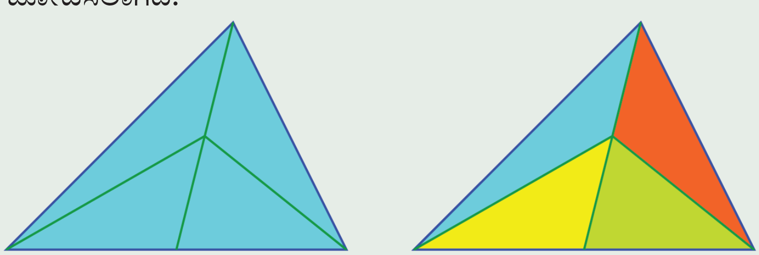


(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



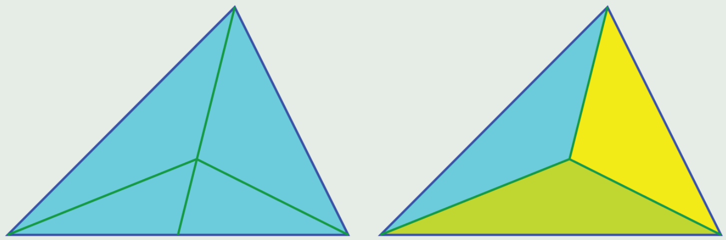
ಈ ಗೆರೆಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರ ಮತ್ತು ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ನಂತರ ಈ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಹೀಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

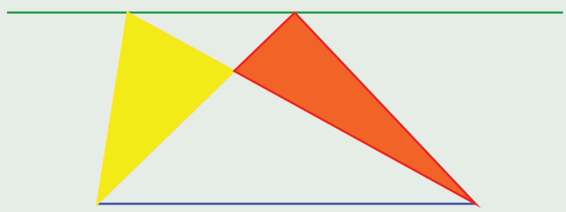
(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದ ನಂತರ ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು $2:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.



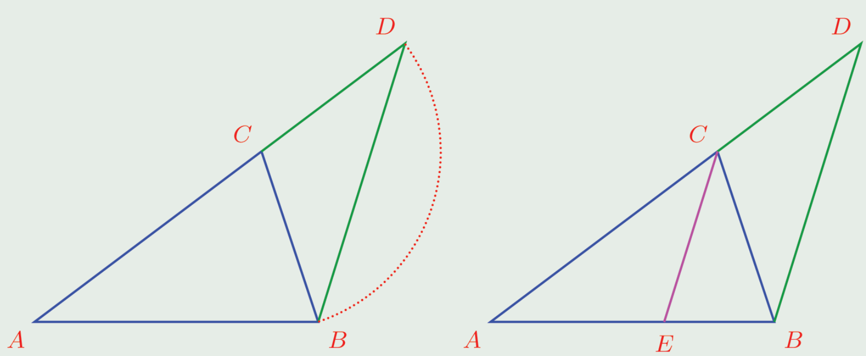
ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೂರನೆ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಒಂದು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆಯೂ ಕೆಳಗೂ ಇರುವ ಅಡ್ಡ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಹಳದಿ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ AC ಎಂಬ ಭುಜಕ್ಕೆ CB ಎಂಬ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ D ಎಂಬಲ್ಲಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನಂತರ DB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ C ಯ ಮೂಲಕ ಗೆರೆ ಎಳೆದು AB ಯಲ್ಲಿನ E ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

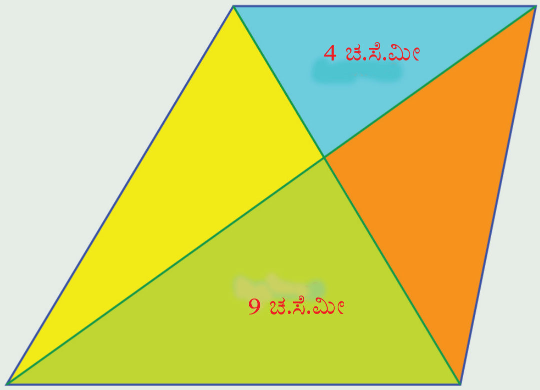


i) CE ಎಂಬ ಗೆರೆ, $\angle C$ ಯನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು 4:5 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ವಿವರಿಸಿರಿ.

iii) 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು 3:4 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ರಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲು ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೇಗೆ ?

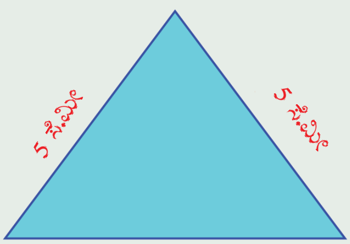
(7) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಲಂಬದ ಕರ್ಣಗಳು ಅದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.



ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 4 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 9 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಸಮಲಂಬದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(8) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(9) ಕೆಳಗೆ ರಚಿಸಿದ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಇತರ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. • ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಬೇರೆ ಬಹುಭುಜಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು. • ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು. • ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿವಿಧ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು. • ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			

2 ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

ಒಂದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ ಎಂಬಿವುಗಳೆಲ್ಲಾ $\frac{1}{2}$ ರ ವಿಭಿನ್ನ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

ಇವುಗಳೆಲ್ಲ $\frac{1}{2}$ ರ ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \ldots$$

ಆದುದರಿಂದ $\frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \ldots$ ಎಂಬಿವುಗಳೆಲ್ಲಾ $\frac{3}{5}$ ರ ಇತರ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಥವಾ $\frac{3}{5}$ ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು ಒಂದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಇತರ ರೂಪಗಳು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಸಿಗುವುವು.

ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

$\frac{a}{b}$ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ n ಒಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಆದರೆ

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$$

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\frac{1^2 + 1}{1 + 1} = 1 \qquad \frac{2^2 + 2}{2 + 1} = 2 \qquad \frac{3^2 + 3}{3 + 1} = 3$$

ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$\frac{138^2+138}{138+1}$ ಎಂಬುವುದು 138 ಆಗಿದೆಯೇ?

ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಕೂಡಿಸಿ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿ ಪರಿಶೋಧಿಸಬಹುದು, ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾರಸ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಯಾಕೆ ಹೀಗೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದೂ ಇಲ್ಲ.

ಬದಲಾಗಿ ಅಂಶವನ್ನು ಬೇರೆಯೇ ಬರೆಯೋಣ.

$$138^2 + 138 = 138\,(138 + 1)$$

ಇನ್ನು ಛೇದವನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಂಡು ಬರೆದರೆ,

$$\frac{138^2+138}{138+1} = \frac{138(138+1)}{138+1} = 138$$

ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಇಂತಹ ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

n ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $\frac{n^2+n}{n+1} = \frac{n\,(n+1)}{n+1} = n$

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಗಳು ಯಾಕೆ ಸರಿಯಾಗುವುದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ, ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $\frac{1^2+1}{1+1} = 1$ $\quad \frac{2^2+2}{2+2} = 1\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3^2+3}{3+3} = 2$ $\quad \frac{4^2+4}{4+4} = 2\frac{1}{2}$

(2) $\frac{2^2-2}{2-1} = 2$ $\quad \frac{3^2-3}{3-1} = 3$ $\quad \frac{4^2-4}{4-1} = 4$ $\quad \frac{5^2-5}{5-1} = 5$

(3) $\frac{2^2-1}{2-1} = 3$ $\quad \frac{3^2-1}{3-1} = 4$ $\quad \frac{4^2-1}{4-1} = 5$ $\quad \frac{5^2-1}{5-1} = 6$

ಅಡ್ಡ ಗುಣಾಕಾರ

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶವನ್ನು ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು ಒಂದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪ ಸಿಗುವುದು: ಆದರೆ, ಒಂದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ರೂಪಗಳೊಳಗೆ ಇಂತಹ ಸಂಬಂಧವಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ಆಗಿರುವುದಾದರೂ 2 ಮತ್ತು 4ನ್ನು ಒಂದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 3 ಮತ್ತು 6 ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವೋ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ, ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯುವುದು ಒಂದು ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{42}{63}$ ಮತ್ತು $\frac{70}{105}$ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\frac{42}{63}=\frac{2\times3\times7}{3\times3\times7}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{70}{105}=\frac{2\times5\times7}{3\times5\times7}=\frac{2}{3}$$

ಆಗ, $\frac{42}{63}$ ಮತ್ತು $\frac{70}{105}$ ಗಳು $\frac{3}{7}$ ರ ಎರಡು ರೂಪಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿಸುವುದು(ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೂ) ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಆಗ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಬೇರೆ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡುವ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{119}{221}$ ಮತ್ತು $\frac{133}{247}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಛೇದ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಇತರ ರೂಪಗಳಿವೆಯಲ್ಲವೇ. (ಐದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಲು, ಛೇದಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಮಾಡಿರುವುದು ನೆನಪಿಲ್ಲವೇ?)

$$\frac{119}{221}=\frac{119\times247}{221\times247}$$

$$\frac{133}{247}=\frac{133\times221}{247\times221}$$

ಈ ಹೊಸ ರೂಪಗಳ ಛೇದವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ; ಆಗ ಸಮಾನವೋ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು, ಅಂಶಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕು.

ಅಂದರೆ 119×247 ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ, 133×221 ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಸಮಾನವೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$119\times247=29393$$

$$133\times221=29393$$

ಅಂಶವೂ, ಛೇದವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ;

$$\frac{119}{221}=\frac{133}{247}$$

ಈಗ ಮಾಡಿದವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ. $\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡಲು ಮೊದಲು ಛೇದವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\frac{a}{b}=\frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q}=\frac{bp}{bq}$$

ಇನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಅಂಶಗಳು aq, bp ಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೊಡಿದರೆ ಸಾಕು.

ಅಥವಾ, a, b, p, q ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ aq, bp ಎಂಬೀ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಸಮಾನವೆಂದಿರಲಿ.

ಆಗ $\frac{aq}{bq}$, $\frac{bp}{bq}$ ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಛೇದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ,

$$\frac{aq}{bq} = \frac{bp}{bq}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ನಂತರ ಎರಡರಲ್ಲೂ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

a, b, p, q ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ಆದರೆ $aq = bp$

ಅಥವಾ, $aq = bp$ ಆದರೆ $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$

ಹೀಗೆ ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದ, ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದನ್ನು ಅಡ್ಡ ಗುಣಕಾರ (cross multiplication) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q}$$

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಎರಡು ರೂಪಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇತರ ಅನೇಕ ರೂಪಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{2}$ ರ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪ $\frac{2}{4}$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಇವುಗಳ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

$$\frac{1+2}{2+4} = \frac{3}{6}$$

ಇದು $\frac{1}{2}$ ರ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪವಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{6}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿದರೆ?

$$\frac{1+3}{2+6} = \frac{4}{8}$$

$\frac{1}{2}$ ರ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪ

$\frac{2}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{6}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

$$\frac{2+3}{4+6} = \frac{5}{10}$$

ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು ಯಾಕೆ?

ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಬೀಜಗಣಿತ ಬೇಕು.

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ. $\frac{a+p}{b+q}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗುವುದು ಯಾಕೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು.

$\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$aq = bp$$

ಇನ್ನು $\frac{a+p}{b+q}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ $\frac{a}{b}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅಡ್ಡ ಗುಣಕಾರವನ್ನನುಸರಿಸಿ, $(a + p)b$ ಎಂಬ ಗುಣಬ್ಧವೂ $(b + q)\ a$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕು, ಒಂದೊಂದಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

$$(a + p)\ b = ab + pb$$

$$(b + q)\ a = ba + qa$$

*ab, ba*ಎಂಬಿವುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆಯಲ್ಲವೆ, ಆಗ ಎರಡು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಕೊನೆಗೆ ಬರೆದಿರುವ ರೂಪದಲ್ಲಿ *ab* ಇದೆ. ಮೊದಲ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ನಂತರವಿರುವುದು *pb*; ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ *qa*. ಇದರಲ್ಲಿ *pb* ಎಂಬುವುದು *bp* ಯೂ *qa* ಎಂಬುವುದು *aq* ವೂ ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೊಡಿರುವೆವು. ಆಗ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಸಮಾನವಾಯಿತಲ್ಲವೇ?

ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಅಂಶ–ಛೇದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೊಸ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಬಹುದು:

$$\frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{10+4}{10-4} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆಯನ್ನು ನೋಡುವ:

$$\frac{4}{2} = \frac{16}{8}$$

ಮುಗ್ಧವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ

ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವ ತಮ್ಮ ಹೀಗೆ ಕೇಳುತ್ತಾನೆ. "$\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{4}$ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಟೀಚರ್ ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. 2 ಮಿಠಾಯಿಗಳಿಂದ 1 ಮಿಠಾಯಿ ತೆಗೆಯುವುದೂ, 4 ಮಿಠಾಯಿಗಳಿಂದ 2 ಮಿಠಾಯಿ ತೆಗೆಯುವುದೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲವಲ್ಲವೆ. ಮೊದಲು ಸಿಕ್ಕಿರುವುದು ಒಂದು ಮಿಠಾಯಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲವೆ?"

ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವೇನು?

ಇದರಿಂದ

$$\frac{4+2}{4-2} = 3$$

$$\frac{16+8}{16-8} = \frac{24}{8} = 3$$

ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದದ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ಎಂದಾದರೆ, $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{p+q}{p-q}$ ಸಮಾನವೇ ಎಂಬುವುದು ಪ್ರಶ್ನೆ.

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ಎಂದಾದರೆ $aq = bp$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನು $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{p+q}{p-q}$ ಸಮಾನವೋ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು, ಅಡ್ಡಗುಣಾಕಾರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, $(a+b)(p-q)$, $(a-b)(p+q)$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕು.

$$(a+b)(p-q) = ap - aq + bp - bq$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿನ ಬಲಭಾಗದ ವಾಚಕದಲ್ಲಿ $aq = bp$ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಅದು $ap - bq$ ಆಗಿ ಸಣ್ಣದಾಗುವುದು; ಆಗ

$$(a+b)(p-q) = ap - bq$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$(a-b)(p+q) = ap + aq - bp - bq$$

ಎಂಬುವುದರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿನ ವಾಚಕವೂ $ap - bq$ ಆಗುವುದು; ಆದುದರಿಂದ

$$(a-b)(p+q) = ap - bq$$

ಹಾಗೆ $(a+b)(p-q)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ $(a-b)(p+q)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ $ap - bq$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುವುದು. ಆಗ

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{p+q}{p-q}$$

(1) ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

i) ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡಿರಿ. ಒಂದರ ಛೇದವನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದರ ಅಂಶವನ್ನೂ ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ?

ii) ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆದು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(2) ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{(3 \times 1) + (4 \times 2)}{(3 \times 2) + (4 \times 4)} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{(3 \times 1) + (4 \times 3)}{(3 \times 2) + (4 \times 6)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

i) $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೀಗೆ ಅಂಶಗಳನ್ನೂ ಛೇದಗಳನ್ನೂ 3 ರಿಂದಲೂ 4 ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ: $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಿಗುವುದೇ?

ii) ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ.

iii) ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು 3ರಿಂದಲೂ, 4ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸುವುದರ ಬದಲು, ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

iv) $\frac{p}{q}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{a}{b}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, m, n ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $\frac{ma + np}{mb + nq}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{a}{b}$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗುವುದು ಯಾಕೆಂದು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿರುವುದನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗದಿಂದ ಒಂದು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{221}{220}$ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತವು, ಅವುಗಳೊಳಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ದೊಡ್ಡದೂ ಸಣ್ಣದೂ

$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು?

$\frac{3}{5}$ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದ್ದು ಹೇಗೆ?

5 ಸಮಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ 2 ಭಾಗಗಳು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ $\frac{2}{5}$; ಇಂತಹ 3 ಭಾಗಗಳು ಸೇರಿದಾಗ ಅಲ್ಲವೇ $\frac{3}{5}$ ಆಗುವುದು. ಆಗ $\frac{3}{5}$ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದೇ ಛೇದವಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡ ಅಂಶವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶವನ್ನು ಮಾತ್ರ ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

ಬದಲಾಗಿ, ಛೇದವನ್ನು ಮಾತ್ರ ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಿದರೋ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{3}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{5}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

4 ಸಮಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ, 5 ಸಮಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ.

ಆಗ ಮೊದಲಿನದರಲ್ಲಿ 3 ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಮೂರು ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅಂಶವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ಛೇದ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದು, ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಛೇದವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸಣ್ಣದು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{5}{9} < \frac{5}{8} < \frac{5}{7} < \frac{5}{6}$$

$\frac{3}{7}, \frac{4}{5}$ ಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು?

ಈಗ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಂತೆ, $\frac{3}{7}$ ನ್ನು $\frac{3}{5}$ ಮಾಡಿದರೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು; $\frac{3}{5}$ ನ್ನು $\frac{4}{5}$ ಮಾಡಿದರೆ ಮತ್ತೂ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು; ಅಂದರೆ

$$\frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

ಹೀಗೆಯೇ $\frac{5}{6}$ ಮತ್ತು $\frac{4}{9}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

$$\frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{5}{6}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶವನ್ನು ದೊಡ್ಡದು ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು ಸಣ್ಣದು ಮಾಡಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{1}{10} < \frac{2}{9} < \frac{3}{7} < \frac{4}{5}$$

ಇನ್ನು $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಮತ್ತು $\frac{2}{3}$ ನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು?

ಇದುವರೆಗೆ ನೋಡಿದ ರೀತಿಗಳ್ಯಾವುದೂ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲ. (ಯಾಕೆ?)

ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸಮಾನ ಛೇದವಿರುವ ರೂಪಗಳನ್ನು ನೋಡುವ.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವೇ ದೊಡ್ಡದು; ಅಂದರೆ $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$; ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಮೊದಲಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

ಹೀಗೆಯೇ $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಮೊದಲು ಇವುಗಳನ್ನು ಛೇದ ಸಮಾನವಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

$$\frac{3}{4} = \frac{21}{28} \qquad \frac{5}{7} = \frac{20}{28}$$

ಇದರ ಅಂಶವನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡಿಕೊಂಡು $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ;

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಎರಡರ ಛೇದ ಸಮಾನವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

ಇನ್ನು aq, bp ಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದೆಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕು.

a, b, p, q ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $aq < bp$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಆಗ $\frac{aq}{bq}, \frac{bp}{bq}$ ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಛೇದವು ಸಮಾನ ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನದರ ಅಂಶ ಸಣ್ಣದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು; ಆದುದರಿಂದ $\frac{aq}{bq} < \frac{bp}{bq}$ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಎರಡರಲ್ಲೂ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದರೆ, $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

a, b, p, q ಎಂಬ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $aq < bp$ ಆದರೆ $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$

ಅಥವಾ $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ ಆದರೆ $aq < bp$

ಅಂದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು, ಸಣ್ಣದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಅಡ್ಡ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂದು ಅರ್ಥ.

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವ:

$\frac{2}{3}$ ರ ಅಂಶಕ್ಕೂ ಛೇದಕ್ಕೂ 1 ಕೂಡಿಸಿದರೆ $\frac{3}{4}$ ಆಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{3}{4}$ ದೊಡ್ಡದಲ್ಲವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\frac{5}{9}$ ನ್ನು ತೆಗೆದು, ಅಂಶಕ್ಕೂ ಛೇದಕ್ಕೂ 1 ಕೂಡಿಸಿದರೆ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ಸಿಗುವುದು;

$\frac{3}{5}, \frac{5}{9}$ ಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, 3×9 ನ್ನೂ 5×5 ನ್ನೂ ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೆ; ಆಗ $\frac{5}{9} < \frac{3}{5}$

ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

$\frac{4}{3}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ? ಅಂಶಕ್ಕೂ ಛೇದಕ್ಕೂ 1 ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $\frac{5}{4}$;

ಆಗ $3 \times 5 < 4 \times 4$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದು ಮೊದಲು ನೋಡಿರುವುದರ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುವುದು. ಈ ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ $\frac{4}{3}$ ಕ್ಕಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?

ಆಗ ಈ ವಿಚಾರದ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನೆಂದು ಊಹಿಸಬಹುದು?

ಅದು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ. *a, b* ಎಂಬೀ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $a < b$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಶೀಲಿಸಬೇಕಾದುದಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ $a\ (b + 1)$, $b\ (a + 1)$ ಎಂಬೀ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$a\ (b + 1) = ab + a$$

$$b\ (a + 1) = ba + b$$

$ba = ab$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ; ಆಗ $ab + a$, $ab + b$ ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

a, b ಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು *b*; ಆಗ *ab* ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ *b* ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿರುವುದು, *a* ಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವುದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $ab + a < ab + b$; ಅಥವಾ, $a\ (b + 1) < b\ (a + 1)$. ಇದರಿಂದ $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನು $b < a$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

$\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$ ಎಂದು ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ: ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ, ಎರಡಕ್ಕೂ ಸಮಾನವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಿತಲ್ಲವೆ. ಸಮಾನವಲ್ಲದ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುವೆವು; ಅಂಶಗಳನ್ನೂ ಛೇದಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡೋಣ

$$\frac{1+3}{2+4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಅಂದರೆ,

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ? ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಜೊತೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

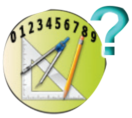
ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ;

$\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ. ಆಗ $aq < bp$, ಇನ್ನು $\frac{a}{b}, \frac{a+p}{b+q}$ ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $a(b+q)$, $b(a+p)$ ಎಂಬೀ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ನೋಡಬೇಕು.

$$a(b+q) = ab + aq$$

$$b(a+p) = ab + bp$$

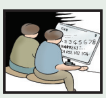
$aq < bp$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $ab + aq < ab + bp$; ಆಗ $a(b+q) < b(a+p)$ ಆದುದರಿಂದ $\frac{a}{b} < \frac{a+p}{b+q}$ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{a+p}{b+q} < \frac{p}{q}$ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. (ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ)



ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿಯೂ ಹಿಂದಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಕೊಂಡ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ ಎಂದು ತಿಳಿದೆವು. ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಪ್ರಯೊಗಿಸಿದರೆ $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಲ

ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ?



(1) ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡದೆ ಇಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\frac{13}{17}, \frac{14}{15}$ ii) $\frac{13}{17}, \frac{11}{18}$ iii) $\frac{14}{15}, \frac{11}{18}$

(2) ಇಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದೆಂದು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಹೇಳಿರಿ.

i) $\frac{3}{5}, \frac{8}{13}$ ii) $\frac{3}{5}, \frac{6}{11}$ iii) $\frac{101}{102}, \frac{98}{99}$

(3) i) $\frac{1}{3}$ ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದೂ $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದೂ ಆಗಿರುವ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) ಛೇದ 24 ಆಗಿರುವ ಇಂತಹ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

iii) ಅಂಶ 4 ಆಗಿರುವ ಇಂತಹ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದದೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮತ್ತೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಲಾಯಿತು.

i) ಯಾವ ರೀತಿಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ, ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಿಗುವುದು?

ii) ಯಾವ ರೀತಿಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ಅತೀ ಸಣ್ಣ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಿಗುವುದು?

ಭಿನ್ನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

ಎರಡನ್ನೂ $\frac{1}{6}$ ಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿಯಲ್ಲವೇ ಕೂಡಿಸುವುದು:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}; \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ ಆದರೆ?

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}; \quad \frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$$

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೀತಿಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ. ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ ಎಂದಾಗಿರಲಿ. ಮೊದಲು ಎರಡನ್ನೂ ಛೇದ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ.

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

ಇನ್ನು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq}{bq} + \frac{bp}{bq} = \frac{aq+bp}{bq}$$

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) + (4 \times 2)}{4 \times 7} = \frac{29}{28} = 1\frac{1}{28}$$

ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ:

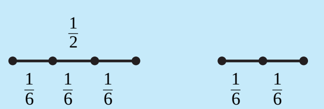
ಪ್ರಯೋಗವೂ ಸಿದ್ಧಾಂತವೂ

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$$

ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ಯಾಕಾಯಿತು? ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನುಸರಿಸಿ ಅವುಗಳ ಕುರಿತು ಇರುವ ಗಣಿತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದು. (ವಿಲೋಮ ರೀತಿಯಲ್ಲ) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಹಗ್ಗ ಮತ್ತು $\frac{1}{3}$ ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಾಗ, ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

$\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದರೆ ಮೂರು $\frac{1}{6}$ ಮೀಟರುಗಳು ಸೇರಿರುವುದು. $\frac{1}{3}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದರೆ? ಎರಡು $\frac{1}{6}$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಸೇರಿಸುವುದು.



ಇವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಾಗ, ಒಟ್ಟು ಐದು $\frac{1}{6}$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು, ಅಂದರೆ $\frac{5}{6}$ ಮೀಟರ್.ಆಗ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ ಹೀಗೆ ಇರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಂದ ಇಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಮೊತ್ತಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಕ್ರಿಯಾ ನಿರ್ವಚನಗಳುಂಟಾಗುವುದು.

$\frac{p}{q} < \frac{a}{b}$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq - bp}{bq}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) - (4 \times 2)}{4 \times 7} = \frac{13}{28}$$

ಅಂಶ 1 ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(1 \times b) + (1 \times a)}{ab} = \frac{b + a}{ab}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} = \frac{11 + 9}{9 \times 11} = \frac{20}{99}$

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{11 - 9}{9 \times 11} = \frac{2}{99}$$

ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವ;

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3}, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \times 4}$$

ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಆಗ

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ A, B ಎಂಬ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ.

A ಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳೂ B ಯಲ್ಲಿ 3 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳೂ ಇವೆ.

ಒಬ್ಬರು A ಯಲ್ಲೂ B ಯಲ್ಲೂ ಒಂದೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಉತ್ತರ ಬರೆದಿರುವುದು. ಅವರು ಒಟ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಬರೆದಿರುವರೆಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ $\frac{1}{99 \times 100}$ ವರೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಏನು ಸಿಗುವುದು?

ಮೊದಲು ಕಂಡ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯುವ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

ಅಂದರೆ, ಅಂಶ 1 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. (ಅಂಶ 1 ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಏಕಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು (Unit fractions) ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು)

ಅಂಶ 2 ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾದ ಮೂರು ಏಕಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

ಇನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ನೋಡುವ. ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೆನ್ನುವುದು, ಅವುಗಳ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ ಸಿಗುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq}$$

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದೆಂದರೆ, ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಎರಡನೆಯದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{b} \div \frac{p}{q} = \frac{aq}{bp}$$

ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad 2 + 2 = 4 \qquad 2 \times 2 = 4$$

ಮೊತ್ತ 1 ಆಗಿರುವ ಮತ್ತೆರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡುವ

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \qquad 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \qquad \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{25}{6} \qquad \frac{5}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$$

ಮೊತ್ತ 1 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಜೊತೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೊಗಿಸಿ ನೋಡುವ. $\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = 1$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ ಆಗ

$$\frac{aq + bp}{bq} = 1$$

ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1 ಆದರೆ, ಅಂಶವೂ ಛೇದವೂ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕು: ಆಗ

$$aq + bp = bq$$

ಇನ್ನು ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತ ನೋಡುವ

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{bp + aq}{ap}$$

$aq + bp = bq$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಮವಾಕ್ಯದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{bq}{ap}$ ಆಗುವುದು; ಅಂದರೆ,

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{bq}{ap}$$

ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೋ?

$$\frac{b}{a} \times \frac{q}{p} = \frac{bq}{ap}$$

ಅಂದರೆ

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{b}{a} \times \frac{q}{p}$$

ಇಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿರಿ.

1) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2^2 - 1}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{2}{3^2 - 1}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = \frac{2}{4^2 - 1}$

2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{1 \times 2}$; $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{2 \times 3}$;

$\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{3 \times 4}$

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ $\qquad$ $\frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{9}{20}$

4. $4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3$ $\qquad$ $4\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2} = 3$

$5\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} = 4$ $\qquad$ $5\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{3} = 4$

$6\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 5$ $\qquad$ $6\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{4} = 5$

ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು

10, 100, 1000 ಮೊದಲಾದ 10ರ ಘಾತಗಳು ಛೇದವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆದಿರುವುದೇ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\frac{3}{10} = 0.3$$
$$\frac{23}{100} = 0.23$$
$$\frac{327}{1000} = 0.327$$
$$\frac{3}{100} = 0.03$$

ಕೆಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಛೇದವು 10ರ ಘಾತವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಆ ತರದಲ್ಲಿರುವ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$
$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$
$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$
$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75$$

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. $\frac{1}{8}$ ನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ? $8 = 2^3$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ; ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ,

$$10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು, ಅಂದರೆ

$$1000 = 8 \times 125$$

ಇದರಿಂದ ,

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000} = 0.125$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0.024$$

ಇನ್ನು $\frac{3}{160}$ ಆದರೋ?

ಮೊದಲು ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿಸುವ

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5 = 2^4 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 10$$

ಇದನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, 10ರ ಯಾವ ಘಾತವನ್ನಾಗಿಸಬಹುದು?

ಅದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು? $2^4 \times 5^4 = 10^4$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ,

$$160 \times 5^4 = (2^4 \times 10) \times 5^4 = 2^4 \times 5^4 \times 10 = 10^5 = 100000$$

ಆಗ,

$$\frac{3}{160} = \frac{3 \times 5^4}{160 \times 5^4} = \frac{3 \times 625}{100000} = \frac{1875}{100000} = 0.01875$$

ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ದಶಮಾಂಶರೂಪ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{1}{3}$ ಆದರೋ?

3 ನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, 10 ರ ಘಾತ ಸಿಗುವುದೇ?

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಳುವುದಾದರೆ 10 ರ ಯಾವುದಾದರೂ ಘಾತದಲ್ಲಿ 3 ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದೇ?

10 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2 ಮತ್ತು 5 ಮಾತ್ರವಲ್ಲವೆ. ಆದುದರಿಂದ 10ರ ಯಾವುದೇ ಘಾತದಲ್ಲಿಯೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇವುಗಳೆರಡು ಮಾತ್ರ.

ಆಗ 10 ರ ಯಾವುದೇ ಘಾತದಲ್ಲಿಯೂ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ 3 ಇರಲಾರದು

ಆದುದರಿಂದಲೇ, $\frac{1}{3}$ ಕ್ಕೆ 10 ರ ಯಾವುದಾದರೂ ಘಾತವು ಛೇದವಾಗಿರುವ ರೂಪವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು 10 ರ ಘಾತ ಛೇದವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{3}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. .

ಅದಕ್ಕೆ ಮೊದಲಾಗಿ $\frac{1}{3}$ ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. $\frac{1}{3} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3}$

ಇದರ $\frac{10}{3}$ ಎಂಬುದನ್ನು $3 + \frac{1}{3}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವ

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{10}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು 10 ಛೇದವಾಗಿರುವ $\frac{3}{10}$ ಆಗಿದೆ. ಇದು ಮತ್ತು $\frac{1}{3}$ ರೊಳಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ,

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{3}$ ರೊಂದಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹತ್ತಿರವಾಗುವ, 100 ಛೇದವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ. ಅದಕ್ಕೆ $\frac{1}{3}$ ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{3}$$

ಮುಂದುವರಿದು, ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ $\frac{100}{3}$ ನ್ನು $33 + \frac{1}{3}$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ

ಉದ್ದದ ದಶಮಾಂಶ

$\frac{1}{8}$ ಮೀಟರ್ ಎಂಬುದನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಣ್ಣ ಅಳತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಲ್ಲದೆ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ? ಮೊದಲು ಡೆಸಿಮೀಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

$\frac{1}{8}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದರೆ $\frac{10}{8}$ ಡೆಸಿಮೀಟರ್. ಅಂದರೆ $1\frac{2}{8}$ ಡೆಸಿಮೀಟರ್. ಈ $\frac{2}{8}$ ಡೆಸಿಮೀಟರನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ? $\frac{20}{8}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಅಂದರೆ, $2\frac{4}{8}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಈ $\frac{4}{8}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ? $\frac{40}{8} = 5$ ಮಿಲ್ಲಿ ಮೀಟರ್. ಆಗ $\frac{1}{8}$ ಮೀಟರ್ ಎಂಬುವುದು 1 ಡೆಸಿಮೀಟರ್, 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 5 ಮಿಲ್ಲಿ ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ 125 ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{100}\left(33 + \frac{1}{3}\right) = \frac{33}{100} + \frac{1}{300}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ,

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000} = \frac{1}{30000}$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ, $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$ ಎಂಬಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ $\frac{1}{3}$ ರೊಂದಿಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ.

$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಅಳತೆಗಳು

$\frac{1}{3}$ ಮೀಟರ್‌ನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಲ್ಲದೆ ಹೇಳುವುದು ಹೇಗೆ? ಡೆಸಿಮೀಟರಾಗಿಸಿದರೆ $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ ಡೆಸಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. $\frac{1}{3}$ ಡೆಸಿಮೀಟರನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿಸಿದರೆ? ಪುನಃ $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್, $\frac{1}{3}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್‌ನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರಾ ಗಿಸಿದರೆ ? ಪುನಃ $3\frac{1}{3}$ ಮಿಲ್ಲಿ ಮೀಟರ್. ಆಗ $\frac{1}{3}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದರೆ 3 ಡೆಸಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್, ಇನ್ನೊಂದು $\frac{1}{3}$ ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್. ಅಂದರೆ $333\frac{1}{3}$ ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್. ಒಂದು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರಿನ $\frac{1}{1000}$ ಭಾಗವಾದ ಮೈಕ್ರೋ ಮೀಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ? $333333\frac{1}{3}$ ಮೈಕ್ರೋಮೀಟರ್.

ಪುನಃ ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿಸಿದರೂ ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದೇ?

$\frac{1}{3}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು $\frac{1}{3} = 0.333...$

ಇದರ 0.333... ಎಂಬ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವು ಇದುವರೆಗೆ ನೋಡಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳಿಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳೆಲ್ಲಾ 10ರ ಯಾವುದಾದರೂ ಘಾತ ಛೇದವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು 10ರ ಘಾತಗಳು ಛೇದಗಳಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಒಂದು ಸಾಲು, ಕ್ರಮೇಣ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ $\frac{1}{3}$ ರ ಹಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಪಡಿಸಲು, ಹೊಸತ್ತೊಂದು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವುದಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. $\frac{1}{6}$ ಕ್ಕೂ 10 ರ ಘಾತ ಛೇದವಾಗಿರುವ ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. (ಯಾಕೆ?) ಇದನ್ನು ಈ ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ನೋಡುವ.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{6}$$

$\frac{10}{6}$ ನ್ನು ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾದರೂ , ಕೆಲಸ ಸುಲಭವಾಗಲು, ಲಘೂಕರಿಸುವುದು ಕೊನೆಗೆ ಸಾಕು. ಇನ್ನು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ $\frac{10}{6}$ ನ್ನು $1 + \frac{4}{6}$ ಎಂದು ಮಾಡಿದರೆ

$\frac{5}{3}$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{10} + \frac{4}{60}$$

ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ $\frac{1}{6}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾದ, 10 ಛೇದವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನೂ ಹತ್ತಿರವಾದ 100 ಛೇದವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಿಗಲು, ಹೀಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{6}$$

ಇದರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ $\frac{100}{6}$ ನ್ನು $16 + \frac{4}{6}$ ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವ.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{100}\left(16 + \frac{4}{6}\right) = \frac{16}{100} + \frac{4}{600}$$

ನಂತರ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವ

$$\frac{1}{6} - \frac{16}{100} = \frac{4}{600} = \frac{1}{150}$$

ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿದರೆ,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{16}{100} = \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{166}{1000} = \frac{1}{1500}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1666}{10000} = \frac{1}{15000}$$

ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ,

$\frac{1}{10}, \frac{16}{100}, \frac{166}{1000},\ldots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{1}{6}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

$\frac{1}{3}$ ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಹಾಗೆಯೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಿ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ.

$$\frac{1}{6} = 0.1666...$$

ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} & \frac{1}{1000} \\
 & 0. & 1 & 6 & 6 \\ \hline
6 & 1. & 0 & 0 & 0 \\
 & & 6 & & \\ \hline
 & & 4 & 0 & \\
 & & 3 & 6 & \\ \hline
 & & & 4 & 0 \\
 & & & 3 & 6 \\ \hline
 & & & & 4
\end{array}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{4}{60}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{16}{100} + \frac{4}{600}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{166}{1000} + \frac{4}{6000}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{2}{3}$ ನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡುವ:

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} & \frac{1}{1000} \\
 & 0. & 6 & 6 & 6 \\ \hline
3 & 2. & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 8 & & \\ \hline
 & & 2 & 0 & \\
 & & 1 & 8 & \\ \hline
 & & 2 & 0 & \\
 & & 1 & 8 & \\ \hline
 & & 2 & 0 &
\end{array}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{10} + \frac{2}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{66}{100} + \frac{2}{300}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{666}{1000} + \frac{2}{3000}$$

$$\frac{2}{3} = 0.666...$$

ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಂತೆ, $\frac{6}{10}, \frac{66}{100}, \frac{666}{1000}, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{2}{3}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವುದರ ಅರ್ಥ.

ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರ ಕೂಡಾ ಇದೆ. ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಮೊದಲಿನಿಂದಲೇ ಶೇಷವು 2 ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮುಂದೆ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ 6 ಮಾತ್ರ ಆವರ್ತಿಸುವುದು ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಇಂತಹ ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಶೇಷವು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಬರುವುದಾದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಆ ಸ್ಥಾನದ ನಂತರವಿರುವ ಅಂಕೆಗಳು ಆವರ್ತಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{7}$ ನ್ನು ನೋಡುವ.

$$
\begin{array}{r|lllllll}
 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10^2} & \frac{1}{10^3} & \frac{1}{10^4} & \frac{1}{10^5} & \frac{1}{10^6} \\
 & 0. & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\
\hline
7 & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 7 & & & & & \\
\hline
 & & 3 & 0 & & & & \\
 & & 2 & 8 & & & & \\
\hline
 & & & 2 & 0 & & & \\
 & & & 1 & 4 & & & \\
\hline
 & & & & 6 & 0 & & \\
 & & & & 5 & 6 & & \\
\hline
 & & & & & 4 & 0 & \\
 & & & & & 3 & 5 & \\
\hline
 & & & & & & 5 & 0 \\
 & & & & & & 4 & 9 \\
\hline
 & & & & & & & 1
\end{array}
$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{3}{7 \times 10}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{14}{10^2} + \frac{2}{7 \times 10^2}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{142}{10^3} + \frac{6}{7 \times 10^3}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1428}{10^4} + \frac{4}{7 \times 10^4}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{14285}{10^5} + \frac{5}{7 \times 10^5}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{10^4} + \frac{4}{7 \times 10^4}$$

ಇನ್ನೂ ಮುಂದುವರಿದರೆ, 1, 4, 2, 8, 5, 7 ಎಂಬೀ ಅಂಕೆಗಳೇ ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಿಸುವುದು (ಯಾಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

- ಹೀಗೆ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \ldots$ ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ದಶಮಾಂಶರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಐದನೇ ತರಗತಿಯ **ಭಾಗ ಮಾಡುವುದು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ, **ಚಕ್ರೀಯ ಭಾಗಕಾರ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಇವುಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಇನ್ನು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಲನ್ನು ನೋಡಿರಿ: $\frac{49}{100}, \frac{499}{1000}, \frac{4999}{10000}, \ldots$ ಇವುಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದೇ?

$$\frac{1}{2} - \frac{49}{100} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{499}{1000} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4999}{10000} = \frac{1}{10000}$$

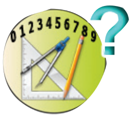
ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{1}{2}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ಆಗ ಹೊಸ ದಶಮಾಂಶ ರೀತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ

$$\frac{1}{2} = 0.4999...$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

ಎಂಬ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ?



ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 0.19, 0.199, 0.1999, ...ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{1}{5}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ $\frac{1}{5}$ ಕ್ಕೆ 0.2 ಎಂಬ ಹಳೆಯ ರೂಪವಲ್ಲದೆ, 0.1999... ಎಂಬ ಹೊಸ ರೂಪ ಕೂಡಾ ಇದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಹೊಸ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಹಳೆಯ ರೂಪಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಹೊಸ ರೂಪ ಕೂಡಾ ಸಿಗುವುದು.

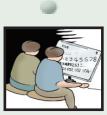
ಇನ್ನು 0.9, 0.99, 0.999, ... ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ?

ಇವುಗಳು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು 1ರೊಂದಿಗಲ್ಲವೆ?

ಆಗ ಹೊಸ ರೀತಿಯನ್ನನುಸರಿಸಿ

1 = 0.999...

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.



(1) ಕೆಳಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಸಮಾನವಾದ 10 ರ ಘಾತ ಛೇದವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

i) $\frac{1}{50}$ ii) $\frac{3}{40}$ iii) $\frac{5}{16}$ iv) $\frac{12}{625}$

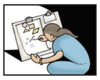
(2) ಕೆಳಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾದ 10 ರ ಘಾತ ಛೇದವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

i) $\frac{5}{6}$ ii) $\frac{3}{11}$ iii) $\frac{23}{11}$ iv) $\frac{1}{13}$

(3) i) ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, ...$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,ಅವುಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{1}{9}$ ರೊಂದಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುದೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

ii) ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಒಂದಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ ಎಂಬಿವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ $\frac{3}{9}, \frac{6}{9}$ ಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟಿರುವುದು ಯಾಕೆ?)

iii) ಒಂದು ಅಂಕೆ ಮಾತ್ರ ಆವರ್ತಿಸುವ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?



ಸಂಶೋಧನೆ

- ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಲವು ಏಕಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ?

ಪುನರವಲೋಕನ

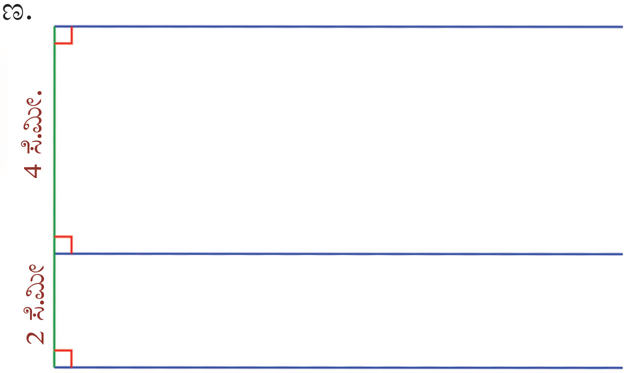
ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲಿರುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು.			
• ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಇತರ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು.			
• ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಹಾಯದೊಂದಿಗೆ ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು.			
• ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಂತ್ಯವಾಗದ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.			

3 ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು

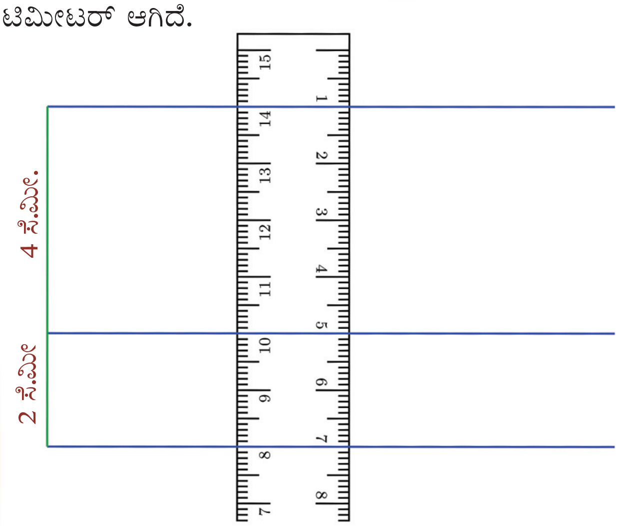
ಸಮಾನಾಂತರ ಭಾಗ

ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳ ಕುರಿತು ಹಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿತೆವು. ಅವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹಲವು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದೆವು. ಸಮಾನಾಂತರದ ವಿಶೇಷತೆಗಳು ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಇವೆ.

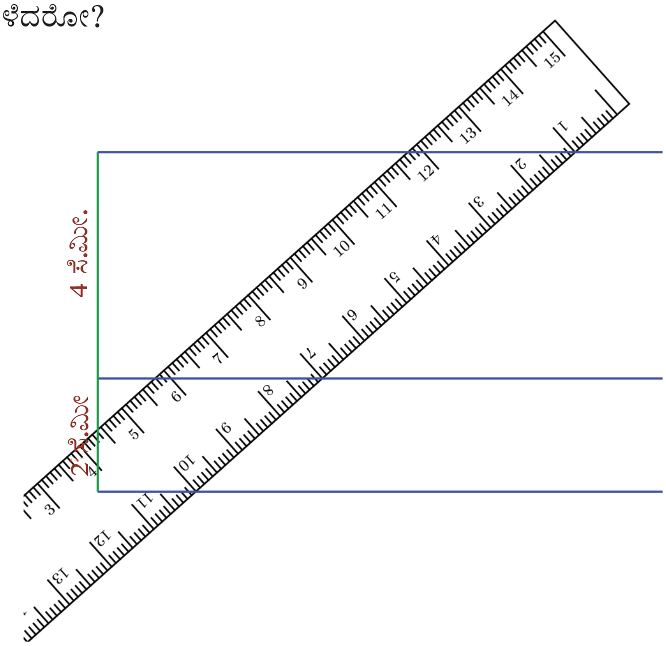
ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೂ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೂ ರಚಿಸಿ ಆರಂಭಿಸೋಣ.



ಇನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದರೂ ಗೆರೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.



ಓರೆಯಾಗಿ ಅಳೆದರೋ?



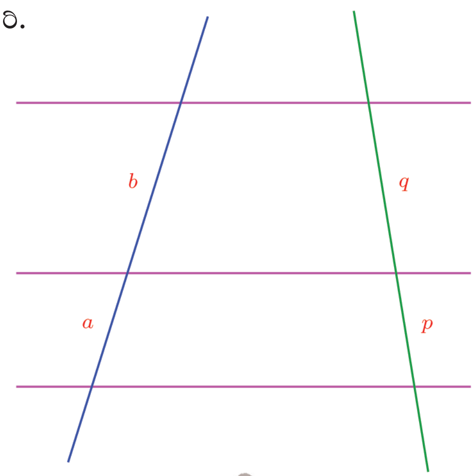
ಸ್ಕೇಲಿನ ಬಲಬದಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.ಈ ರೀತಿ ಓರೆಯಾಗಿ ಸ್ಕೇಲನ್ನು ಇರಿಸಿದಾಗ ಗೆರೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು?

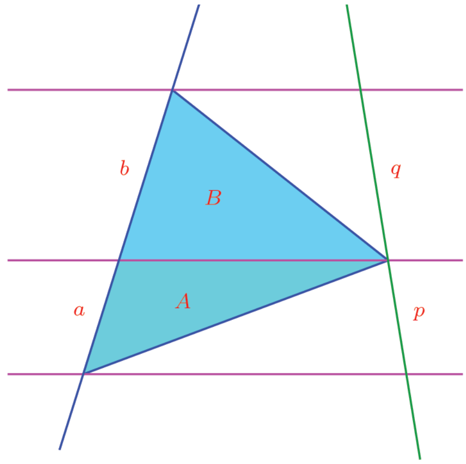
ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಓರೆಯಾಗಿಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ. ಏನು ಕಂಡುಬರುವುದು? ಹೇಗೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದರೂ, ಅತೀ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ಎರಡು ಮಡಿಯು, ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲಿನ ಗೆರೆಗಳೊಳಗಿನ ನಡವಿನ ಅಂತರವಾಗಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ?

ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಓರೆ ರೀತಿಯ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಅಂತರಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆಯೇ?

ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಿದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ ಎಂದು ನೋಡುವ. ಮೊದಲು ನಮ್ಮ ಊಹೆ ಏನೆಂದು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವ.

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.





ಅಡ್ಡವಾಗಿ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು; ಅವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎರಡು ಓರೆಯಾದ ಗೆರೆಗಳು ಎಡಭಾಗದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಛೇದಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ತುಂಡುಗಳ ಉದ್ದ a, b ಎಂದೂ ಬಲಭಾಗದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆ ಛೇದಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ತುಂಡುಗಳ ಉದ್ದ p, q ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

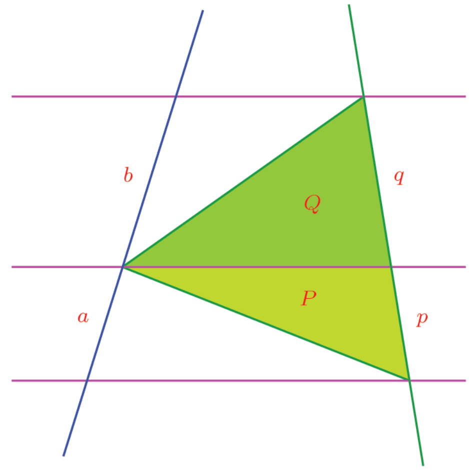
$a : b$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ , $p : q$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾದ $a : b$ ಯನ್ನು ಎರಡು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವ;

ಈಗ $a : b$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಕೆಳಗೆ ಮತ್ತು ಮೇಲೆ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ, (**ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗ**)

ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು A, B ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

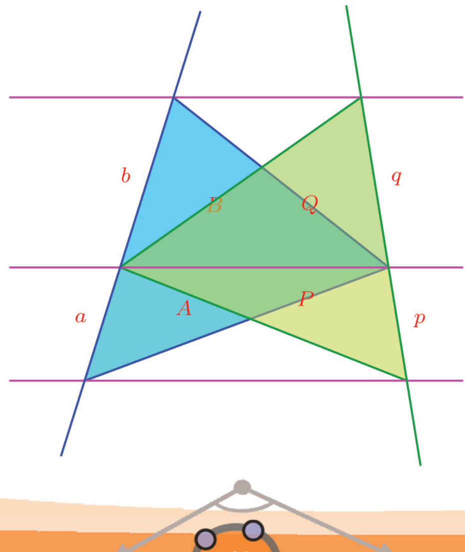


ಇದರಂತೆ p, q ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು P, Q ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

ಇನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಇರಿಸಿ ನೋಡುವ.



ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮೂರನೇ ಶಿರಗಳು ಈ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ ಇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.

$$A = P$$

ಮೇಲಿನ ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಚಾರವೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

$$B = Q$$

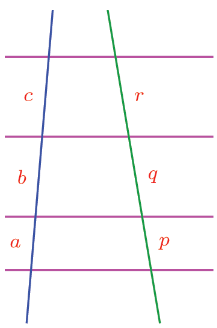
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ ಎಂದೂ $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ ಎಂದೂ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೆ. ಈಗ ಇದರಲ್ಲಿ $A = P$ ಎಂದೂ $B = Q$ ಎಂದೂ ಲಭಿಸಿತು .

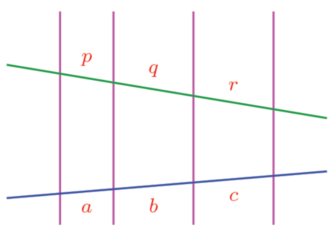
$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

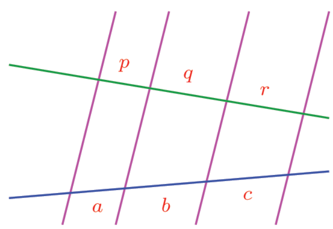
ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಾದರೂ ಇದರಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಮೂರು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

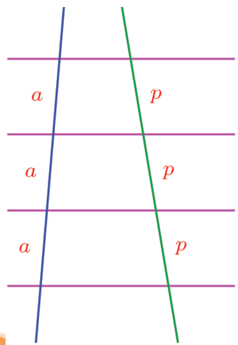
ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿರುವ ಮೂರು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ a, b, c ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಮತ್ತು p, q, r ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

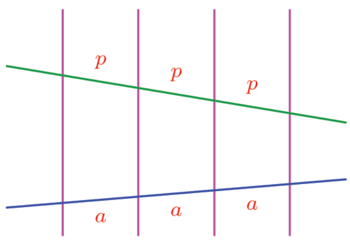


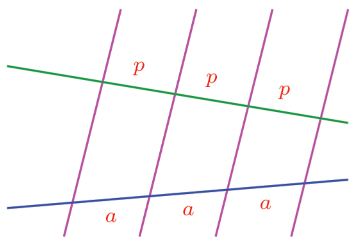




ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವುದಾದರೋ? ಈಗ ಹೇಳಿದುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, ಇವುಗಳು ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವುವು.



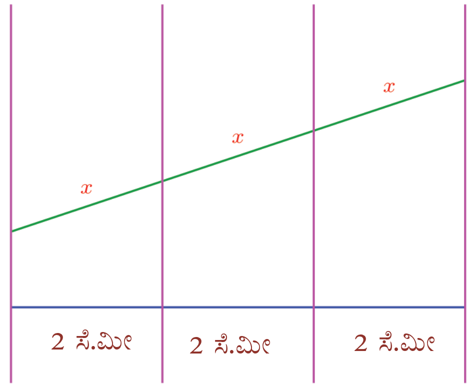




ಮೂರೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚೋ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದಾದರೆ, ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿಯೇ ಛೇದಿಸುವುದು.

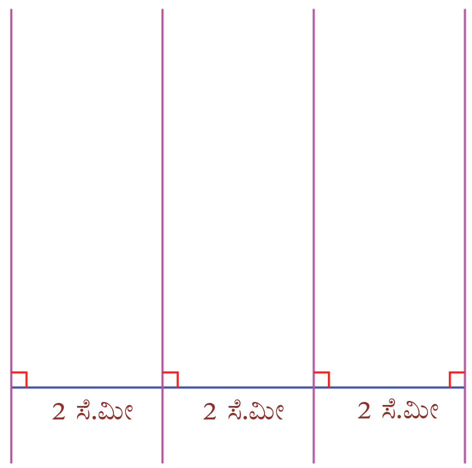
ಇನ್ನು ಈ ತತ್ವಗಳ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ನೋಡುವ.

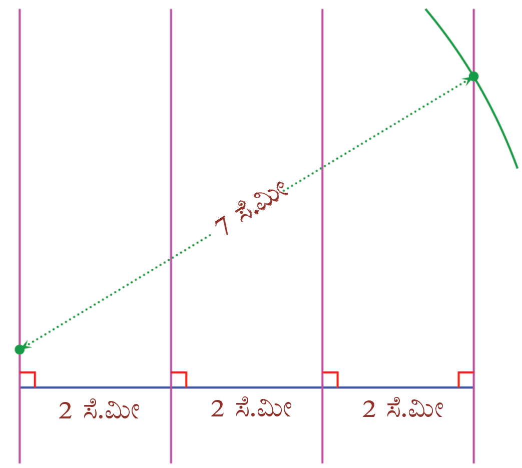
7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು, ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು; ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ 3.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿ ಹಾಕಿದರೂ ಸಾಕು. ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ? 6 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿಸುವುದಲ್ಲವೇ?



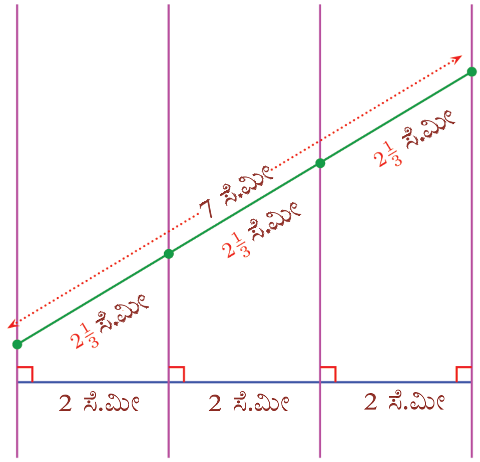
ಎರಡನೇ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿಸಿದರೋ?

ಹಾಗಾದರೆ, ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ದಾರಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತಲ್ಲವೇ? 6 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಲ್ಲಿ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಮೊದಲನೇ ಲಂಬದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 7 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಚಾಪವನ್ನು ಎಳೆದು, ಇದು ಕೊನೆಯ ಲಂಬವನ್ನು ಕಡಿಯುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.



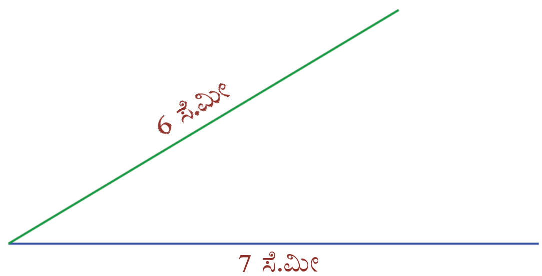


ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ, 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳು ದೊರಕುವುವು.



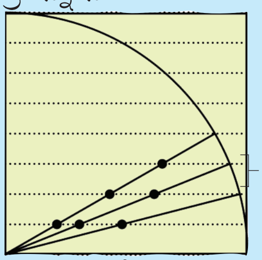
ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಮೊದಲು 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಓರೆಯಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು.



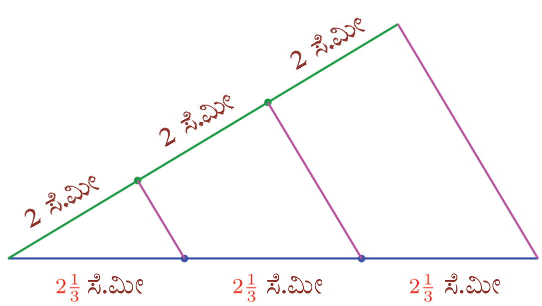
ವೃತ್ತ ವಿಭಜನೆ

ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

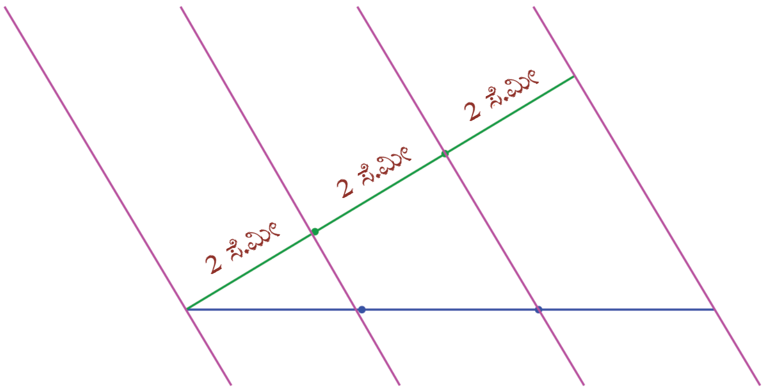


4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೆ? ಇದರಂತೆ ಎಂಟು ಸಮಭಾಗಗಳ ವರೆಗೆ ವಿಭಜಿಸಲು ಇದೇ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಬಹುದಲ್ಲವೇ? ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗೆರೆಯಿರುವ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚಾಪವನ್ನು ಎಳೆದು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು 7 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದೇ?

ಈ ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಇನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಆ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?



ಇದು ಯಾಕೆ ಎಂದು ಅರ್ಥವಾಗದಿದ್ದರೆ, ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದುವರಿಸಿದ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನೂ, ನಾಲ್ಕನೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯೊಂದನ್ನೂ ಯೋಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



ನೆರಳಿನ ಲೆಕ್ಕ

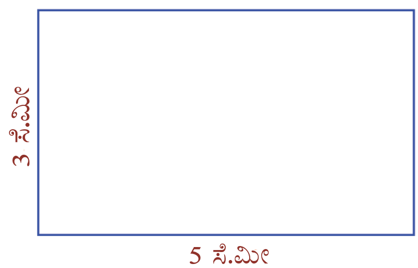
ಒಂದು ಮರದ ಅತಿ ಕೆಳಗಿನ ರೆಂಬೆಯ ವರೆಗಿನ ಎತ್ತರವು 1 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿಯ ವರೆಗಿನ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು 2 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ನೆರಳಿನ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದವು 8 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಮರದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ;

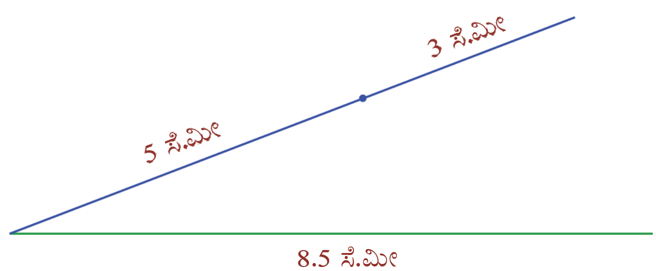
ಇಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೊಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಈ ಆಯತದಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವಂತೆ 17 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?



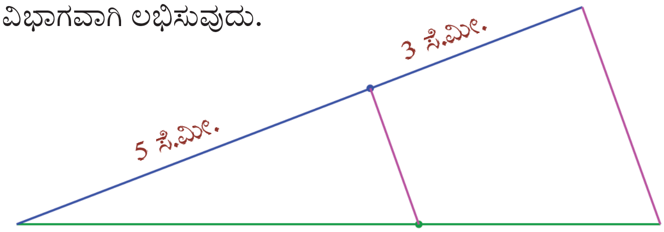
ಸುತ್ತಳತೆ 17 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದರೆ, ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲದ ಮೊತ್ತ 8.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಇಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು 5:3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲು 8.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವ. ಇದನ್ನು 5:3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲು ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದ ಎರಡನೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದನ್ನು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ.

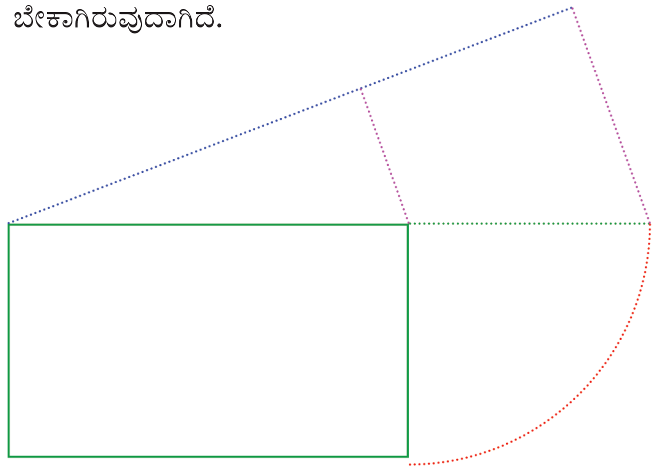


ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ 4 ಯೂನಿಟ್ ಉದ್ದವಿರುವ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು 6 ಯೂನಿಟ್ ಉದ್ದವಿರುವ AC ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. Min = 0, Max = 1 ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ C ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. A ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ,ತ್ರಿಜ್ಯವು AB ಯ C ಭಾಗವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಇದಕ್ಕಾಗಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ನೀಡಲಿರುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ c * AB ಎಂದೋ ca ಎಂದೋ ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು,a ಎಂಬುದು AB ಯ ಹೆಸರಾಗಿದೆ) ಈ ವೃತ್ತವು AB ಯನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇದರಂತೆ A ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯವು AC ಯ C ಭಾಗವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಇದು AC ಯನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು E ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. AD, AE ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಉದ್ದಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಯಾಕೆ? ಸ್ಲೈಡರಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸಿ, D, E ಇವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. BC, DE ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳ ವಿಶೇಷತೆ ಏನು?

ಇನ್ನು ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯೂ 5:3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗವಾಗಿ ಲಭಿಸುವುದು.



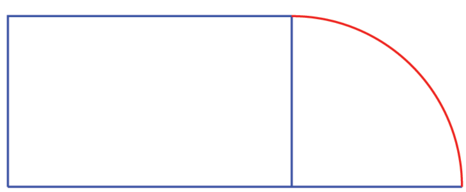
ಈ ತುಂಡುಗಳು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದಾಗಿದೆ.



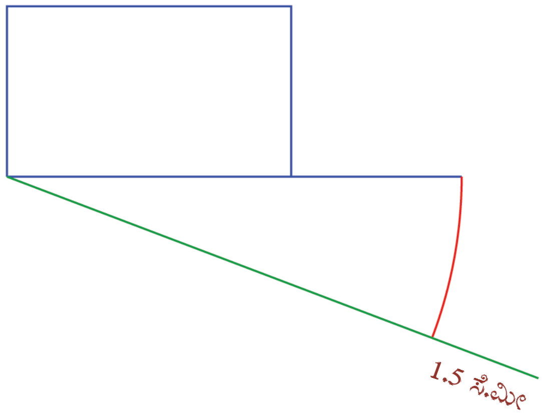
ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

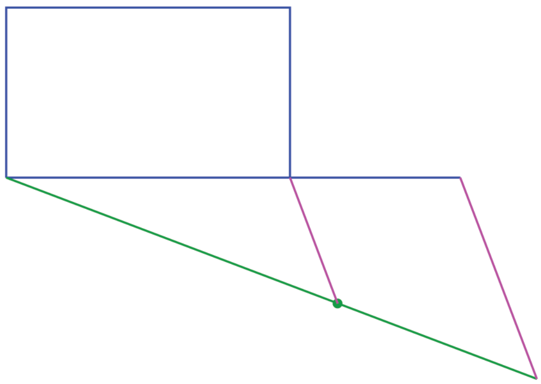
ಇದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನೂ ಹೇಳಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಬದಲಾಯಿಸದೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಮೊದಲಾಗಿ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಾಗಿಸಬೇಕು.



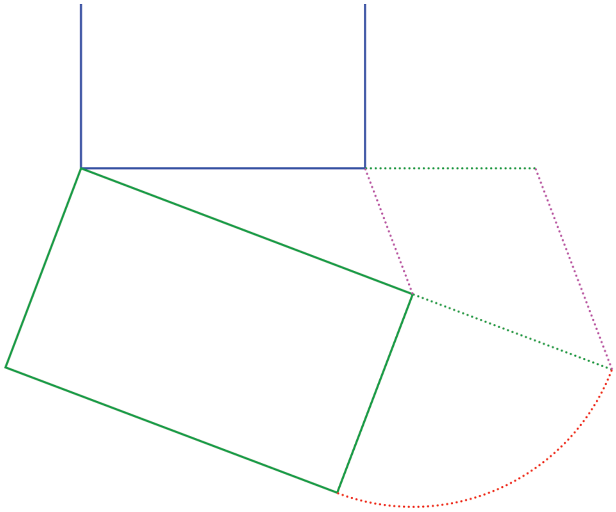
ಇನ್ನು ಇದರ ಕೆಳಗೆ ಇಷ್ಟೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಓರೆಯಾಗಿ ಎಳೆದು, ಅದನ್ನು 1.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. (ಯಾಕೆ?)



ಇನ್ನು ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕು.



ಇನ್ನು ಈ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.



(1) 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು 2 : 3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿರಿ.

(2) 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ , ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೊಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 3 : 4 ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

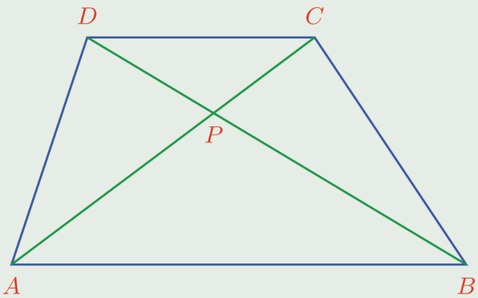
(3) ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆಯು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ.

i) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ.

ii) ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 3 : 4 : 5

iii) ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 2 : 3 : 4

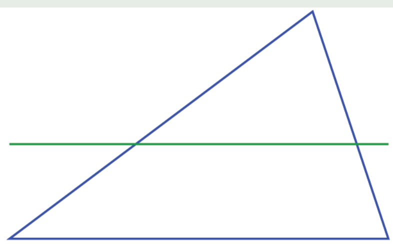
(4) ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ *ABCD* ಎಂಬ ಸಮಲಂಬದ ಕರ್ಣಗಳು *P* ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.



$PA \times PD = PB \times PC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

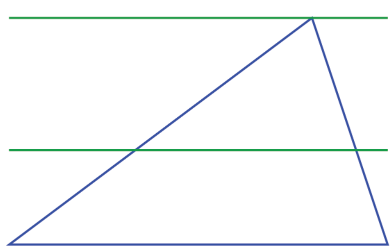
ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರೊಳಗೆ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಈ ಗೆರೆಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಎರಡೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗಗಳೊಳಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರದ ಮೂಲಕವೂ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದರೋ?



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. AB ಎಂಬ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅದರ ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ, ಇದು AC ಯನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು E ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. D, E ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು AB, AC ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ. ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ನೋಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಮೂರೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಈ ಭಾಗಗಳು ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಗೆರೆಯ ಭುಜಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ತಿಳಿದೆವು?

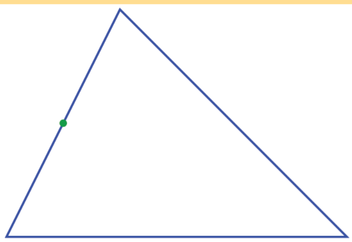
> ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ, ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

ಹೀಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, ಒಂದು ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಾದರೋ?

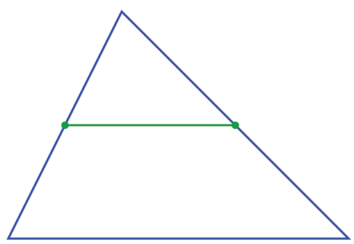
ಆ ಭುಜವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈಗ ಹೇಳಿದ ತತ್ವಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದು ಒತ್ತಿ ಹೇಳಬೇಕಾದ ಒಂದು ವಿಚಾರವಾಗಿದೆ.

> ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು ಮೂರನೇ ಭುಜವನ್ನು ಅದರ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು.

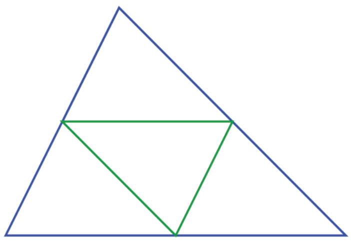
ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

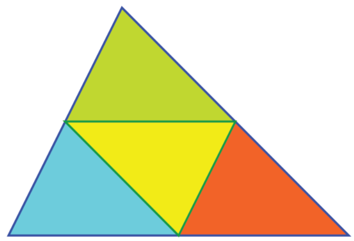


ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಈ ಗೆರೆಯು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದು ಹೋಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವೆವು ಅಲ್ಲವೇ? ಹಾಗಾದರೆ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಎಡಭಾಗದ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಯಾಯಿತು:



ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಜೋಡಿಸಿದರೋ?





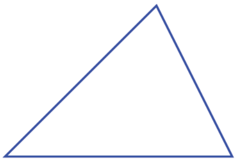
ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು? ಮಧ್ಯದ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ.

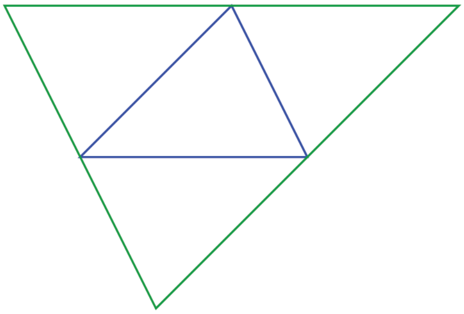
ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಅದು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜ ಮತ್ತು ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಾಗಿವೆ. ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಕೋನ ಮತ್ತು ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಭುಜದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೂ ಸರಿ. (ಯಾಕೆ?), ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಇದರಂತೆ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನ ಎಲ್ಲವೂ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ,

ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವು ಸಿಗುವುದು. ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ,

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು.

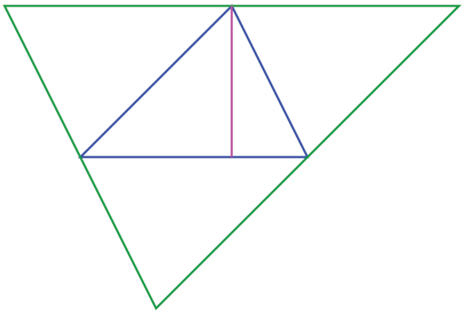
ಇನ್ನು ಒಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ?





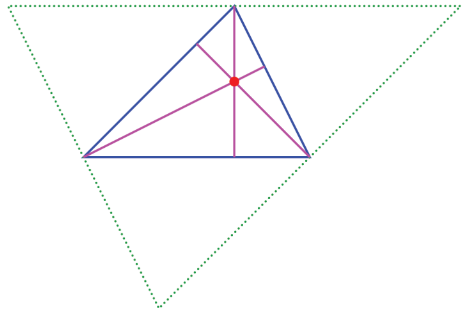
ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನವಾಯಿತು. ಅಲ್ಲವೇ?

ಇದರಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿರುವುದು.



ಹಾಗಾದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಶಿರಗಳಿಂದಲೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೋ? ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳಾಗುವುದು. ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ

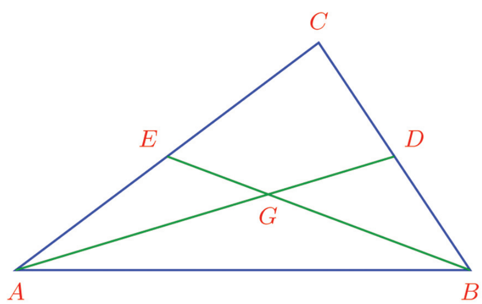
ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದೆಂದು **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವಲ್ಲಾ?



ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು.

ಇದೇ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರವನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆ (median) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

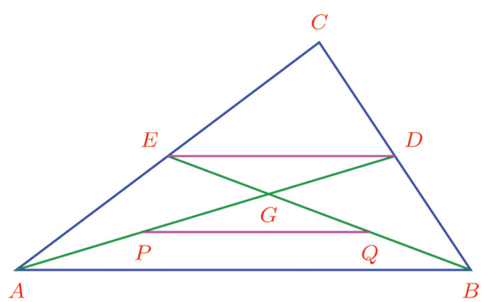
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಶಿರಗಳಿಂದಿರುವ ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳು G ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು.



ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಅದರ ಅರ್ಧವೂ ಆಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$ED = \frac{1}{2} AB$$

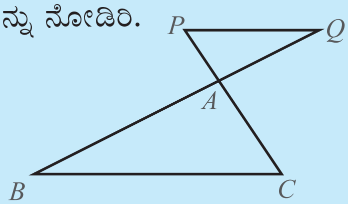
ಇನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮೇಲೆಯೇ GAB ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆಯಲ್ಲವೇ, ಅದರ ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೋ?



$$PQ = \frac{1}{2} AB$$

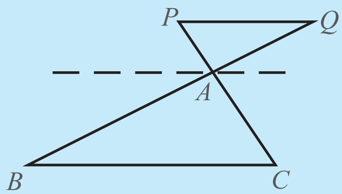
ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಗೆ

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಗೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ವಿಭಜಿಸುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ PQ

A ಯ ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಆಗ

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AQ}$$

ಅಲ್ಲದೆ, ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$\frac{PC}{AP} = \frac{AP+AC}{AP} = 1 + \frac{AC}{AP}$$
$$\frac{QB}{AQ} = \frac{AQ+AB}{AQ} = 1 + \frac{AB}{AQ}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಮೂರು ಸಮ ವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ,

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ

$$PQ = ED$$

$PQDE$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದ, PQ, ED ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರವಾದುದರಿಂದ, ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳಾದ PD, QE ಇವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$PG = GD$$

AG ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ P; ಆಗ,

$$AP = PG = GD$$

ಇದರಂತೆ

$$BQ = QG = GE$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವು ಅವುಗಳನ್ನು $2:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.

ಇನ್ನು A, B, ಇವುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಬದಲು B, C ಎಂಬೀ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದಾದರೋ?

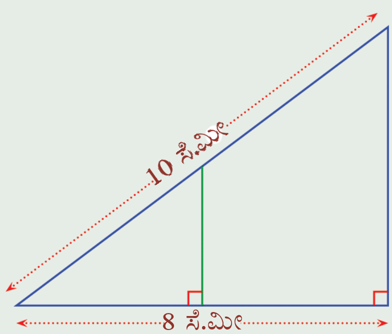
ಅವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವೂ BE ಯನ್ನು $2:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು, ಅಂದರೆ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು G ಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು, ಆ ಬಿಂದುವು ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳಿಂದ 2 : 1 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.

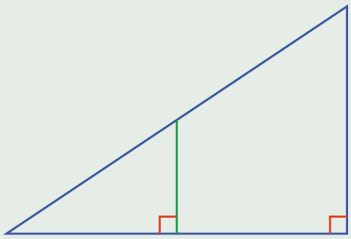
ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರ (centroid) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(2) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

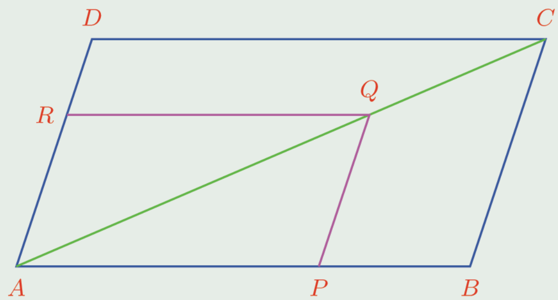


i) ಈ ಲಂಬವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೂರು ಶಿರಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

iii ಒಂದು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) $ABCD$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ AB ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯ ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು AC ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು. Q ನ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ AD ಯನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.

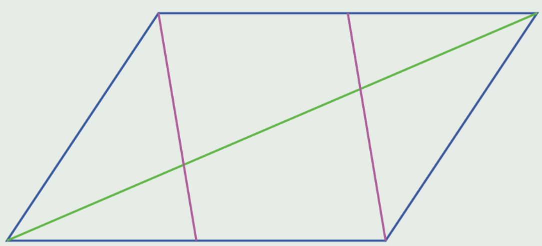


i) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AR}{RD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

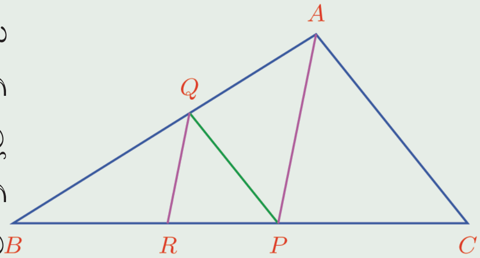
ii) $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AR}{AD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಗೆರೆಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಕರ್ಣವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

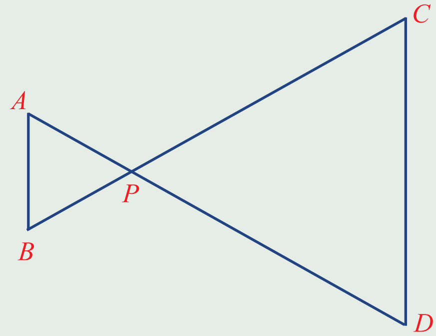


(5) ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ BCಯಲ್ಲಿರುವ Pಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ AC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, ABಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು. Q ನಿಂದ APಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, BCಯನ್ನು Rನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.



$\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BR}{RP}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB, CD ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ.



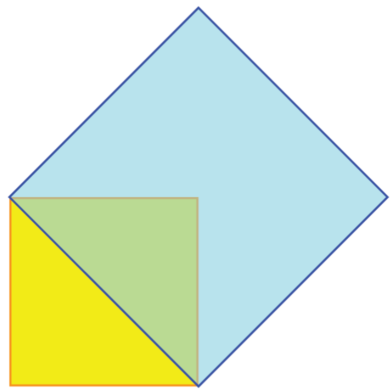
$AP \times PC = BP \times PD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಇತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.			
• ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಯೂ, ಕಡಿಮೆಮಾಡಿಯೂ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಭೇದಿಸುವ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.			
• ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.			

4 ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

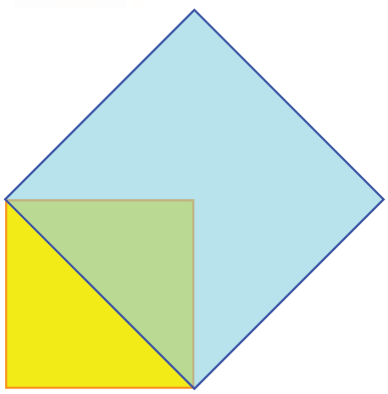
ಉದ್ದಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ



ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ಚೌಕದ ಕರ್ಣವು ಭುಜವಾಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ರೀತಿ ರಚಿಸಿದ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದು ನೆನಪಿದೆಯೇ?



ಅಂದರೆ, ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಒಂದು ಮೀಟರಾದರೆ, ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎರಡು ಚದರಮೀಟರಾಗುತ್ತದೆ.

ಅದರ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

ಏನೇ ಆದರೂ ಒಂದು ಮೀಟರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಮೀಟರ್‌ಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ. (ಅದು ಹೇಗೆ?) ಒಂದು ಮತ್ತು ಎರಡರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದೀತು; ಆದರೆ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎರಡು ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆದುದರಿಂದ, ಭುಜದ ಉದ್ದವಾದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಎರಡಾಗಬೇಕು.

ಯಾವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ವರ್ಗ ಎರಡಾಗಿದೆ?

ಒಂದೂವರೆಯಾದೀತೇ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

ಅದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ, ಒಂದೂಕಾಲು ಆದರೋ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

ಅದು ಕಡಿಮೆಯಾಯಿತು. ಒಂದು ಮೂರನೇ ಒಂದು ಆದರೋ?

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

ಅದೂ ಕಡಿಮೆಯೇ; ಆದರೂ ಒಂದೂಕಾಲಿಗಿಂತ ಉತ್ತಮ. ಹೀಗೆ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿಯೂ, ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಿಯೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ ಬದಲು, ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡಿದರೋ? ವರ್ಗ 2 ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶವಾಗಿರುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದೂ, ಛೇದವಾಗಿರುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

ಅಂದರೆ,

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ: $x^2 = 2y^2$

ಈಗ ಇದೊಂದು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಯಿತು. ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದರ ವರ್ಗ ಇನ್ನೊಂದರ ವರ್ಗದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಬೇಕು.

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ x^2 ಎಂಬ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ 2ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ,

x^2 ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. x ನ ಕುರಿತಾಗಿಯೋ?

ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲಾ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಅಲ್ಲವೇ? ಆಗ x ಸಹಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಅದುದರಿಂದ $x = 2u$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ $y^2 = 2u^2$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ, y^2 ಮತ್ತು y ಯೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ ಆಗ $y = 2v$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$y^2 = 2u^2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು $(2v)^2 = 2u^2$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $2v^2 = u^2$; ಅಥವಾ

$$u^2 = 2v^2$$

ಇದು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ u, v ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆಗ x, y ಇವುಗಳ ಕುರಿತು

ಹೇಳಿರುವುದೆಲ್ಲಾ u, v ಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಯದಾಗಿ u, vಗಳು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದೂ, ಅದನ್ನನುಸರಿಸಿ

$$u = 2s \qquad v = 2t$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $s^2 = 2t^2$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದು ಹೀಗೆ ಕೊನೆಯಿಲ್ಲದೆ ಮುಂದುವರಿಯುವುದಲ್ಲದೆ ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಉತ್ತರ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ; $x = 2u$ ಆದರಲ್ಲಿ $u = 2s$ ಎಂದೂ ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ. ಆಗ $x = 4s$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ

$y = 4t$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಈ ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತೆ x, y ಇವುಗಳು ಕೇವಲ 2 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲ, 4 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳೂ ಆಗಿವೆ.

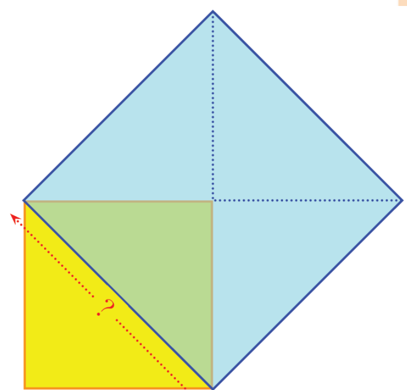
ಸಮವಾಕ್ಯದ ಆಟವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 8 ರ ಹಾಗೂ 16 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿಯುವುದು.

ಅಂದರೆ, $x^2 = 2y^2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನನುಸರಿಸುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳು 2 ರ ಎಲ್ಲಾ ಘಾತಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ಇದು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯ? ಎರಡರ ಎಲ್ಲಾ ಘಾತಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಾದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೋ? ಹಾಗಾದರೆ ಈ ರೀತಿಯ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲ; ವರ್ಗ ಎರಡು ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ ಇಲ್ಲ.

ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ವರ್ಗ 2 ಅಲ್ಲ.

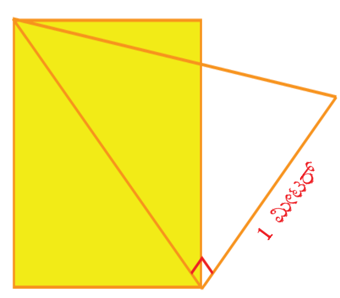
ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆ ಏನಾಯಿತು? ಈ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು ಒಂದು ಮೀಟರಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯಾ ಮಡಿಯಾದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಎರಡು ಆಗಬೇಕು (ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದರೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅದರ ವರ್ಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ). ಆದರೆ ವರ್ಗ ಎರಡು ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?



ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿಯೋ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದಗಳು ಹಲವು ಇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದು

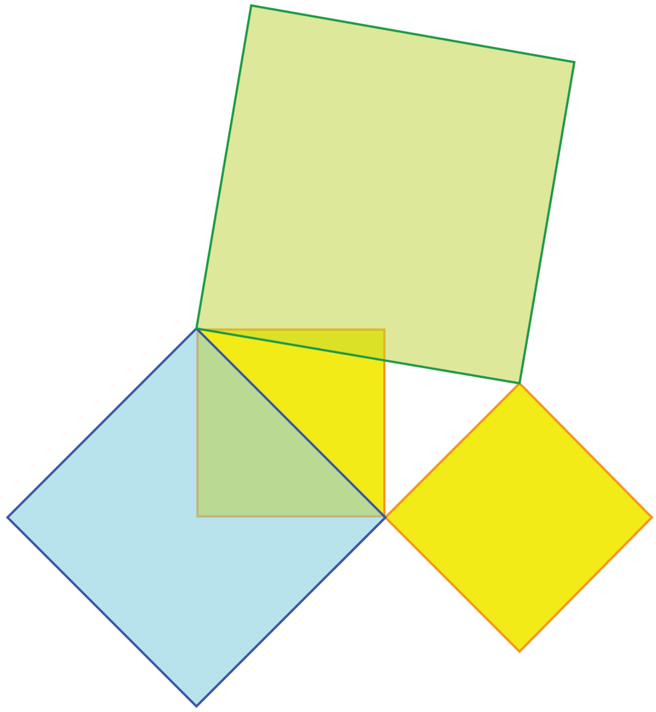
ಯಾವುದನ್ನೇ ಆದರೂ ಅಳೆದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ– ಇದುವೇ ಗಣಿತದ ಒಂದು ಪ್ರಧಾನವಾದ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಅಳತೆಗೊಳಪಡುವುದರ ಸ್ವಭಾವವು ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬೇಕಾದೀತು. ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಸಿಗುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿಂದು ಬದುಕುವ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಮಾನವನಿಗೆ ಗುಂಪಿನ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಸಾಕು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಅಗತ್ಯವಾಗಿತ್ತು. ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಸಾಕಾಗಿತ್ತು.

ಕ್ರಿ.ಪೂ ಐದು ಸಾವಿರದ ಸುಮಾರಿಗೆ ನದೀ ದಡದಲ್ಲಿ ಶಾಶ್ವತವಾಗಿ ವಾಸವಾಗಿದ್ದು ಕೃಷಿ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಕೃಷಿ ಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು, ಗುಡಿಸಲುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಹಲವು ರೀತಿಯ ಉದ್ದ, ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿತು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಎಂಬ ಸಂಕೇತ ಉಂಟಾಯಿತು. ಪಾಲು ಹಂಚುವಾಗಲೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದರೊಂದಿಗೆ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನಿವಾರ್ಯತೆ ಉಂಟಾಯಿತು.

ಇಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಭೌತಿಕ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗಲ್ಲದೆ ಗಣಿತದ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿಯೂ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಾಯಿತು. ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳು (complex numbers) ಈ ರೀತಿ ಉಂಟಾದುವುಗಳಾಗಿವೆ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತಿತರ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರ.

ಚೌಕದ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು? ಇದರ ಭುಜಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡುವ.



ಪೈಥಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣವು ಭುಜವಾಗಿರುವ (ಹಸಿರು) ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $1+2=3$ ಚದರ ಮೀಟರ್. ಆಗ ಅದರ ಉದ್ದ 1 ಮೀಟರಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಮಡಿಯಾದರೆ, ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ವರ್ಗ 3 ಆಗಬೇಕು.

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಅಲ್ಲವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡಂತೆ, ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 3 ಸಹಾ ಅಲ್ಲವೆಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ ಈ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ : ಘನಫಲ 2 ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕೆಂದಿರಲಿ. ಇದರ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು? ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ವರ್ಗವೂ 2 ಅಲ್ಲ, ಅದೇ ರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಮೂರನೇ ಘಾತವೂ 2 ಅಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ರೀತಿ ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬರುವುದು.

ಅಳತೆಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

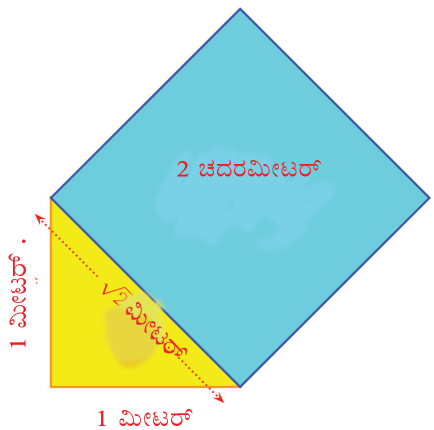
ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬೇಕು. ನಾವು ನೋಡಿದ ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಆಗಿರುವ (ಮೀಟರ್, ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಾಗಬಹುದು) ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೂ ಕೇಳಬಹುದು:

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 2 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುವುದು?

ಭುಜಗಳು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೋ ಆದ ಚೌಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಉದ್ದವು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ವರ್ಗಮೂಲವಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 4 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ $\sqrt{4} = 2$; ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $2\frac{1}{4}$ ಆದರೆ ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$

ಇದೇ ರೀತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 2 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $\sqrt{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

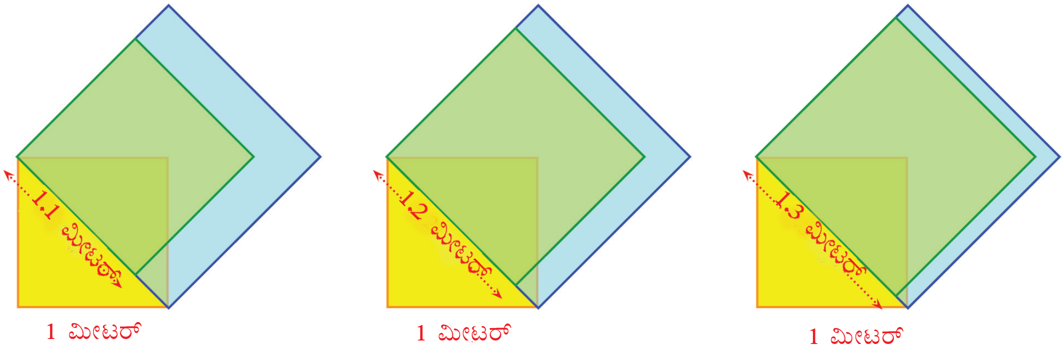


ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದು ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಾಲದಲ್ಲವೇ. ಅದರ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಗೊತ್ತಿರುವ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಅಳೆದೂ ನೋಡಬೇಡವೇ? ಅದಕ್ಕಾಗಿರುವ ವಿಧಾನ, ಈ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿ ಉದ್ದವನ್ನು ಕರ್ಣದಲ್ಲಿಯೇ ಗುರುತಿಸಿದರೆ, ಇದೇ ಭುಜವಾಗಿರುವ ಚೌಕಗಳು ಕರ್ಣವು ಭುಜವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ಜೊತೆಗೆ ಒಟ್ಟು ಸೇರುತ್ತವಲ್ಲವೇ.

ಕುಸಿಯುವ ನಂಬಿಕೆ

ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಹೋಲಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದು ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಆರನೇ ಶತಮಾನದ ಪೈಥಗೋರಸ್ ಮತ್ತು ಆತನ ಶಿಷ್ಯರ ನಂಬಿಕೆಯಾಗಿತ್ತು. ಇನ್ನೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದೇ ಈ ನಂಬಿಕೆಯಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ ಒಂದು ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಭುಜದ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ $a : b$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ, ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು ಭುಜದ $\frac{a}{b}$ ಮಡಿಯಾಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಆದರೆ ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಭುಜದ ವರ್ಗದ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ಮಡಿಯಾಗಬೇಕು. ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಭುಜದ ವರ್ಗದ ಎರಡು ಮಡಿ ಯಾದುದರಿಂದ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ಆಗಬೇಕು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಕಂಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಪೈಥಗೋರಸನ ಶಿಷ್ಯನೇ ಆದ ಹಿಪ್ಪಾಸಸ್ ಈ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನೆಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ.

ಚೌಕದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಭುಜದಂತಹ, ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೋಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳು (incommensurable magnitudes) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.



ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ಮಾತ್ರವೇ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಮೊದಲು 1.1, 1.2, 1.3........ ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.5^2 = 2.25$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಹತ್ತನೇ ಒಂದರ ವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

ಇನ್ನು 1.4 ಮತ್ತು 1.5 ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ 1.41, 1.42, 1.43, . . . ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ

$$1.41^2 = 1.9881; \quad 1.42^2 = 2.0164$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ ನೂರನೇ ಒಂದರ ವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಮೊದಲೇ ಬರೆದಂತೆ,

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ

1.4^2	=	1.96	1.5^2	=	2.25
1.41^2	=	1.9881	1.42^2	=	2.0164
1.414^2	=	1.999396	1.415^2	=	2.002225
1.4142^2	=	1.99996164	1.4143^2	=	2.00024449
1.41421^2	=	1.9999899241	1.41422^2	=	2.0000182084

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಐದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ಇದರಿಂದ,

$$2 - 1.41421^2 = 0.0000100759 < 0.00002$$

ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ

$\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \ldots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

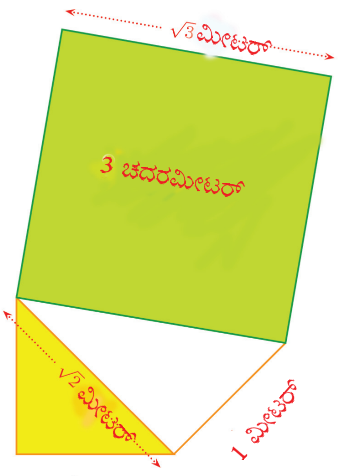
ಹಾಗಾದರೆ, $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಒಂದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಬರೆದರೆ 1.4, ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಬರೆದರೆ 1.41 ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

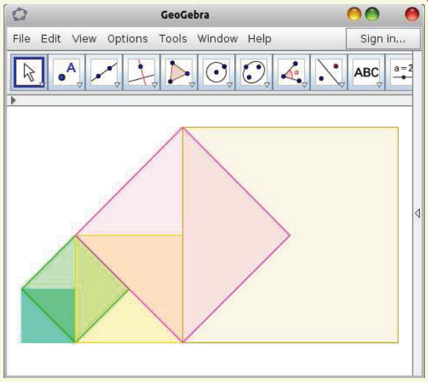
ಇದನ್ನು

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $\approx$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯ ಅರ್ಥ "ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ" ಎಂದಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 3 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{3}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



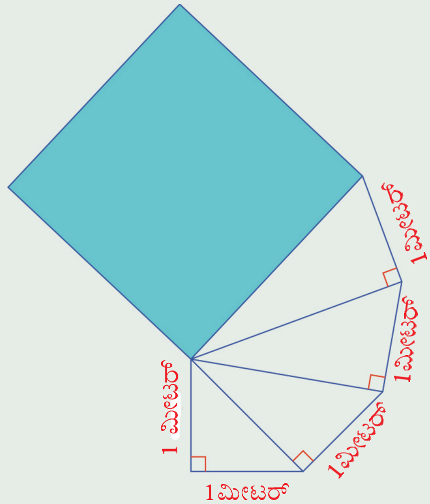


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ. ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ (Regular polygon ಉಪಯೋಗಿಸುವ) Area ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಯಾವ ಚೌಕಗಳ ಭುಜಗಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವವುಗಳು?

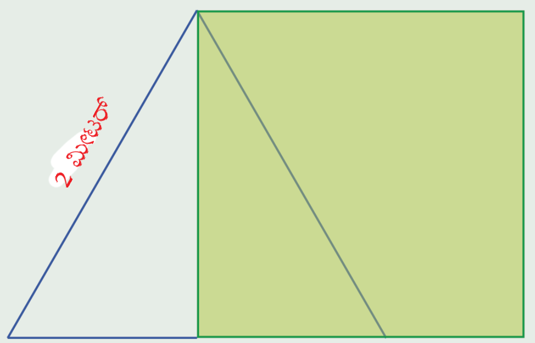
ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳಂತೆ 1.7, 1.73, 1.732 ......ಮೊದಲಾದ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 3 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಚುಟುಕಾಗಿ $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ x ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ x ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{x}$ ಆಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{x}$ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೋ ಆದೀತು; ಅಲ್ಲವಾದರೆ, ವರ್ಗ x ನ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವ, ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು $\sqrt{x}$ ನ್ನು ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲದಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವು ಭುಜವಾಗುವಂತೆ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ, ಒಂದು ಭುಜದ ಅಳತೆಯನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.



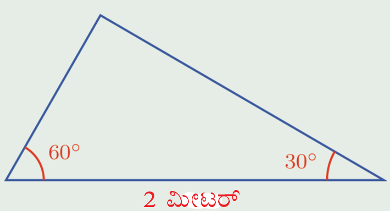
(2) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಯು ಭುಜವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



i) ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ಚದರ ಮೀಟರ್?

ii) ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್?

iii) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದೆರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

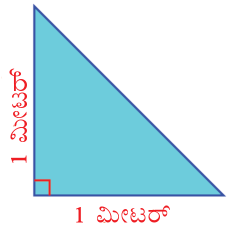


(3) ಯಾವುದೇ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

(4) $\sqrt{13}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(5) $\sqrt{2}$ ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು, $\sqrt{3}$ ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದೂ ಆಗಿರುವ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

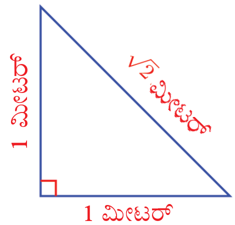
ಕೂಡಿಸುವುದೂ ಕಳೆಯುವುದೂ



ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಮೀಟರಾಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಸುತ್ತಳತೆಯೋ?

ಇದರ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ $\sqrt{2}$ ಮೀಟರಲ್ಲವೇ.



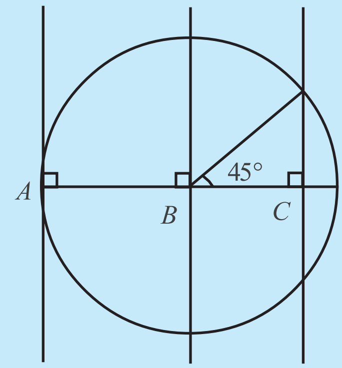
ಹಾಗಾದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ ಸಿಗಲು 2 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು $\sqrt{2}$ ಮೀಟರನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಈ ಉದ್ದವನ್ನು $2 + \sqrt{2}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು.

$\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1.4, 1.41, 1.414, ...ಎಂದು ಮುಂದುವರಿಯುವುದಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ $2 + \sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು ಇವುಗಳಿಗೆ 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದು. ಅಂದರೆ 3.4, 3.41, 3.414, ... ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅಭಿನ್ನಕ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ

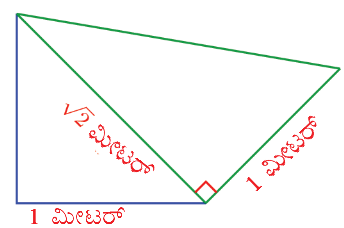
ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ B ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.



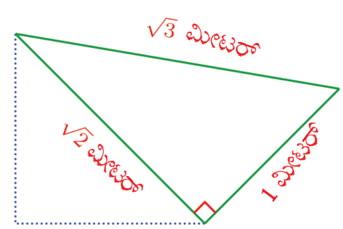
$AB : BC = \sqrt{2} : 1$

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆ ಸಾಕೆಂದಿದ್ದರೆ, ಸುತ್ತಳತೆ 3.41 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾದ ಬೆಲೆ ಬೇಕೆಂದಾದರೆ 3.414 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವನ್ನು ಪಾದವಾಗುವಂತೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ?



ಇದರ, ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆ $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.



$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414
$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	:	3.1	3.14	3.146

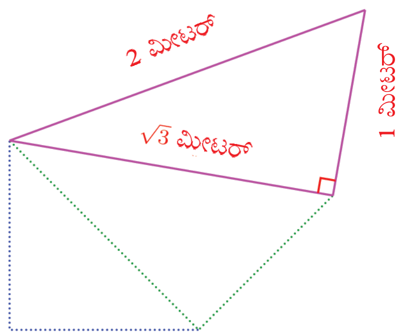
ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ, ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ 4.146 ಮೀಟರ್.

ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು? ಸರಿ ಸುಮಾರು $4.146-3.414=0.732$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2 = \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

ಇನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲೆಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ? ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?



ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ? ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ $2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್. ಇದರ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕದೇ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್ ಅಲ್ಲವೇ: ಹಾಗಾದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು

$$(3+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{2}$$

ಇದನ್ನು ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ

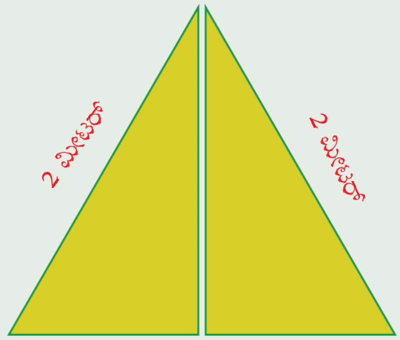
$$2-1.414=0.586$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ ಸರಿಸುಮಾರು 0.586 ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ.

?

(1) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ $1\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್, ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜ $\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

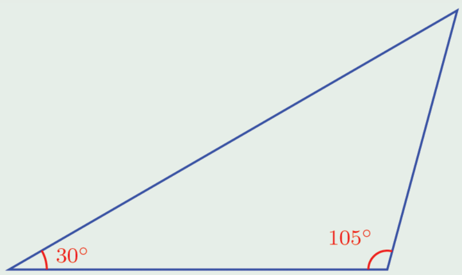
(2) ಒಂದು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿ ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



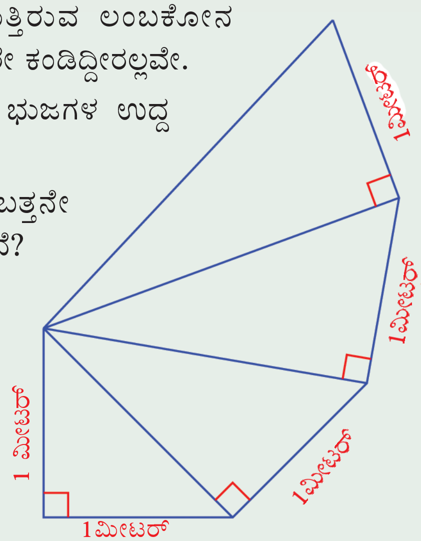
i) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್?

ii) ಒಟ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ?

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ.



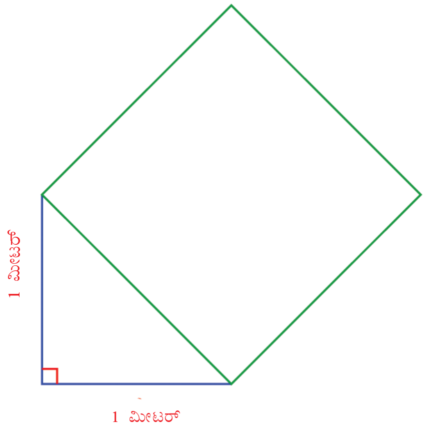
i) ಈ ರೀತಿ ರಚಿಸಿದ ಹತ್ತನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬಹುದು?

ii) ಹತ್ತನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಒಂಬತ್ತನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ?

iii) ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ nನೇ ತ್ರಿಕೋನ ಹಾಗೂ ಅದರ ಅತಿ ಸಮೀಪದ ಮುಂದಿನ ತ್ರಿಕೋನ ಇವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

(5) ಲಂಬ ಭುಜಗಳು $\sqrt{3}$ ಸೆ.ಮೀ., $\sqrt{2}$ ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ?

ಗುಣಾಕಾರ



ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಕಂಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ? ಇದರಲ್ಲಿ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರಾಗಿದೆ?

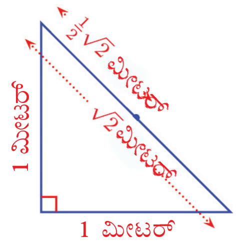
ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವೂ $\sqrt{2}$ ಮೀಟರಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ ಸಿಗಲು ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಸಾಕು.

ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ $\sqrt{2}$ ರ 4 ಮಡಿಯನ್ನು $4 \times \sqrt{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಚಿಹ್ನೆ ಇಲ್ಲದೆ, $4\sqrt{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು.

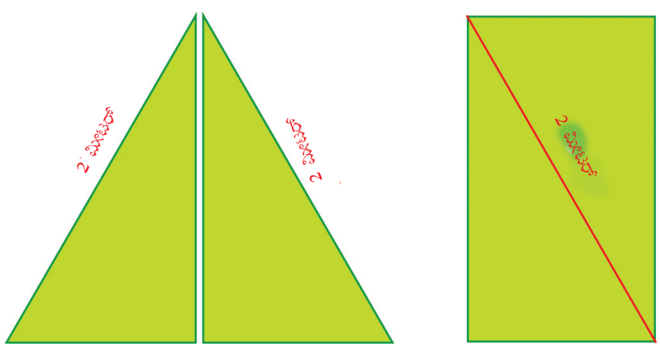
ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ 4 ಮಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಗ ಈ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ, ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಇದೇ ರೀತಿ $\sqrt{2}$ ರ ಅರ್ಧವನ್ನು $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು. $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು.ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071 \ldots$

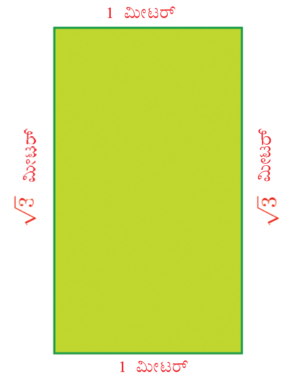


ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮಾನವಾದ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಒಂದು ಆಯತವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ?



ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪಾದ 1 ಮೀಟರಾಗಿದೆ. ಉನ್ನತಿ $\sqrt{3}$ ಮೀಟರಾಗಿದೆಯೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೆವು.

ಹಾಗಾದರೆ, ಸುತ್ತಳತೆ $2\sqrt{3} + 2$ ಮೀಟರ್

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$2\sqrt{3}$	:	3.4	3.46	3.464 . . .
$2\sqrt{3}+2$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ $2\sqrt{3} + 2$ ಮತ್ತು $2(\sqrt{3} + 1)$ ಇವೆರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆಯೇ? ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$\sqrt{3} + 1$	:	2.7	2.73	2.732 . . .
$2(\sqrt{3}+1)$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

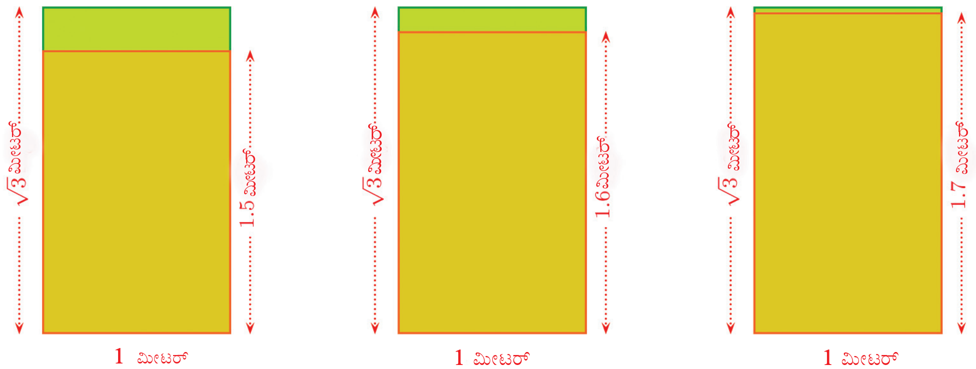
ಅಂದರೆ, $2\sqrt{3}+2$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಾಗೂ $2(\sqrt{3} + 1)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ,

$$2\sqrt{3} + 2 = 2(\sqrt{3} + 1)$$

ಇನ್ನು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡುವಾ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. (ಆರನೇ ತರಗತಿಯ **ಭಾಗಗಳ ಭಾಗ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಭಿನ್ನಕ ವಿಸ್ತಾರ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಇಲ್ಲಿಯೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಭುಜಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದ $1\times\sqrt{3} = \sqrt{3}$ ಚದರ ಮೀಟರಾಗಿದೆಯೇ?

ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ, ಒಂದು ಭುಜ 1 ಮೀಟರ್, ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜ $\sqrt{3}$ ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯಾ ಉದ್ದವು ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ಇದರೊಳಗೆ ರಚಿಸಿ ನೋಡುವ.



ಮುಂದುವರಿದು, ಒಳಗಿನ ಆಯತದ ಎತ್ತರಗಳು 1.73, 1.732,. . .ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೀಟರುಗಳಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಇದೇ ಚದರಮೀಟರಾಗಿ ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್, 1 ಮಿಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\sqrt{3}$ ಚದರ ಮೀಟರಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಆಳತೆ $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ ಆದರೋ? ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಪರವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲು, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ ಇವುಗಳ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ ಬೇಕಾದ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732	1.7320	1.73205 . . .
$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421 . . .
$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$	:	2.4	2.44	2.449	2.4494	2.44948 . . .

$$\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2.44948\ .\ .\ .$$

ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ವಿಚಾರವಿದೆ. 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, 1.41421^2, . . . ಎಂದು ಮುಂದುವರಿಯುವ ವರ್ಗಗಳು 2ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದನ್ನು ಕಂಡೆವಲ್ಲವೇ? ($\sqrt{2}$ = 1.41421 . . . ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರ ಅರ್ಥ ಇದೇ ಅಲ್ಲವೇ?) 1.7^2, 1.73^2,1.732^2, 1.7320^2, 1.73205^2,. . . ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ವರ್ಗಗಳು 3ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುತ್ತವೆಂದೂ ಕಂಡೆವು.

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವರ್ಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವೂ 6ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರಬೇಕಲ್ಲವೇ?

ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವು ಗುಣಲಬ್ದಗಳ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

ದಶಮಾಂಶ ಲೆಕ್ಕ

ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ಚುಟುಕಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ, ಮುಂದಿನ ಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆ 5ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು 1 ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ಆದುದರಿಂದ ಈ ಗುಣಲಬ್ದದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ಸರಳಗೊಳಿಸಿ 2.4 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$1.7^2 \times 1.4^2 = (1.7 \times 1.4)^2$$
$$1.73^2 \times 1.41^2 = (1.73 \times 1.41)^2$$
$$1.732^2 \times 1.414^2 = (1.732 \times 1.414)^2$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $1.7 \times 1.4, 1.73 \times 1.41$ ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ನೀಡಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ 2ರ, 3ರ ಮತ್ತು 6ರ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

3	:	1.7^2	1.73^2	1.732^2	1.7320^2	$1.73205^2 \ldots$
2	:	1.4^2	1.41^2	1.414^2	1.4142^2	$1.41421^2 \ldots$
6	:	2.4^2	2.44^2	2.449^2	2.4494^2	$2.44948^2 \ldots$

ಇವುಗಳ ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ?

$2.4, 2.44, 2.449, 2.4494, 2.44948, \ldots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 6ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ.

ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿರ್ವಚನವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\sqrt{6} = 2.44948 \ldots$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇದುವೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆಗ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

2 ಮತ್ತು 3ರ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಇದೇ ರೀತಿ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಗುಣಲಬ್ಧದ ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. (ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳು, ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಆದರೆ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ)

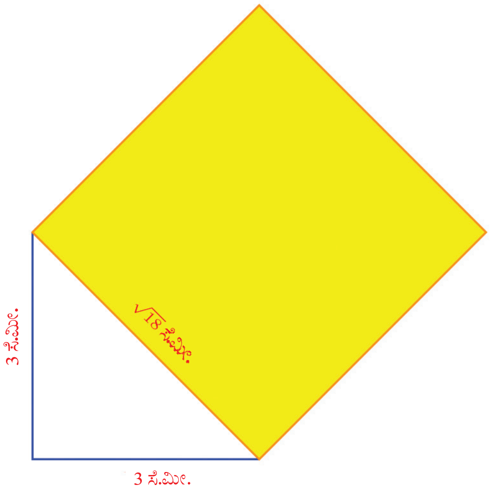
x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡೂ $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

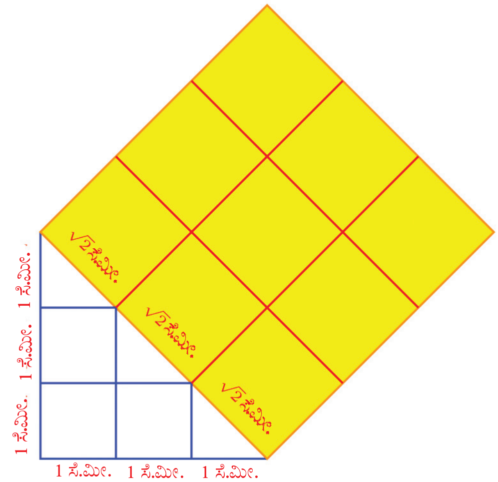
ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಲಂಬಭುಜಗಳೆರಡೂ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ. ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಕರ್ಣವು ಭುಜವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $3^2 + 3^2 = 18$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಆಗ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು $\sqrt{18}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇನ್ನು 18 ನ್ನು 9×2 ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

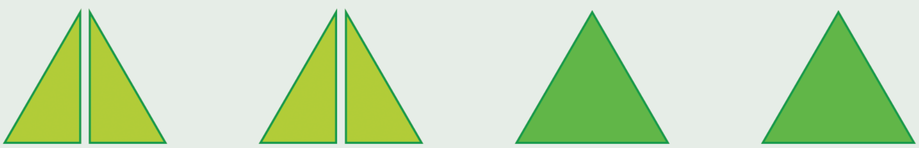
ಇದನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

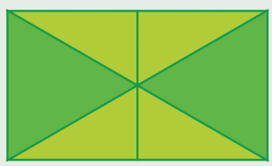




?

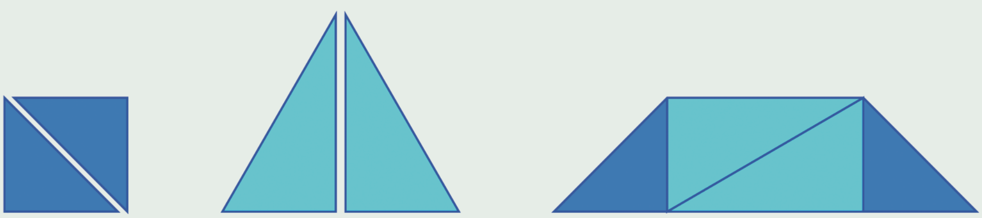
(1) ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ನಾಲ್ಕು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು ನೀಟಕ್ಕೆ ತುಂಡರಿಸಿ, ಮತ್ತೆರಡನ್ನು ಇಡಿಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಟ್ಟು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.





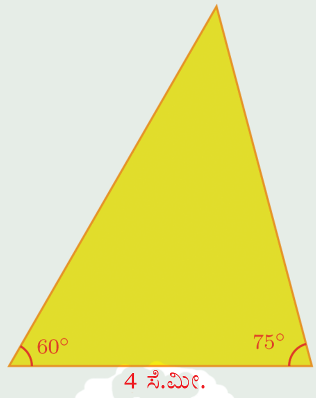
ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾದರೆ, ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೆಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ಚೌಕ ಹಾಗೂ ಅದರ ಭುಜಗಳ ಇಮ್ಮಡಿ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ಜೋಡಿಸಿ ಇರಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಲಂಬವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ.



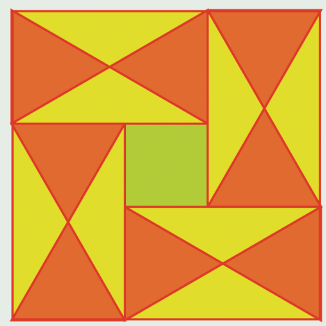
ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮಲಂಬದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಹೊರಗಿನ ಚೌಕ ಮತ್ತು ಒಳಗಿನ ಚೌಕದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೆಷ್ಟು?



(5) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಆಗಿರುವವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\sqrt{3},\ \sqrt{12}$ ii) $\sqrt{3},\ \sqrt{1.2}$ iii) $\sqrt{5},\ \sqrt{8}$

iv) $\sqrt{0.5},\ \sqrt{8}$ v) $\sqrt{7\frac{1}{2}},\ \sqrt{3\frac{1}{3}}$

ಭಾಗಾಕಾರ

$2 \times 3 = 6$ ಎಂಬ ಗುಣಕಾರವನ್ನು $\frac{6}{2} = 3$ ಎಂದೋ, $\frac{6}{3} = 2$ ಎಂದೋ ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇದೇ ರೀತಿ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ಎಂಬ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ x, y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x \times y = z$ ಎಂಬ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು $\frac{z}{x} = y$ ಎಂದೂ $\frac{z}{y} = x$ ಎಂದೂ ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ

x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ,

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$

ಎಂಬ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಕಾರವಾಗಿ

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \qquad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$ **ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.**

ಇನ್ನು $\frac{6}{2} = 3$ ಮತ್ತು $\frac{6}{3} = 2$ ಆದುದರಿಂದ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಮೊದಲು ಏನನ್ನು ಕಂಡಿದ್ದೀರಿ?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ಈ ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}}$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ $3 \times \frac{2}{3} = 2$ ಎಂಬುದರಿಂದ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

ಎಂದೂ, ಮುಂದುವರಿದು ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡುವ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು, ಮೊದಲು

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ನಂತರ $\sqrt{2}$ ರ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯ ಯಾವುದಾದರೂ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$$ (ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಇನ್ನೊಂದು ಸುಲಭ ವಿಧಾನವಿದೆ. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ಆದುದರಿಂದ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

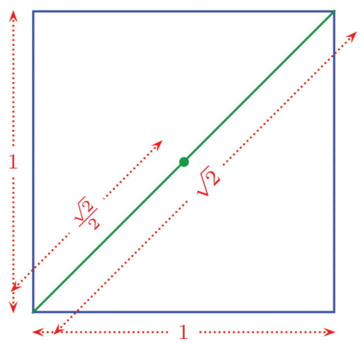
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

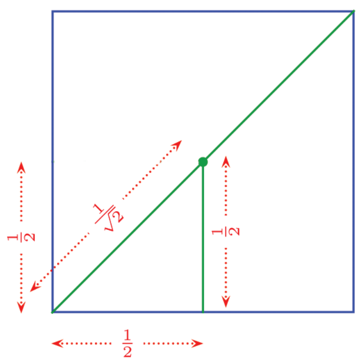
ಇನ್ನು

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$$ (ಇದಕ್ಕೆ ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಬೇಡವಲ್ಲವೇ?)

ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.

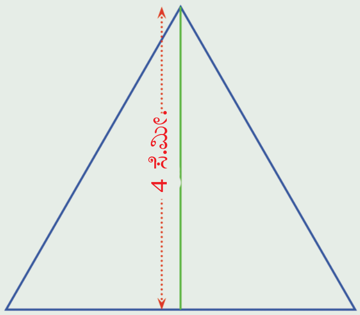
$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿಯೂ ಕಾಣಬಹುದು.





ಇದೇ ರೀತಿ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

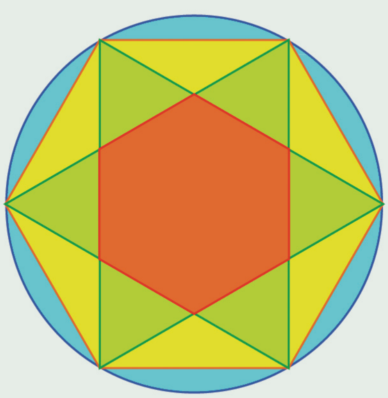


(2) ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನೊಂದು ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) ಒಳಗಿನ ಕೆಂಪು ಷಡ್ಭುಜವೂ ಸಮಷಡ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಸಣ್ಣ ಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ?

(iii) ಸಣ್ಣ ಷಡ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ದೊಡ್ಡ ಷಡ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ?

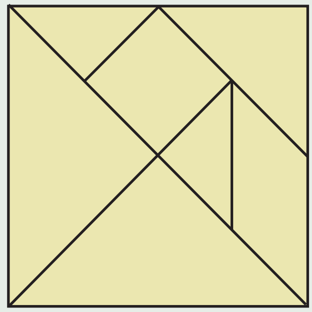


(3) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ಎಂದೂ $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

(6) 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು 7 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಟ್ಯಾನ್‌ಗ್ರಾಂ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



4 ಸೆ.ಮೀ.

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು.			
• ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು.			
• ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥವನ್ನು, ಅವುಗಳ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು.			

5

ವೃತ್ತಗಳು

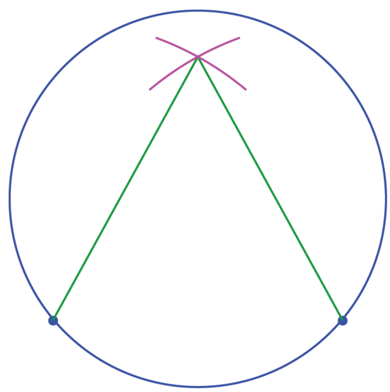
ವೃತ್ತಗಳೂ ಗೆರೆಗಳೂ

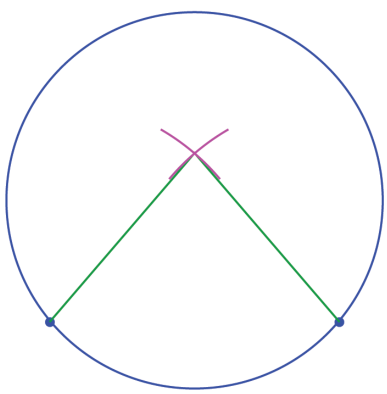
ಬಳೆಯನ್ನು ಅಥವಾ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಪಾತ್ರೆಯ ಮುಚ್ಚಳವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನೋಟುಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದರ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು?

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕಿರುವ ದೂರವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಆಗ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳಿಂದಲೂ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವುದು. ಅಂತಹ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಇದು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮೇಲೆಯಾಗಿದೆ ಅಂತರವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದರೇ?

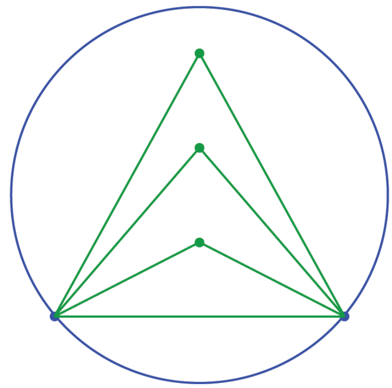




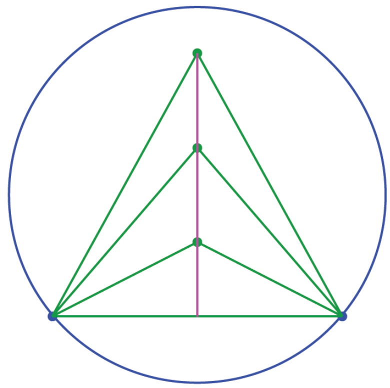
ಈಗಲೂ ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ತಿದ್ದಿಯೂ ಸರಿಪಡಿಸಿಯೂ ರಚಿಸುವುದರ ಬದಲು ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಕುರಿತು ಸ್ವಲ್ಪ ಆಲೋಚಿಸೋಣ.

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಯಾವುದೆಂದು ಮೊದಲೇ ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು, ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗೆರೆಯು ಪಾದವಾದ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಶಿರವಲ್ಲವೇ? (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ)



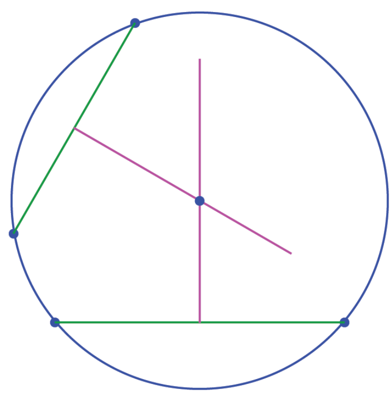
ಹೀಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ, ಪಾದದ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ನೋಡಿದೆವು.



ಆಗ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕ ದಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ? ಕೇಂದ್ರವು ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಡವೇ?

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು, ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲೇ ಆಗಿರಬೇಕು, ಈ ಎರಡೂ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳಲ್ಲೂ ಆ ಬಿಂದು ಇರಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ.



ಉದ್ದೇಶಿಸಿದ ಕೆಲಸ ಆಯಿತು; ಇನ್ನು ಆದರಿಂದ ತಿಳಿದುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಡುವ

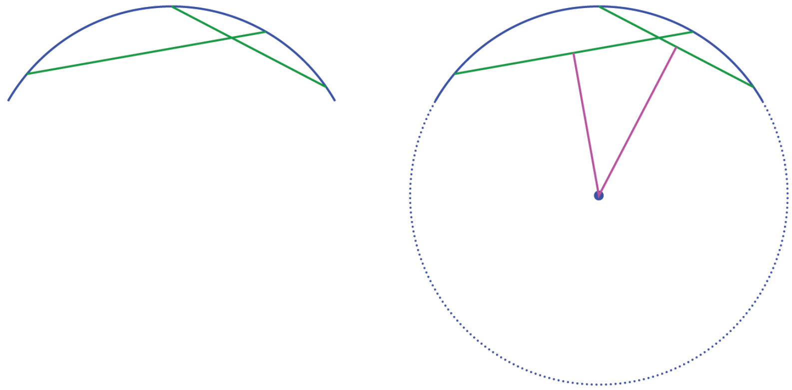
ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವು, ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು.

"ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆ" ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಬದಲು, ಹಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

(ಬಹಳಷ್ಟು ಆಲೋಚಿಸಿ, ಕೊನೆಗೆ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳುವುದು ಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲವೆ). ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಜ್ಯಾ (chord) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಆಗ ನಾವು ಕಂಡುಕೊಂಡ ತತ್ವವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

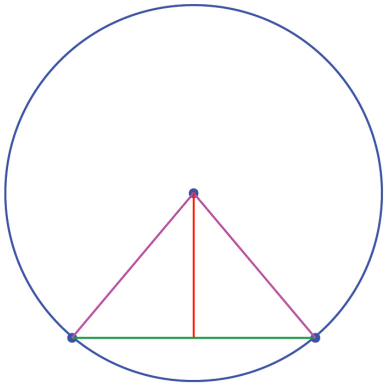
ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾದ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗ ಮಾತ್ರ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬಳೆಯ ತುಂಡು) ಸಿಕ್ಕಿದರೆ, ಇದೇ ರೀತಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಅದರಿಂದ ಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ? ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆದು, ಅವುಗಳ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?



ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಸರ್ವಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗುವುದು ಎಂಬುದರಿಂದ ಈ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ತತ್ವಕ್ಕೆ ತಲಪಿದುದಾಗಿದೆ.

ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಶಿರಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವು.



- ಮೂರನೇ ಶಿರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬವು ಪಾದವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು.
- ಮೂರನೇ ಶಿರವನ್ನೂ ಪಾದದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.
- ಮೂರನೇ ಶಿರವು ಪಾದದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಕೊನೇಯ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪಾದವಾಗಿ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾವನ್ನೂ, ಮೂರನೇ ಶಿರವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಈ ತತ್ವವಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮೊದಲ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನ ತತ್ವಗಳನ್ನೂ ವೃತ್ತದ ತತ್ವಗಳನ್ನಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

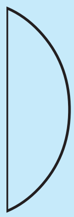
ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬವು, ಜ್ಯಾವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವೂ ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು.

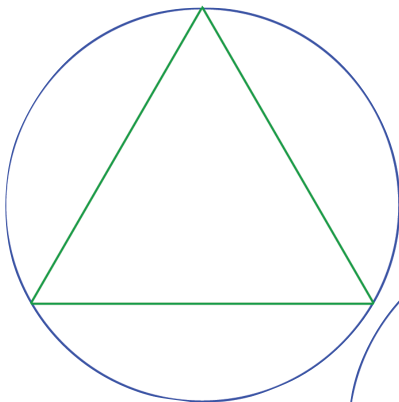
ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ: ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಮೂರನೇ ಭುಜವು ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ? (ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ)

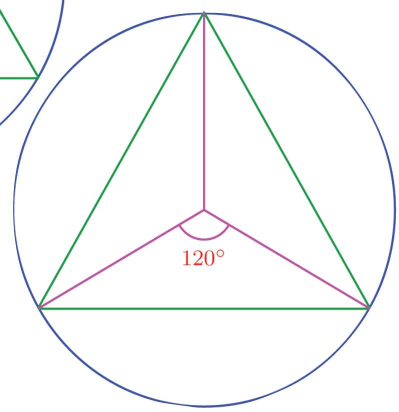
ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ ಭುಜವಾದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ರಚಿಸಬೇಕು. ಹಾಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಹೇಗಿರಬಹುದೆಂದು ನೋಡೋಣ. (ಅದಕ್ಕಾಗಿ GeoGebra ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. Regular polygon ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. Circle through three points ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದರ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ).

ಜ್ಯಾವೂ ದಾರವೂ

ಒಂದು ಬಿಲ್ಲಿನ ತುದಿಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಿರುವ ದಾರವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ 'ಜ್ಯಾ' ಎನ್ನುವರು. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ವೃತ್ತಭಾಗವನ್ನೂ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿದರೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಒಂದು ಬಿಲ್ಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಣುವುದಲ್ಲವೆ. ವೃತ್ತದ 'ಜ್ಯಾ' ಎಂಬುದು ಈ ಬಿಲ್ಲಿನ ದಾರದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಸಂಸ್ಕೃತದ ಜ್ಯಾ ಎಂಬ ಪದದಿಂದ 'ಜ್ಯಾ' ಎಂಬ ಕನ್ನಡ ಪದ ಉಂಟಾಗಿರುವುದು. ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ ಎಂಬ ಸಂಸ್ಕೃತ ಪದ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿತ್ತು. ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ Chord ಎಂಬ ಪದ, ಲ್ಯಾಟೀನ್ ಭಾಷೆಯ Chorda ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಉಂಟಾಯಿತು. ಹಗ್ಗ ಎಂಬುದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ದಾರವನ್ನು ಈಗ ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ Cord ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

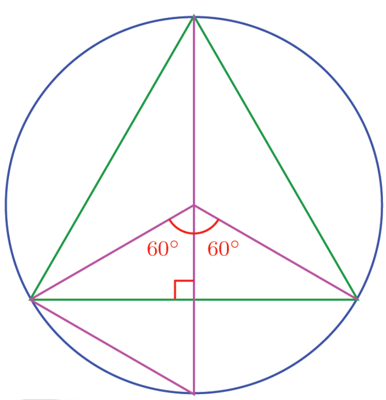


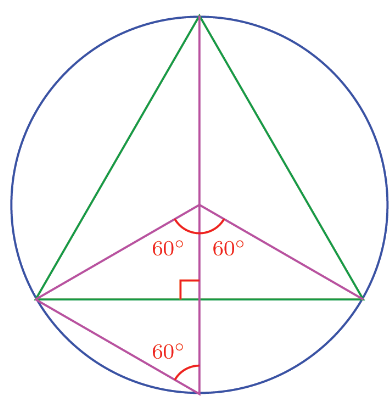




ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶಿರಗಳನ್ನು, ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಮೂರೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ (ಕಾರಣ?). ಆದುದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ 120° ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.





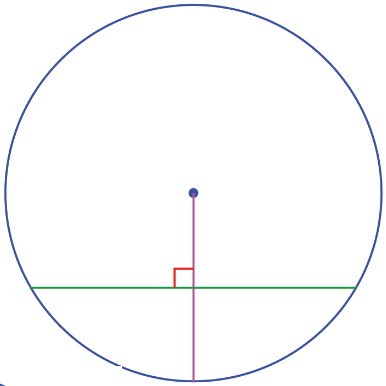
ಎಡಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಅನಂತರ ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಕೋನಗಳು 60° ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದುದು ಹೇಗೆಂದು ಯೋಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಯಾವುದೇ ಚಿತ್ರವಾದರೂ ಈ ಸಣ್ಣ (ಪಿಂಕ್) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ದೊಡ್ಡ (ಹಸಿರು) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಈ ಭುಜವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಬೇಕು.

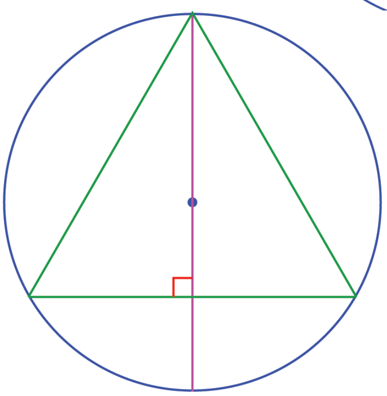
ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜವು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು.

ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾವು, ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆ?

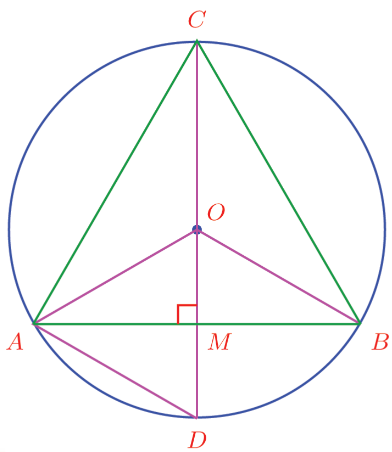
ರಚಿಸಿ ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಇನ್ನು ಈ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ವ್ಯಾಸವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ, ಅದರ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿರಿ.

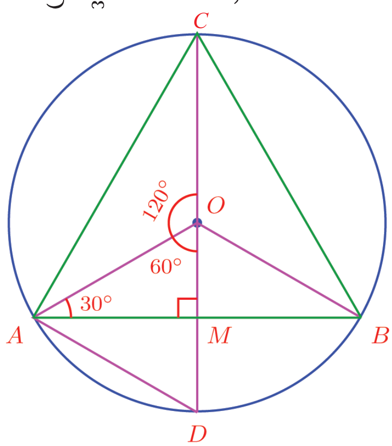


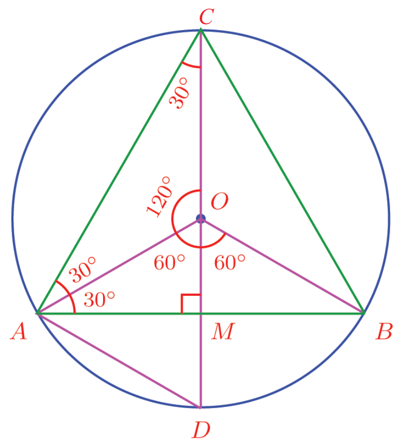
ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.



ABC ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು AB, AC ಎಂಬ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವುಳ್ಳವುಗಳೆಂದೂ, ಇವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನ CAB ಯ ಅಳತೆ 60^0 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

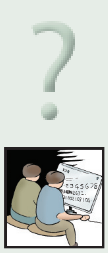
ಮೊದಲು OAD ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. OA, OD ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. A ಎಂಬ ಬಿಂದುವು OD ಎಂಬ ಗೆರೆಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ OA, DA ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆಗ OAD ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನನುಸರಿಸಿ ಕೆಲವು ಕೋನಗಳನ್ನು ,ಕೆಳಗೆ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು, ಮುಂದುವರಿದು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರವಂತೆಯೂ,



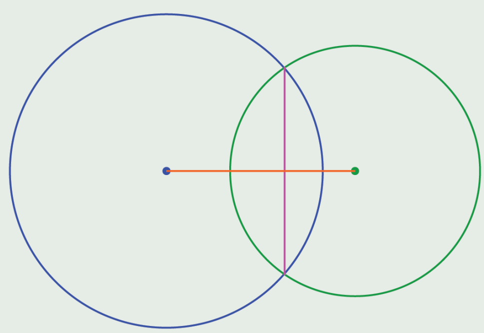


ಹಾಗೆ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ A ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು 60^o ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

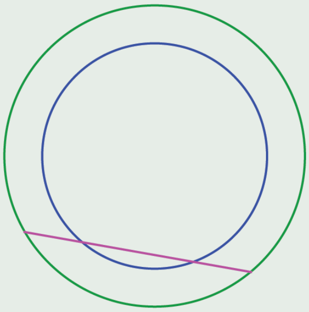
AB ಹಾಗೂ AC ಸಮಾನವೆಂದು ನೋಡಲು OAB, OAC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಎರಡರಲ್ಲೂ ಒಂದು ಭುಜ OA ಆಗಿದೆ. OB, OC ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. OAB ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ OA, OB ಇವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವೂ, OAC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ OA, OC ಇವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವು 120^o ಆಗಿದೆ. ಆಗ AB, AC ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಹಾಗೆ ಒಂದು ಕೋನ 60^o ಆಗಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ ABC; ಅಂದರೆ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ. ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಸುಲಭ ವಿಧಾನವಾಯಿತಲ್ಲವೇ?



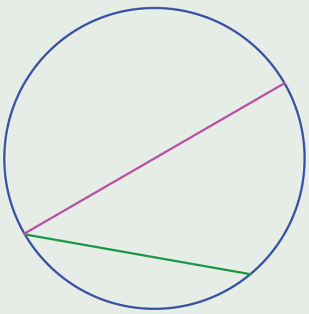
(1) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಅವುಗಳು ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

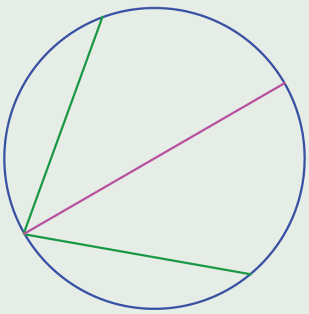


(2) ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ, ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೂ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ರೇಖೆಯು ಇಬ್ಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಭಾಗಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



(3) ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನೂ ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನೂ ರಚಿಸಿರಿ. ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದೇ ಬಾಗುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನೂ ರಚಿಸಿರಿ.

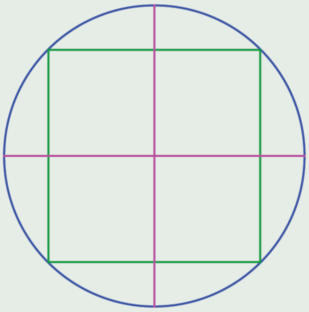


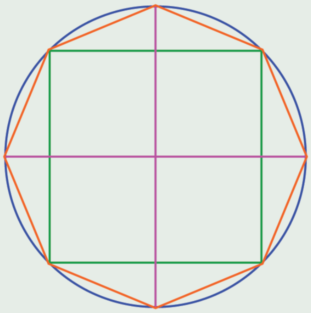


ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸವು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನೂ, ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನೂ ರಚಿಸಿರಿ. ಚೌಕದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ, ಚೌಕದ ಶಿರಗಳನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



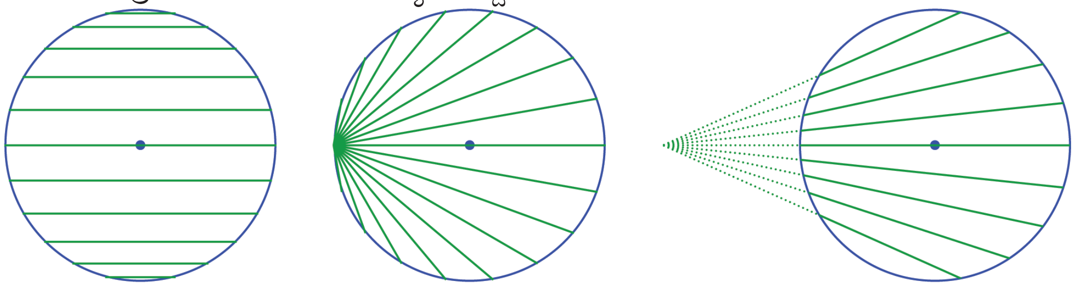


ಇದೊಂದು ಸಮಅಷ್ಟಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳು

ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ ವ್ಯಾಸಗಳು, ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ವ್ಯಾಸಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

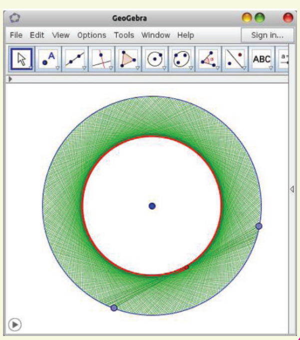
ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ದೂರ ಸರಿದಂತೆ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.



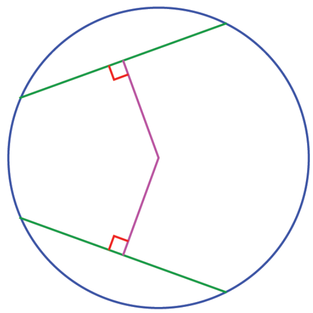
ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿದರೂ, ತಿರುಗಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿದರೂ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಬರುವುದಿಲ್ಲವೇ?

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ Trace ನೀಡಿರಿ. ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಿಗೆ Animation ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ. ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸಂಚಾರ ಪಥ ಯಾವುದು? ಯಾಕಾಗಿ ಹೀಗೆ?

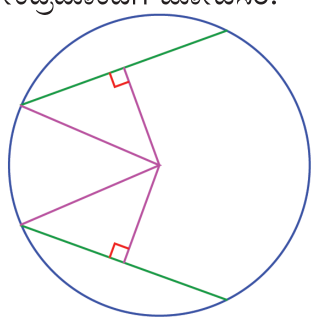
ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ Trace ನೀಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಕೊಟ್ಟು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮನೋಹರಗೊಳಿಸಬಹುದು.



ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಲಂಬ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ. ಇವೆರಡರ ಉದ್ದ ಸಮಾನವೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ.



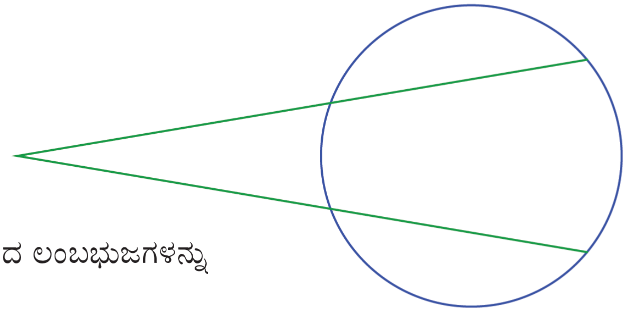
ಈಗ ಲಭಿಸಿದ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣಗಳು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಎರಡು ಲಂಬ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆಗ ಪೈಥಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ, ಮೂರನೇ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗುವುದು.

ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬವು, ತುಂಡರಿಸಿ ಭಾಗಗಳಾದುದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಭುಜಗಳು ಜ್ಯಾಗಳ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಜ್ಯಾಗಳ ಅರ್ಧಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಿಗುವುದು.

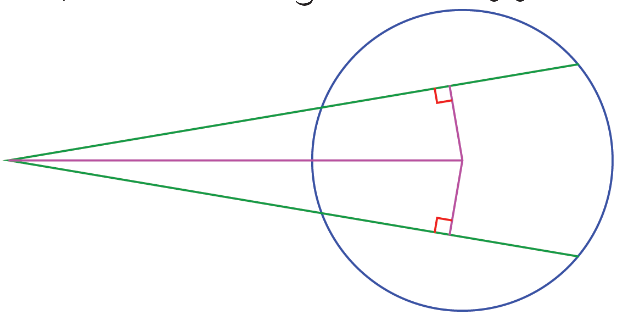
ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವುಳ್ಳವುಗಳಾಗಿವೆ.

ಬದಲಾಗಿ, ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ದೂರಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದೇ? ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

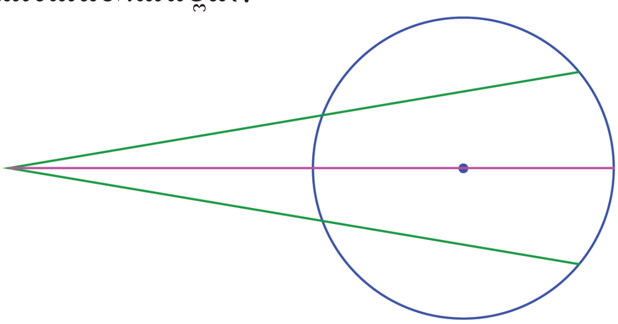
ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಿಸುವುದು.



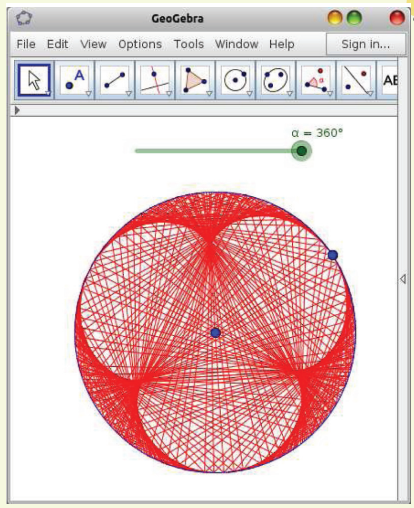
ಈ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಲಂಬಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುವು.



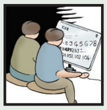
ಎರಡೂ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ದೂರವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಆಗ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಇವುಗಳ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು, ಮುಂದುವರಿಸಿದ ಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ. ಈ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದುದಲ್ಲವೇ?



ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸವು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೇ. ಸಂಧಿಸುವುದು ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಾದರೆ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಈಗ ನೋಡಿದೆವು.



ಈ ರೀತಿಯ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ. A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ B ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಒಂದು Angle slider α ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. Angle with given size ಉಪಯೋಗಿಸಿ B, A ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ α ದಲ್ಲಿ B' ಸಿಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ $\angle B'AB'' = \alpha$ ಎಂದು ನೀಡಿರಿ. ಹೊಸ ಒಂದು ಬಿಂದು ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು B'' ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. B', B'' ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಜ್ಯಾ ರಚಿಸಿ Trace ನೀಡಿರಿ. ಸ್ಲೈಡರಿಗೆ Animation ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ. $\angle B'AB'' = \alpha$ ಎಂಬುದರ ಬದಲು 2α, 3α, 4α, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವು 3α ಎಂದು ಕೊಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ.

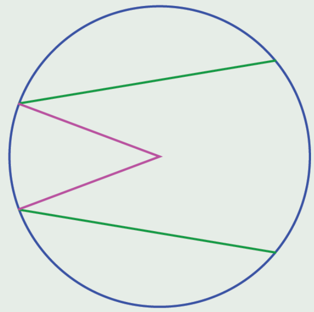


(1) ವೃತ್ತದ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳೆಲ್ಲಾ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸವು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು. ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

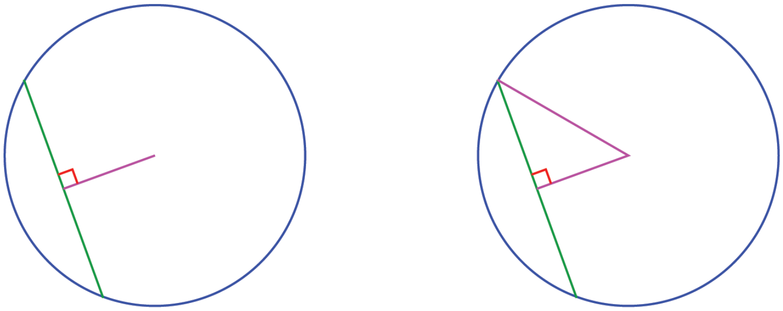
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದ

ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದು ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ದೂರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ? ಅದರ ಗಣಿತವೇನೆಂದು ನೋಡುವ.



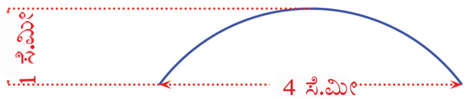
ಮೇಲಿರುವ ಎಡಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ; ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ, ಒಂದು ಲಂಬಭುಜವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬವೂ, ಮೂರನೇ ಭುಜವು ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧವೂ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಪೈಥಗೋರಸ್ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

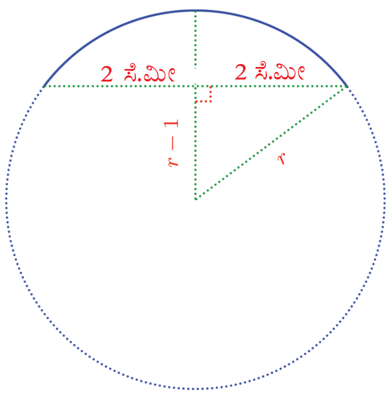
ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವು ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರದ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದ (ಲಂಬವಾಗಿ) 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವು $4^2 - 3^2 = 7$; ಆಗ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು $2\sqrt{7}$ ಸೆ.ಮೀ.

ಇನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಒಂದು ಬಳೆ ತುಂಡಿನ ತುದಿಗಳೊಳಗಿರುವ ಅಂತರ 4 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್, ಉನ್ನತಿ 1 ಸೆಂಟಿ ಮಿಟರ್ ಆಗಿದೆ.



ಇಡೀ ಬಳೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಕೆಳಗೆ ರಚಿಸಿರುವಂತೆ ಇಡೀ ಬಳೆಯನ್ನು ಊಹಿಸುವ



ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$r^2 - (r-1)^2 = 4$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಲಘೂಕರಿಸಿದಾಗ $2r - 1 = 4$ ಎಂದೂ , ಅದರಿಂದ $r = 2\frac{1}{2}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು; ಅಂದರೆ ಬಳೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆ.ಮೀ.

ತಾವರೆ ಲೆಕ್ಕ

ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ 'ಲೀಲಾವತಿ' ಎಂಬ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದ ಕುರಿತು ಕೇಳಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ? ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಶ್ಲೋಕದ ಭಾಷಾಂತರ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

"ಚಕ್ರವಾಕ ಪಕ್ಷಿಗಳೂ, ಕ್ರೌಂಚ ಪಕ್ಷಿಗಳೂ ಆಟವಾಡುತ್ತಿರುವಂತಹ ಒಂದು ತಟಾಕದಲ್ಲಿ ಅಂಗೈಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಾವರೆಯ ಮೊಗ್ಗು ಎದ್ದು ನಿಂತಿದೆ. ಗಾಳಿಗೆ ಮೆಲ್ಲಗೆ ಬಾಗಿ ಅದು ಅಂಗೈಯ ಇಮ್ಮಡಿ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿತು. ಗಣಕಾ ಬೇಗನೆ ಹೇಳು ತಟಾಕದ ಆಳವೆಷ್ಟು?"

ಚಕ್ರ ಕ್ರೌಂಚಾಕುಲಿತ ಸಲೀಲೇ

ಕ್ವಾಪಿಧೇಷ್ಟಂ ತಟಾಕೇ

ತೋಯಾ ಮೂರ್ಧ್ವಂ ಕಮಲಾ ಕಲಿಕಾಗ್ರಂ

ವಿತಸ್ತಿ ಪ್ರಮಾಣಂ

ಮಂದಂ ಮಂದಂ ಚಲಿತ ಮನಿಲೇನಾಹತಂ

ಹಸ್ತಯುಗ್ಮಂ

ತಸ್ಮಿತ್‌ಮಗ್ನಂ ಗಣಕ, ಕಥಯ

ಕ್ಷಿಪ್ರಮಂಭ : ಪ್ರಮಾಣಂ

?

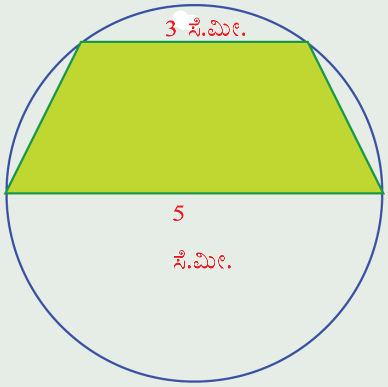
(1) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

(2) 2. 5 ಸೆ.ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ 6ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು? ಇದೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ಒಂದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

(3) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 4 ಸೆ. ಮೀ, 6 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದವಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ 5 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ ಮೇಲಿನ ಭುಜವು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾವಾಗಿದೆ.

ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



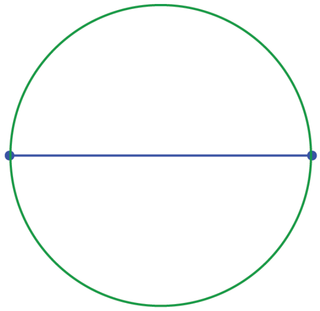
ಬಿಂದುಗಳೂ ವೃತ್ತಗಳೂ

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ಕುರಿತು ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗೆ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ತಿರುಗಿ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿಸೋಣ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

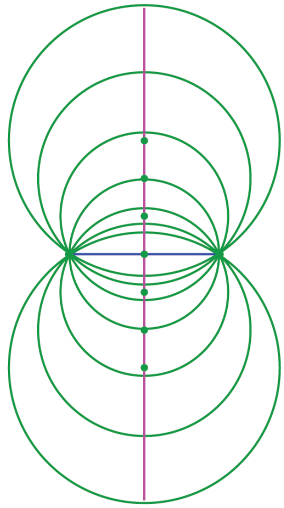
ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ?

ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು, ಇವುಗಳು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರುವಂತೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ. ಹಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಅದರ ಜ್ಯಾವಾಗಿರುವುದು. ಆಗ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ಈ ರೇಖೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದು.

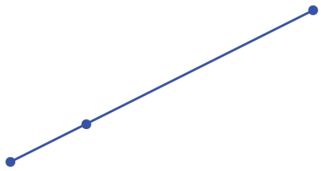
ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ಮೊದಲ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ?



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ರೇಖೆಯ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ Animation ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ. Trace ನ್ನು ಕೊಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಆಗ ಹೊಸತೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ; ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆ?

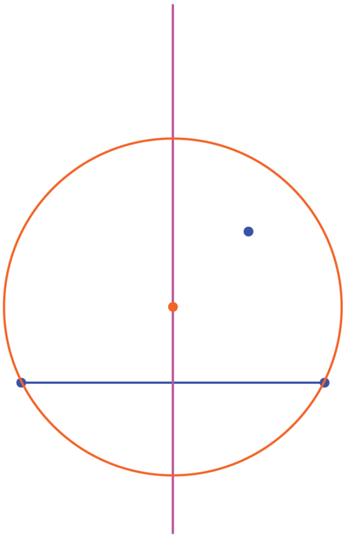
ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಾದರೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.



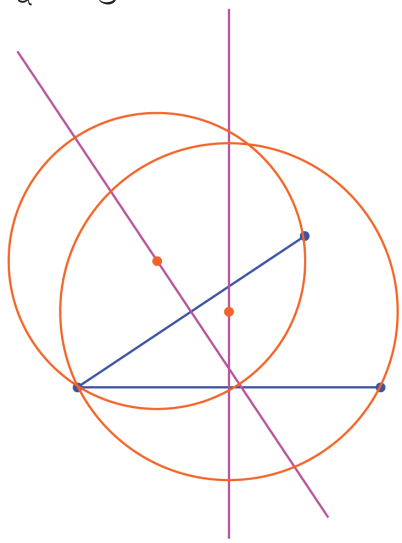
ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ?

ರಚಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ ಮೊದಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಯೋಚಿಸುವ.

ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಇದರಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಜೋಡಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಹಾಗೆ ಎರಡು ಜೋಡಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಆದರೆ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾದುದು, ಮೂರೂ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವಲ್ಲವೇ?

ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತ ಸಿಗಲು, ಕೇಂದ್ರವು ಮೊದಲ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಎರಡನೇ ಜೋಡಿಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತ ಸಿಗಲು, ಕೇಂದ್ರವು ಎರಡನೇ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿಯೂ ಇರಬೇಕು.

ರೇಖೆಯೂ ವೃತ್ತವೂ

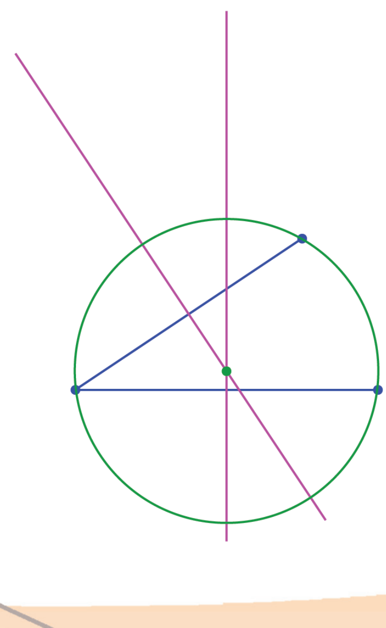
ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಹಲವು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು, ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ.

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲವೇ? ಆದರೆ ಹಲವಾರು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

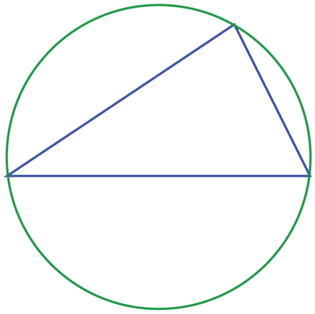
ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆ ರೇಖೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ವೃತ್ತ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ರೇಖೆ ರಚಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ವೃತ್ತ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ರೇಖೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ವೃತ್ತವನ್ನು?

ಎರಡು ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ? ಅಂದರೆ, ಅವುಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು?



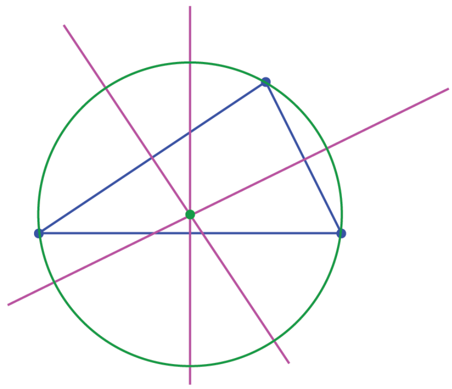
ಉಳಿದಿರುವ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುವುದು. ವೃತ್ತ ಅದರ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು.



ಹೀಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ (circumcircle) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Circle through 3 points ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಒಂದು Angle Slider α ವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ α ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. Midpoint or Centre ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಪರಿವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿರುವುದು ಯಾವಾಗ? ಹೊರಗೋ? ಇದು ಯಾವಾಗಲಾದರೂ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದೇ?

ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜ ಹಾಗೂ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ. ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಭುಜವು ಪರಿವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವಾಗುವುದರಿಂದ ಅದರ ಸಮಭಾಜಕವು ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು.



ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುತ್ತವೆ.

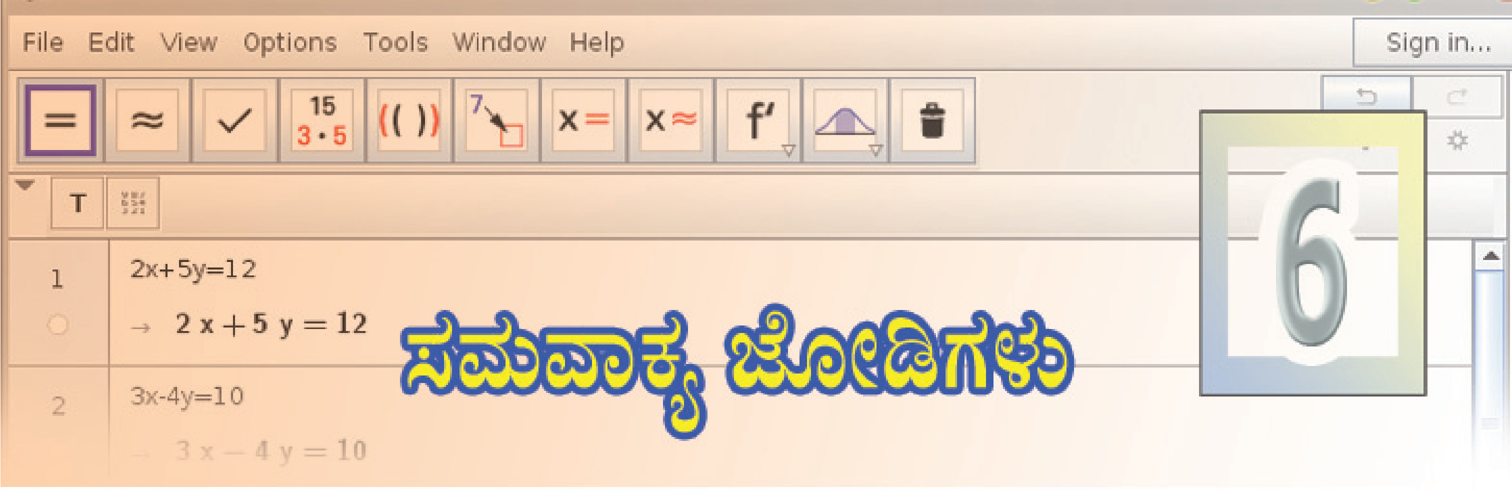
(1) ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 4 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವನ್ನು 60^o, 90^o, 120^o ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕೊನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಪರಿವೃತ್ತದ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.)

(2) ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ 8 ಸೆ.ಮೀ. ಹಾಗೂ ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ
• ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು.			
• ವೃತ್ತ ಭಾಗದಿಂದ ಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವುಗಳು ಸೇರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಾಸಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಇರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದವೂ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಅಂತರವೂ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			



6 ಸಮವಾಕ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು

ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

> ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳೂ, ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳು ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 100 ಮಣಿಗಳಿವೆ. ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 10 ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ, ಕಪ್ಪು ಎಷ್ಟು? ಬಿಳಿ ಎಷ್ಟು?

ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ 10 ಮಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿರಿಸಿದರೆ, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 90 ಮಣಿಗಳಾಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳೂ ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಎಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು 45 ಇನ್ನು ತೆಗೆದಿರಿಸಿದ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 55 ಆಗುವುದು; ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳು 45.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ) ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $x - 10$; ಒಟ್ಟು 100 ಮಣಿಗಳಿರುವುದರಿಂದ,

$$x + (x - 10) = 100$$

ಇದರಿಂದ x ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದರೆ,

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 100 \\ 2x &= 110 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

ಹಾಗೆ, ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು 55 ಎಂದೂ, 10 ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳು 45 ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ ; ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದೂ, ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x + y = 100$$

$$x - y = 10$$

ಇದರಿಂದ x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ ಸಿಗುವುದೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (**ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದ **ಮೊತ್ತವೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಮೊತ್ತದಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ ಸಿಗುವುದೆಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಆಗ ಮಣಿಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ,

$$2x = (x + y) + (x - y) = 110$$

$$2y = (x + y) - (x - y) = 90$$

ಇದರಿಂದ $x = 55, y = 45$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ.

ಒಂದು ಮೇಜಿಗೂ ಕುರ್ಚಿಗೂ ಸೇರಿ 5000 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆ. ಒಂದು ಮೇಜಿಗೂ ನಾಲ್ಕು ಕುರ್ಚಿಗೂ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 8000 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಬಾಯಿ ಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡುವ. ಒಂದು ಮೇಜು ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕು ಕುರ್ಚಿಗಳು ಸೇರಿದರೆ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ 3000 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಳವಾಯಿತು. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಮೂರು ಕುರ್ಚಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಖರೀದಿಸಿರುವುದರಿಂದಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಕುರ್ಚಿಗಳ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಬಂದ 3000 ರೂಪಾಯಿ, ಆಗ ಒಂದು ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ 1000 ರೂಪಾಯಿ, ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆ 4000 ರೂಪಾಯಿ.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸದೆ ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ x ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ; ಇನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆ $5000 - x$ ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಒಂದು ಮೇಜು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಕುರ್ಚಿಗಳಾದರೆ $(5000 - x) + 4x$ ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು. ಇದು 8000 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಅಂದರೆ

$$(5000 - x) + 4x = 8000$$

ಇದರಿಂದ x ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$5000 + 3x = 8000$$

$$3x = 3000$$

$$x = 1000$$

ಹಾಗೆ ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ 1000 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದೂ ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆ $5000 - 1000 = 4000$ ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಏನನ್ನೂ ಯೋಚಿಸದೆ, ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ x ರೂಪಾಯಿ ಎಂದೂ ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆ y ರೂಪಾಯಿ ಎಂದೂ ತೆಗೆದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ. ಆಗ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

$$x + y = 5000$$

$$4x + y = 8000$$

ಇನ್ನು, ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನನುಸರಿಸಿ, y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$y = 5000 - x$$

ಆಗ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿರುವ y ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $5000 - x$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ

$$4x + (5000 - x) = 8000$$

ಇದು ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ x ಎಂದು ತೆಗೆದಾಗ ಸಿಕ್ಕಿದ ಹಳೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವೇ ಅಲ್ಲವೇ? ಇದರಿಂದ ಮೊದಲಿನಂತೆ ಎರಡೂ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ:

> ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{2}$ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಛೇದದೊಂದಿಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿ ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{3}$ ಆಯಿತು. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಯಾವುದು?

ಇದನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಕಷ್ಟ: ಅಂಶವನ್ನು ಅಥವಾ ಛೇದವನ್ನು x ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಹೆಚ್ಚೇನೂ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೋಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅಂಶ x ಎಂದೂ ಛೇದ y ಎಂದೂ ತೆಗೆದು ಪ್ರಾರಂಬಿಸುವ. ಆಗ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿಸುವ.

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

ಅಡ್ಡ ಗುಣಕಾರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹದು (**ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ)

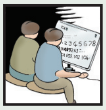
$$2\,(x + 1) = y$$

$$3x = y + 1$$

ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯವೆಂಬುದು y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ $2\,(x+1)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿರುವ y ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $2\,(x + 1)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$3x = 2\,(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

ಇದರಿಂದ $x = 3$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮುಂದುವರಿದು ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ $y = 2 \times 4 = 8$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ $\frac{3}{8}$ ಎಂಬುದು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದೆ.



ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿಯೋ, ಒಂದೇ ಬೀಜಗಣಿತಾಕ್ಷರವಿರುವ ಒಂದು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿಯೋ, ಎರಡು ಬೀಜಗಣಿತಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿಯೋ ಮಾಡಿರಿ.

(1) ಸುತ್ತಳತೆ 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 5 ಸೆ.ಮೀ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಕ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 4 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. 8 ಹುಡುಗರು ಮಾತ್ರ ಗೈರು ಹಾಜರಾದ ಒಂದು ದಿನ, ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಕ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(3) ಒಬ್ಬನು 10000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಎರಡು ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದನು. ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು 8 ಶೇಕಡ ಮತ್ತು 9 ಶೇಕಡವೂ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಎರಡೂ ಯೋಜನೆಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟಾಗಿ 875 ರೂಪಾಯಿ ಬಡ್ಡಿ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

(4) ಮೂರೂವರೆ ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಎರಡು ತುಂಡು ಮಾಡಿ ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಚೌಕವಾಗಿಯೂ, ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿಯೂ ಮಾಡಬೇಕು. ಚೌಕ ಹಾಗೂ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವುಳ್ಳವುಗಳಾಗಿರಬೇಕು. ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ತುಂಡರಿಸಬೇಕು?

(5) ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ u ಮೀಟರ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಬಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ a ಮೀಟರ್/ ಸೆಕೆಂಡಿನ ಪ್ರಕಾರ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತು t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರವು $ut + \frac{1}{2}at^2$ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತು 2 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 10 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 28 ಮೀಟರ್ ಸಂಚರಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಯಾಣದ ಪ್ರಾರಂಭದ ವೇಗ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ? ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ವೇಗದ ದರವೆಷ್ಟು?

ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

> 2 ಪೆನ್ನುಗಳು ಹಾಗೂ 3 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು 40 ರೂಪಾಯಿ. 2 ಪೆನ್ನುಗಳು ಹಾಗೂ 5 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳಿಗೆ 60 ರೂಪಾಯಿಯಾದರೆ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಕುರ್ಚಿ, ಮೇಜಿನ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ 40 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ ಬೆಲೆಯು 60 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾದುದು ಹೇಗೆ?

2 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಖರೀದಿಸಿದುದರಿಂದಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ, 2 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಬಂದ 20 ರೂಪಾಯಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆಯು 10 ರೂಪಾಯಿ.

ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ 2 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ಸಿಗಲು 40 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ 3 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೆ? ಅಂದರೆ, $40 - 30 = 10$ ರೂಪಾಯಿ. ಆಗ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 5 ರೂಪಾಯಿ.

ಇನ್ನು, ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ x ರೂಪಾಯಿ, ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ y ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತೆಗೆದು, ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದುದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ: ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದೆಂದು ನೋಡುವ.

2 ಪೆನ್ನು ಹಾಗೂ 3 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ 40 ರೂಪಾಯಿ	$2x + 3y = 40$
2 ಪೆನ್ನು ಹಾಗೂ 5 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ 60 ರೂಪಾಯಿ	$2x + 5y = 60$
ಹೆಚ್ಚಾದುದು 2 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
ಹೆಚ್ಚಾದುದು 20 ರೂಪಾಯಿ	$60 - 40 = 20$
2 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ 20 ರೂಪಾಯಿ	$2y = 20$
ಒಂದು ನೋಟುಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ 10 ರೂಪಾಯಿ	$y = 10$
2 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ, 40 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ 30 ರೂಪಾಯಿ ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.	$2x = 40 - (3 \times 10) = 10$
1 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 10 ರೂಪಾಯಿ	$x = 10$

ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

> 3 ಪೆನ್ಸಿಲಿಗೂ 4 ಪೆನ್ನಿಗೂ ಒಟ್ಟು 26 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆ. 6 ಪೆನ್ಸಿಲಿಗೂ 3 ಪೆನ್ನಿಗೂ 27 ರೂಪಾಯಿಯಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿಗೂ ಪೆನ್ನಿಗೂ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಲು ಕಾರಣ, ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಹಾಗೆ, ಒಂದು ವಸ್ತು ಮಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಾದುದರಿಂದಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಅದರಂತೆ ಅಷ್ಟು ಸುಲಭದ ವಿಚಾರವಲ್ಲ.

ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಅಥವಾ ಪೆನ್ನಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೋ?

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆದಿಡುವ.

ಪೆನ್ಸಿಲ್	ಪೆನ್ನು	ಬೆಲೆ
3	4	26
6	3	27

ಮೊದಲ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ 3 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳು, ಎರಡನೇ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ 6 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳು ಇವೆ. ಮೊದಲ ಹೇಳಕೆಯಲ್ಲೂ 6 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

6 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳೂ, 8 ಪೆನ್ನುಗಳೂ ಆದರೋ?

	ಪೆನ್ಸಿಲ್	ಪೆನ್ನು	ಬೆಲೆ
	3	4	26
$\times 2$	6	3	27
	6	8	52

ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಬೆಲೆಗಿಂತ 25 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಾದ್ದದು 5 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲವೇ?

ಆದುದರಿಂದ, ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 5 ರೂಪಾಯಿ. ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಿಂದ , 3 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳ ಬೆಲೆ $26 - 20 = 6$ ರೂಪಾಯಿ, ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ 2 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಈ ವಿಚಾರಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ x ಎಂದೂ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನೂ, ಅದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನೂ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

3 ಪೆನ್ಸಿಲು ಹಾಗೂ 4 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ 26 ರೂಪಾಯಿ	$3x + 4y = 26$
6 ಪೆನ್ಸಿಲು ಹಾಗೂ 3 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ 27 ರೂಪಾಯಿ	$6x + 3y = 27$
6 ಪೆನ್ಸಿಲು ಹಾಗೂ 8 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ 52 ರೂಪಾಯಿ	$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 52$
ಹೆಚ್ಚಾದುದು 5 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ	$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$
ಹೆಚ್ಚಾದುದು 25 ರೂಪಾಯಿ	$5y = 25$
ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 5 ರೂಪಾಯಿ	$y = 5$
ಮೂರು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯು 26 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ 20 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.	$3x = 26 - (4 \times 5) = 6$
ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ, 2 ರೂಪಾಯಿ	$x = 2$

ಈ ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ. ಮೊದಲು ಪ್ರಶ್ನೆಯಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ. ಅವುಗಳನ್ನು 1ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವೆಂದೂ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವೆಂದೂ ಬರೆಯೋಣ.

$$3x + 4y = 26 \qquad (1)$$

$$6x + 3y = 27 \qquad (2)$$

$3x + 4y$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 26 ಆಗಿದೆಯೆಂದು 1ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯ ಹೇಳುತ್ತದೆ; ಆಗ ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ 52.

$$6x + 8y = 52 \qquad (3)$$

ಇನ್ನು (2)ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯ ಮತ್ತು (3)ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 52 - 27$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ

$$5y = 25$$

ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ $y = 5$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಮುಂದುವರಿದು 1ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ y ಯನ್ನು 5 ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$3x + (4 \times 5) = 26$$

$$3x = 26 - 20 = 6$$

$$x = 2$$

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 5 ಬಾರಿಯೂ, ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾರಿಯೂ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ ಅಳೆದರೆ 20 ಲೀಟರಾಗುತ್ತದೆ. ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾರಿ, ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಾರಿ ತುಂಬಿಸಿ ಅಳೆದರೆ 19 ಲೀಟರಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ?

ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯ ಹಿಡಿವು x ಲೀಟರ್ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯ ಹಿಡಿವು y ಲೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವ.

$$5x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಇಲ್ಲಿರುವ (1)ರಲ್ಲಿಯೂ $2x$ ಬರುವಂತೆ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾದರೆ $\frac{2}{5}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು; ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿ $5x$ ಬರುವಂತೆ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾದರೆ $\frac{5}{2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ವಿಭಿನ್ನ ಮಾಹಿತಿಗಳು

ರಾಮು 7 ರೂಪಾಯಿ ನೀಡಿ ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲನ್ನೂ, ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನೂ ಖರೀದಿಸಿನು. ಅಜು 4 ಪೆನ್ಸಿಲನ್ನೂ 4 ಪೆನ್ನನ್ನೂ ಖರೀದಿಸಿನು. 28 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇವರು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರು. ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ $7 - x$ ಎಂದು ಮಾಡಿದರು.

ಎರಡನೇ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

ಎಂದು ಬರೆದರು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಸಿಕ್ಕಿದುದೋ? $28 = 28$!

ಇಲ್ಲಿ, ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ x, ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

ಎರಡನೇ ಸಲ ಬರೆದ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ

$$4(x + y) = 28$$

ಎಂದಾದರೆ ಪುನಃ

$$x + y = 7$$

ಎಂದಲ್ಲವೆ ಸಿಗುವುದು?

ಅಂದರೆ, ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿವೆಯಾದರೂ ಬೆಲೆಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ನಿಜವಾಗಿ ಹೇಳಿರುವುದು. ಅದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಲೆಕ್ಕವೂ ಕಾರ್ಯವೂ

10 ಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 5.5 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕು. ಆದರೆ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೆಷ್ಟು?

ಅಗಲ x ಎಂದಾದರೆ ಉದ್ದ $x + 5.5$ ಆಗಿರಬೇಕು. ಸುತ್ತಳತೆ 10 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x+(x+5.5)=\frac{10}{2}=5$$

ಆದುದರಿಂದ

$$2x+5.5=5$$

ಅಥವಾ

$$2x=-0.5$$
$$x=-0.25$$

ಇದು ಸರಿಯಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ? ಆಯತದ ಅಳತೆಗಳು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಇದರ ಅರ್ಥ ಈ ನಿಬಂಧನೆಗಳೆರಡೂ ಸರಿಯಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಅಗಲ x, ಉದ್ದ y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

$$x+y=5$$
$$y-x=5.5$$

ಇವೆರಡೂ ಸರಿಯಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೆಂದು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. (ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ)

ಹೀಗೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲದೆ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. (ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಯಾರಿಗೆ ತಾನೆ ಇಷ್ಟ?) (1) ರಲ್ಲಿಯೂ (2) ರಲ್ಲಿಯೂ $10x$ ಮಾಡೋಣ; ಅದಕ್ಕಾಗಿ (1) ನ್ನು 2ರಿಂದಲೂ, (2)ನ್ನು 5ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

$$(1)\times 2:\ 10x+4y=40 \qquad (3)$$

$$(2)\times 5:\ 10x+15y=95 \qquad (4)$$

ಇನ್ನು (4)ರಿಂದ (3)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$(4)-(3):\ 11y=55$$

ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ

$$y=5$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಮುಂದುವರಿದು, ಇದನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$5x+10=20$$

$$5x=10$$

$$x=2$$

ಹಾಗೆ ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 2 ಲೀಟರ್, ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 5 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

(1) ರಾಜು ಇನ್ನೂರು ಪೇಜಿನ 7 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ ನೂರು ಪೇಜಿನ 5 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಒಟ್ಟು 107 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಜೋಸೆಫ್ ಇನ್ನೂರು ಪೇಜಿನ 5 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ, ನೂರು ಪೇಜಿನ 7 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ ಖರೀದಿಸಿದಾಗ 97 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧದ ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 43 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯಿಂದ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 11 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(3) ಒಂದು ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 11 ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ, ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 27 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(4) ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಮೊದಲು ರಹೀಂನ ಪ್ರಾಯವು ರಾಮುವಿನ ಪ್ರಾಯದ ಮೂರುಮಡಿಯಾಗಿತ್ತು. ಎರಡು ವರ್ಷ ಕಳೆಯುವಾಗ ಇದು 2 ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯವೆಷ್ಟು?

(5) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 5 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು 3 ಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 5 ಚದರಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಉದ್ದವನ್ನು 3 ಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ಅಗಲವನ್ನು 2 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 50 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಆಯತದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇತರ ಕೆಲವು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಎರಡು ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದರ ಭುಜವು ಸಣ್ಣದರ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ ದೊಡ್ಡದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಸಣ್ಣದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕಿಂತ 55 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು y ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿಸಬಹುದು.

$$x - y = 5$$
$$x^2 - y^2 = 55$$

ಇನ್ನೇನು ಮಾಡಬೇಕು?

$x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಇದನ್ನು ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಚೌಕ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ,

$$x + y = \frac{55}{5} = 11$$

ಈಗ $x + y = 11$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತವೂ, $x - y = 5$ ಎಂಬ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಆಯಿತಲ್ಲವೇ? ಇನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

$$x = \frac{1}{2}\,(11 + 5) = 8$$
$$y = \frac{1}{2}\,(11 - 5) = 3$$

ಅಂದರೆ, ಚೌಕಗಳ ಭುಜಗಳು 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ: ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 10 ಮೀಟರ್, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $5\frac{1}{4}$ ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬದಿಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು x ಮೀಟರ್, y ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಸುತ್ತಳತೆ, $2(x+y)$ ಮೀಟರ್. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ xy ಚದರಮೀಟರ್. ಆಗ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿಸಬಹುದು.

$$x + y = 5$$

$$xy = 5\frac{1}{4}$$

ಇನ್ನು? ಇದರಿಂದ $x - y$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಇನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯೋಣ.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ

$$(x - y)^2 = 5^2 - 4 \times 5\frac{1}{4} = 25 - 21 = 4$$

ಹಾಗಾದರೆ $x - y = 2$ ಇನ್ನು, $x + y = 5$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ $x = 3\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{2}$ ಅಂದರೆ, ಚೌಕದ ಬದಿಗಳು, $3\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು $1\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿವೆ.

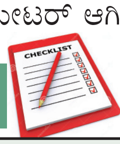
?

(1) 10 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಹಗ್ಗವನ್ನು ಎರಡು ತುಂಡುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತುಂಡಿನಿಂದಲೂ ಚೌಕಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಅವುಗಳ ಒಳಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $1\frac{1}{4}$ ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ಹೇಗೆ ತುಂಡರಿಸಬೇಕು?

(2) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 1 ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $3\frac{3}{4}$ ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ $6\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $7\frac{1}{2}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪುನರವಲೋಕನ

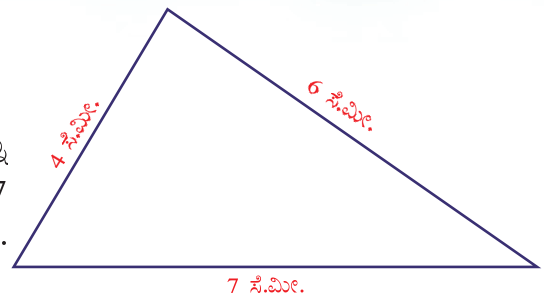


ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಎರಡು ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಎರಡು ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿಯೋ, ಒಂದು ಚರವಿರುವ ಒಂದು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿಯೋ, ಎರಡು ಚರಗಳಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿಯೋ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			

7

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯ

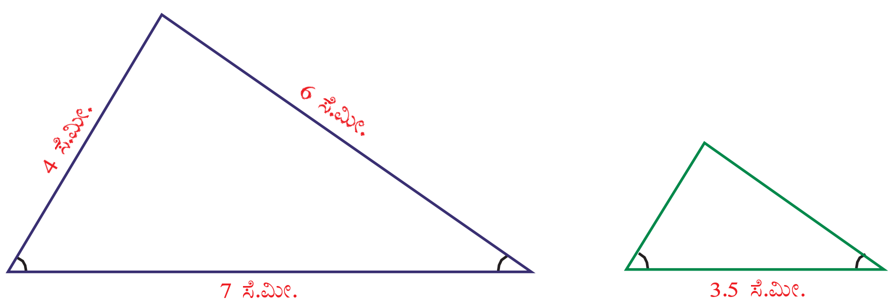
ಕೋನಗಳೂ ಭುಜಗಳೂ



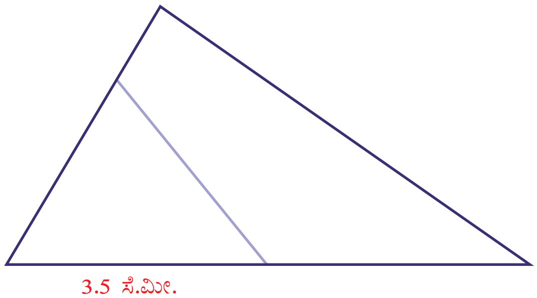
ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಭುಜಗಳು 4, 6, 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

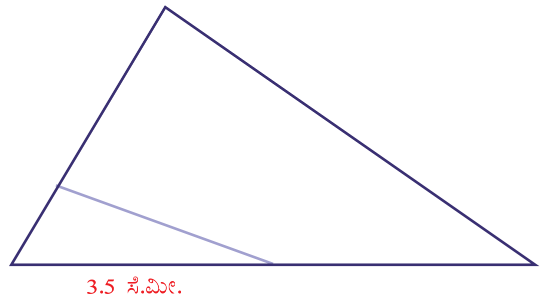
ಇನ್ನು ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಣ್ಣದಾಗಿ ರಚಿಸಬೇಕು. ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಸಾಕು. ಅಂದರೆ 3.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಒಂದು ವಿಚಾರ ಕೂಡಾ ಇದೆ. ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬಾರದು. ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು?

ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. 3.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



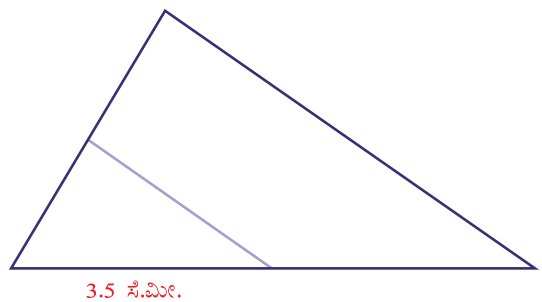
ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸುಲಭವಾಗಿ ರಚಿಸಲು ಏನಾದರೂ ದಾರಿ ಇದೆಯೇ? ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೇ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವನ್ನು ಅರ್ಧವಾಗಿಸಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಯಾವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೂ ಒಂದು ಭುಜ 3.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನವು ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನವೇ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಭಿಸುವುದು.





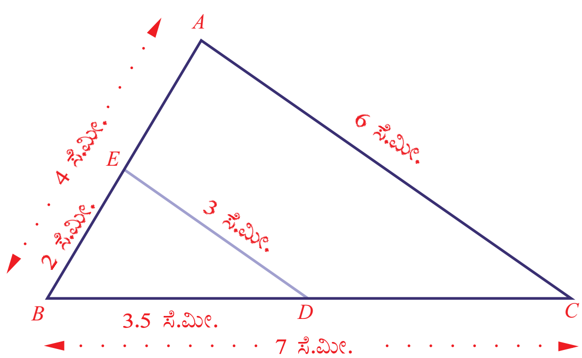
ಆದರೆ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ ಕೋನ ದೊಡ್ಡದೂ ಮೇಲಿನ ಕೋನ ಸಣ್ಣದೂ ಆಗಿಹೋಯಿತು. ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೇರ ವಿರುದ್ಧವೂ ಆಯಿತು. ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಲು ಇರುವ ದಾರಿ ಯಾವುದು?

ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ರಚಿಸಿದರೋ?



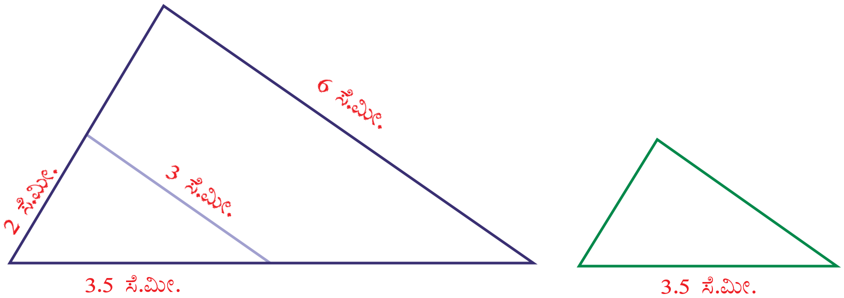
ಈಗ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಸರಿಯಾಯಿತಲ್ಲವೇ? (ಹೇಗೆ?)

ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿನ ಗೆರೆಯು, ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ರಚಿಸಿದುದಾಗಿದೆ; ಆದುದರಿಂದ ಈ ಗೆರೆಯು ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು; ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಇದರ ಉದ್ದವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು. (**ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ತ್ರಿಕೋನಭಾಗ**)

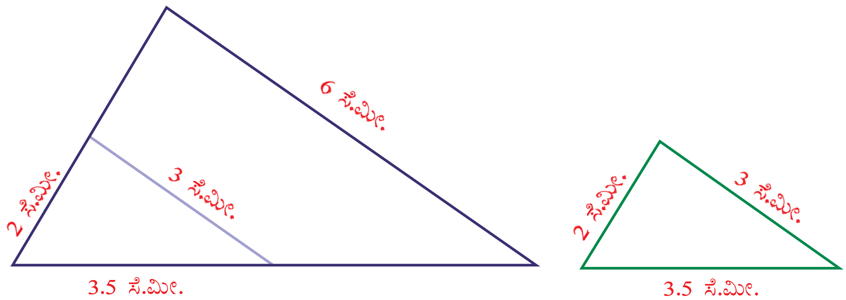


ಅಂದರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಅರ್ಧವಾಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ರಚಿಸಿದಾಗ ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಅರ್ಧವಾದುವು.

ಈ ಮೊದಲು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?



ಎಡಭಾಗದ ಚಿತ್ರದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳೂ ಸಮಾನ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿದೆ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ)



ಮೊದಲನೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಎಷ್ಟೇ ಆದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವನ್ನು ಅರ್ಧವಾಗಿಸಿದರೆ, ಇತರ ಭುಜಗಳೂ ಅರ್ಧವಾಗುವವು.

ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ.

- ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಬದಲು ಆ ಭುಜದ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಮಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?
- ಅತಿದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಬದಲು, ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜವನ್ನೋ, ಎಡೆಯ ಭುಜವನ್ನೋ ಬದಲಿಸಿದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

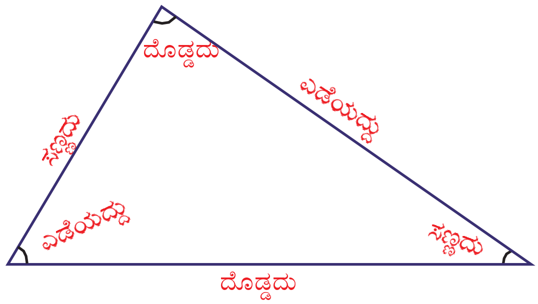
ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದಾಗಿಸುವ.

ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜಗಳೊಳಗೆ, ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳೊಳಗೆ ಮತ್ತು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜಗಳೊಳಗೆ ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಿರುವುದೇ?

ಇದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ ಹೇಳಲು, ಸಣ್ಣ, ಎಡೆಯ, ದೊಡ್ಡ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದರ ಬದಲಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಿದೆ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Min = 0 ಆಗಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ d ಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. Segment with Given Length ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಉದ್ದವು AB ಯ d ಮಡಿ ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು d AB ಎಂದೋ dc ಎಂದೋ ಕೊಟ್ಟರೆ ಸಾಕು. ಇನ್ನು $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನ DEF ರಚಿಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ Angle with Given Size ಉಪಯೋಗಿಸಿ E, D ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿ α ವನ್ನು ($\angle A$ ಯ ಅಳತೆ) ನೀಡಿರಿ. ಇದರಂತೆ D, E ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ β ಎಂದು clock-wise ಆಗಿ ನೀಡಿರಿ. DE′, ED′ ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು F ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆಯೇ? ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿ α ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

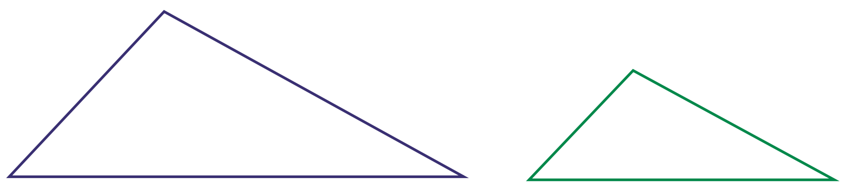
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಅವುಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ?



ಆಗ ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಹೀಗಾಗುವುದು.

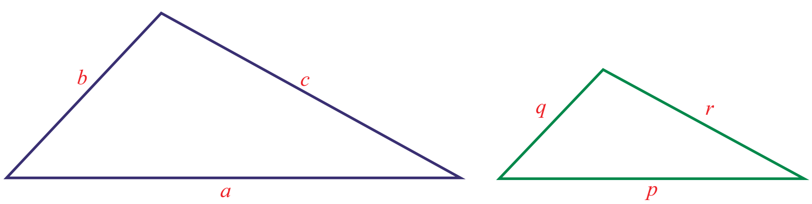
ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಸಮಾನವಾದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆಯೇ?

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ.

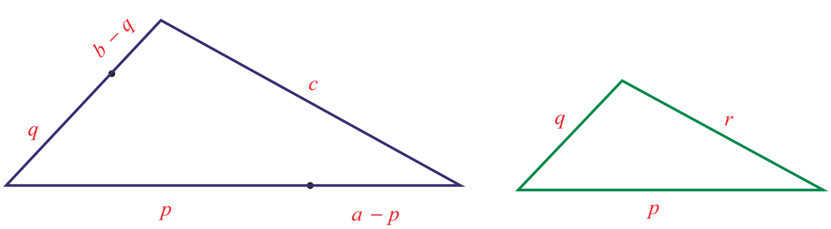


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎಡಭಾಗದ ಕೋನಗಳಿಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಕೋನಗಳಿಗೂ ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಅಳತೆಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಗಳೊಳಗೂ, ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳೊಳಗೂ, ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳೊಳಗೂ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿರುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಬೇಕು.

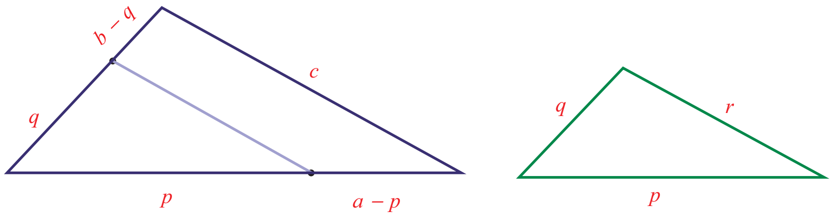
ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು a, b, c ಎಂದೂ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು p, q, r ಎಂದೂ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.



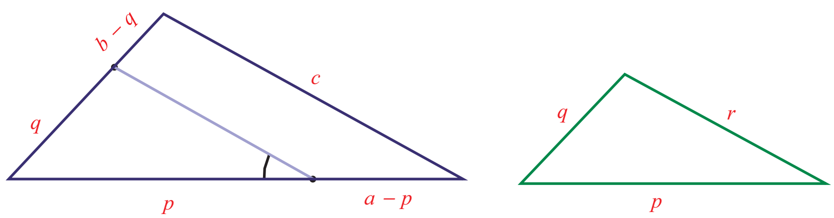
ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿ ನೋಡುವ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಗುರುತಿಸುವ.



ಈ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೋ?



ಈಗ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗೂ ಹೊರಗೂ ಇರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಗಳೂ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇವುಗಳ ಇತರ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ) ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿದಂತೆ ಹೊರಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೇ ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.



ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವೂ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿರುವ ಗೆರೆಯೂ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಒಳಗಿನ ಗೆರೆಯು ಇತರ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$\frac{a-p}{p} = \frac{b-q}{q}$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ

$$\frac{a}{p} - 1 = \frac{b}{q} - 1$$

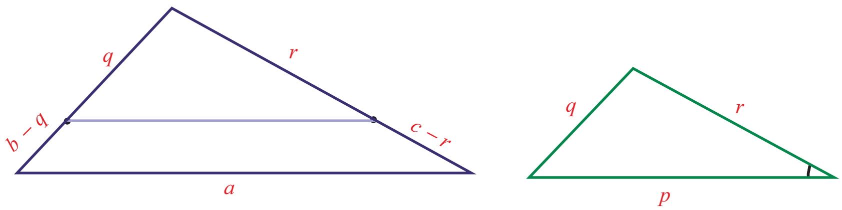
ಎಂದೂ, ಮುಂದುವರಿದು

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$$

ಇದರಂತೆ ಹೊರಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಭಾಗಗಳ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿದರೆ

$$\frac{b-q}{q} = \frac{c-r}{r}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.



ಇದರಿಂದ

$$\frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಈಗ ಕಂಡುಕೊಂಡ ಎರಡು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

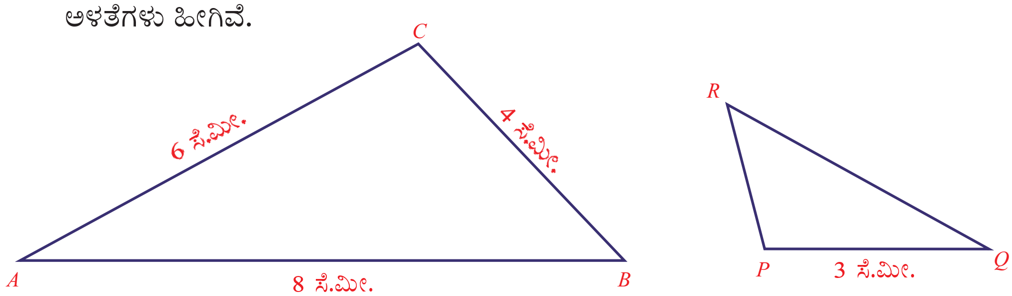
ಇದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತಾಗಿಯೋ, ಭುಜಗಳ ಕುರಿತಾಗಿಯೋ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಏನನ್ನೂ ಹೇಳದಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿಗಿರುವ ಭುಜಗಳ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜವು ಮತ್ತೊಂದರ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಎಷ್ಟು ಮಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೋ, ಅಷ್ಟೇ ಮಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳೂ, ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಭುಜಗಳೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ಈ ಮಡಿಯನ್ನು ಅಥವಾ ಭಾಗವನ್ನು ಬದಲಾವಣೆಯ ಪ್ರಮಾಣ (scale) ಎನ್ನುವರು. ಆಗ

ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವುದು.

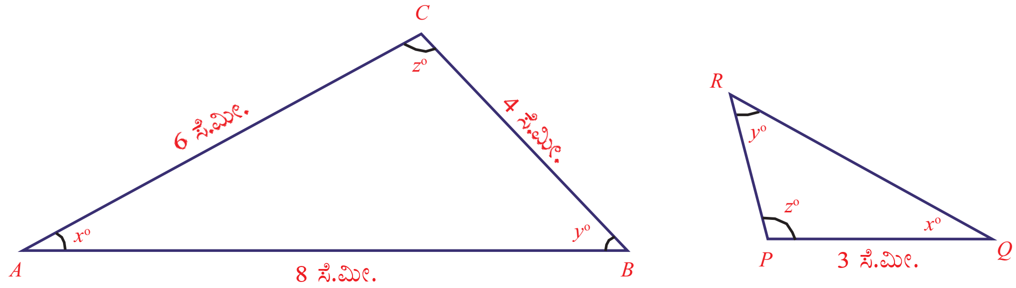
ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ.



$$\angle P = \angle C \quad \angle Q = \angle A \quad \angle R = \angle B$$

PQR ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಮೊದಲು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು x^o, y^o, z^o ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿಗಿರುವ ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ

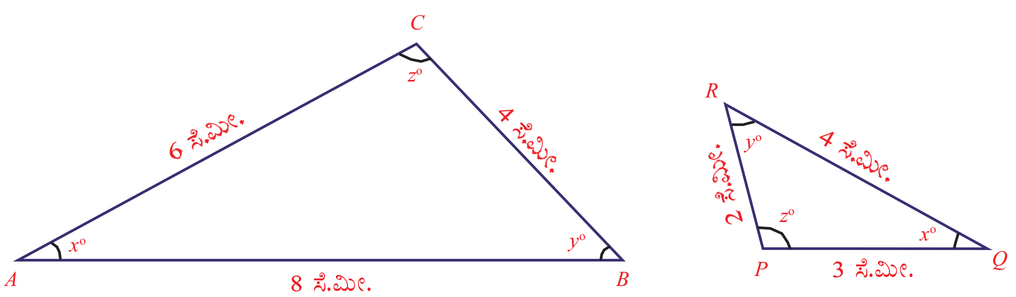
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

ಇದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಅಳತೆಗಳು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

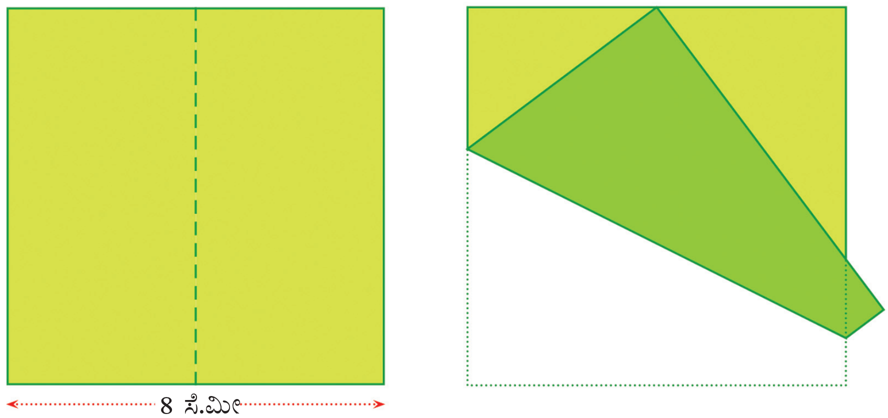
x	$BC = 4$	PR
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	QR

ಇದರಲ್ಲಿ y^o ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಇತರ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿರಬೇಕು.

x	$BC = 4$	$PR = 2$
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	$QR = 4$



ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಕಾಗದದ ಕೆಳಗಿನ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ಮಡಚಲಾಗಿದೆ.

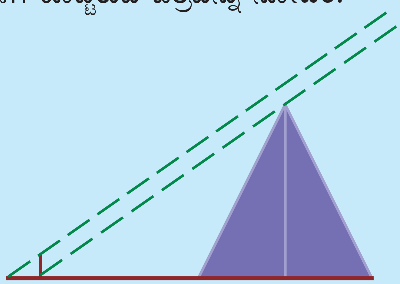


ಈಗ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳು ಲಭಿಸಿದವಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಎಷ್ಟೆಂದು ನೋಡುವ.

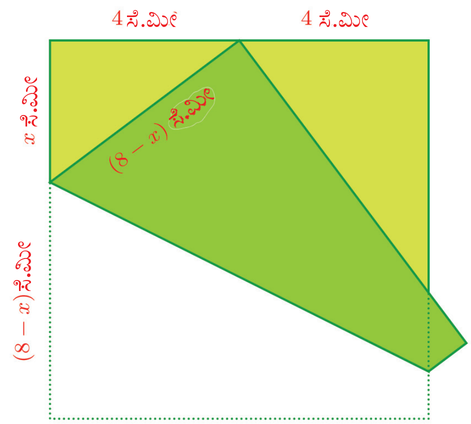
ಪುರಾತನ ಕಾಲದ ನೆರಳಿನ ಲೆಕ್ಕ

ಗ್ರೀಸಿನ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಥೇಲ್ಸ್ ಎಂಬವನು ಸರ್ವಸಮ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಹಡಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಕಥೆಯನ್ನು ಕೇಳಿದ್ದೀರಾ? ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಕುರಿತಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಥೆಯಿದೆ. ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನ ರಾಜನು ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಥೇಲ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದನಂತೆ. ಥೇಲ್ಸ್ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ದಾಖಲಿಸಿದ್ದಾನೆ. “ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ನೆರಳಿನ ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವತಃ ಒಂದು ಕೋಲನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ನೆಟ್ಟು ಸೂರ್ಯ ಕಿರಣಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ನೆರಳುಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಕೋಲಿನ ಎತ್ತರಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗೆ ಸಮಾನವೆಂದು ತೋರಿಸಿದೆನು”

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಎಡಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ನೀಟಕ್ಕಿರುವ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.



ಈ ಎಡಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, ಪೈಥಾಗೋರಸನ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

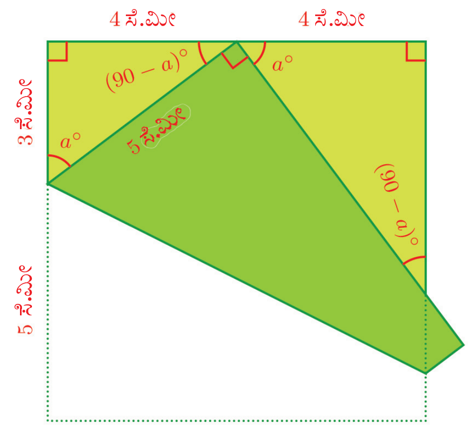
$$(8 - x)^2 - x^2 = 4^2$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡುವ.

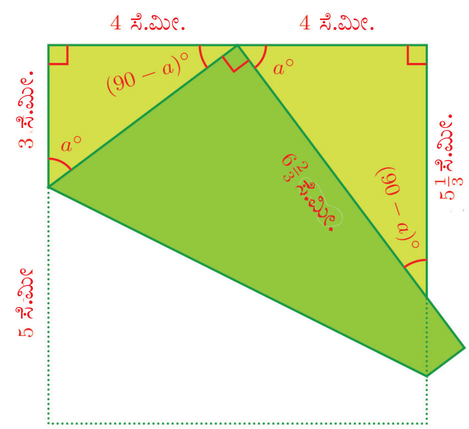
$$8\,(8 - 2x) = 16$$

ಇದರಿಂದ $x = 3$ ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3, 4, 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿವೆ.

ಬಲಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. ಎಡಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನವನ್ನು a^o ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇತರ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

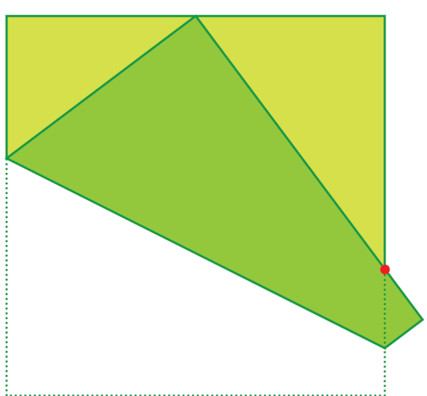


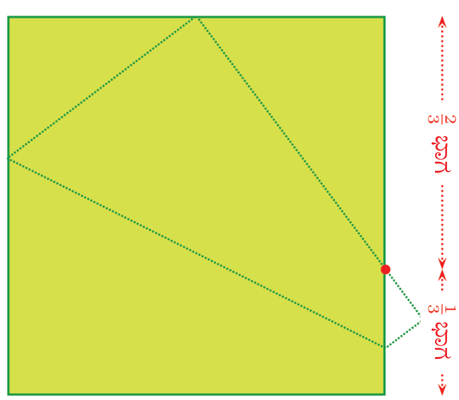
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿಗಿರುವ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಎಡಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ $(90 - a)^o$ ಅಳತೆಯಿರುವ ಕೋನದ ಎದುರಿಗಿರುವ ಭುಜದ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಇದು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬಲಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡನೇ ಲಂಬಭುಜ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಈ ಭುಜಗಳ $\frac{4}{3}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ, ಅಂದರೆ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದಂತಿರುವುದು.



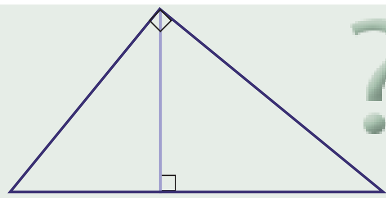
ಯಾವುದೇ ಗಾತ್ರದ ಚೌಕಾಕಾರದ ಕಾಗದವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಮಡಚಿದರೆ ಸಿಗುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $3 : 4 : 5$ ಆಗಿರುವುದೇ?

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವೂ ಇದೆ. ಮಡಚಿದ ಭುಜವು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಕಾಗದವನ್ನು ಪುನಃ ಬಿಡಿಸಿದರೆ, ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವು ಸಿಗುವುದು.





(1) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಶಿರದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಕರ್ಣವನ್ನು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



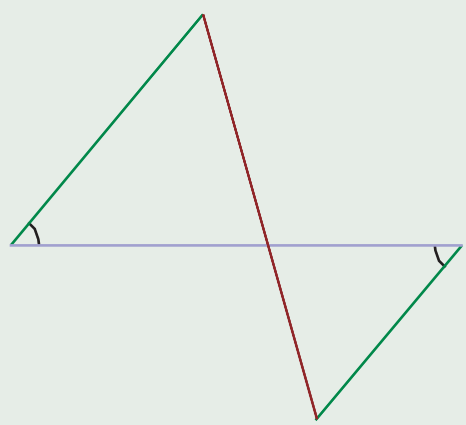
i) ಲಂಬವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ಲಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

iii) ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

iv) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಶಿರದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು h ಎಂದೂ, ಅದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $h^2 = ab$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಿಸ್ತಾರದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೂ ಕೆಳಕ್ಕೂ ಎಳೆದು, ಬಾಗಿದ ಗೆರೆಗಳ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಯಿತು.

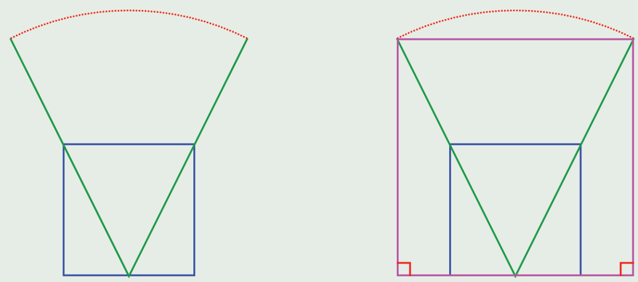


i) ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಗೆರೆಯ ಭಾಗಗಳೂ, ಬಾಗಿದ ಗೆರೆಯ ಭಾಗಗಳೂ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಾಗಿದ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ ಇದಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

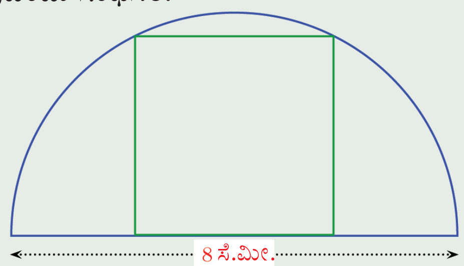
iii) ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು 3:4 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಚೌಕದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗೆರೆಗಳ ಸಮಾನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಶಿರಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

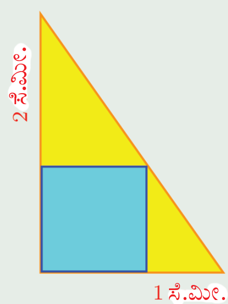


i) ಹೀಗೆ ಲಭಿಸುವ ಆಯತವು ಚೌಕವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಶಿರಗಳು ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲೂ ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳು ವ್ಯಾಸದಲ್ಲಿಯೂ ಬರುವಂತೆ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.



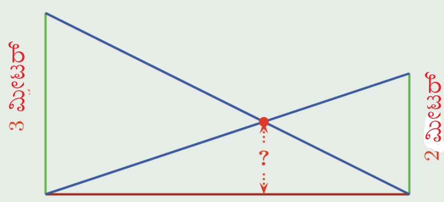
(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಮೂಲೆಯೂ, ಮೂರು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೊಂದು ಬಿಂದುಗಳೂ ಶಿರಗಳಾಗಿ ಬರುವಂತೆ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



i) ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 3, 4, 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು?

(5) 3 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 2 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಎರಡು ಕೋಲುಗಳನ್ನು ನೆಲದಲ್ಲಿ ಊರಲಾಯಿತು. ಒಂದು ಕೋಲಿನ ತುದಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಲಿನ ಬುಡಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಲಾಗಿದೆ.



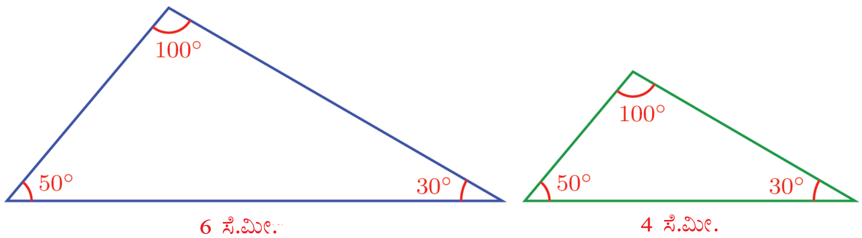
i) ಹಗ್ಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದು ನೆಲದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ?

ii) ಕೋಲುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಎಷ್ಟಾದರೂ ಈ ಎತ್ತರವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

iii) ಕೋಲುಗಳ ಉದ್ದ a, b ಎಂದೂ, ಹಗ್ಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಎತ್ತರ h ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು a, b, h ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

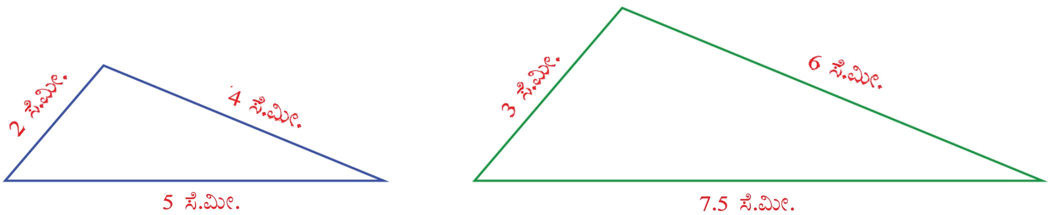
ಭುಜಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣ (Scale) ದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



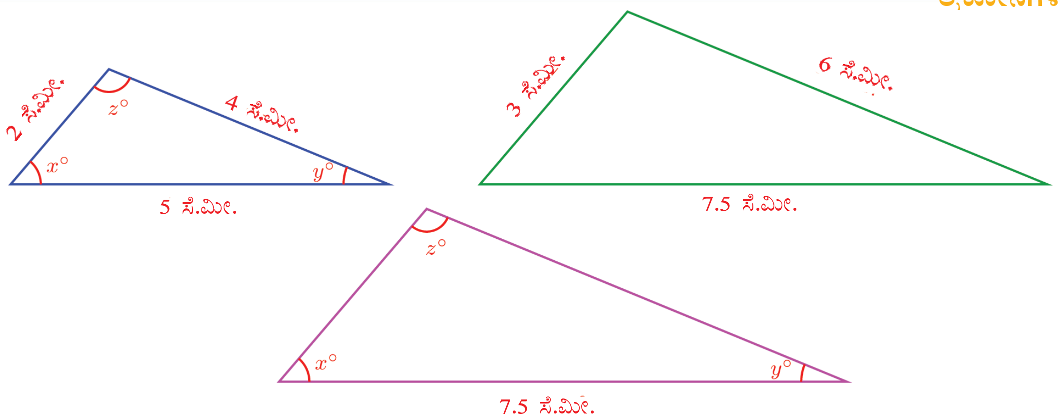
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆ. ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಭುಜವು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಭುಜದ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜವು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವೇ ಆಗಿದೆ. ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳೂ ಇದರಂತೆಯೇ ಇರುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ತಿರುಗಿಸಿ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೂ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ (Scale) ಸಣ್ಣದಾದರೂ ದೊಡ್ಡದಾದರೂ ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗದೆ ಇರಬಹುದೇ?

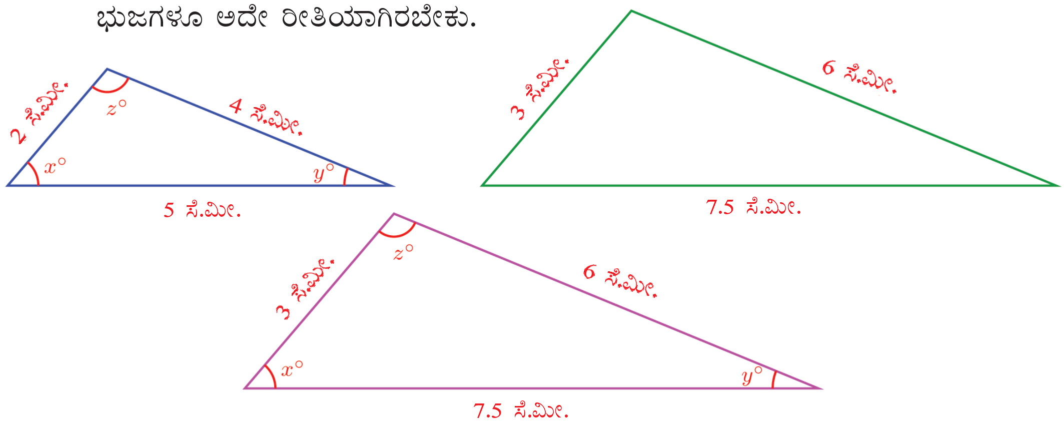


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿವೆ. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆಯೇ?

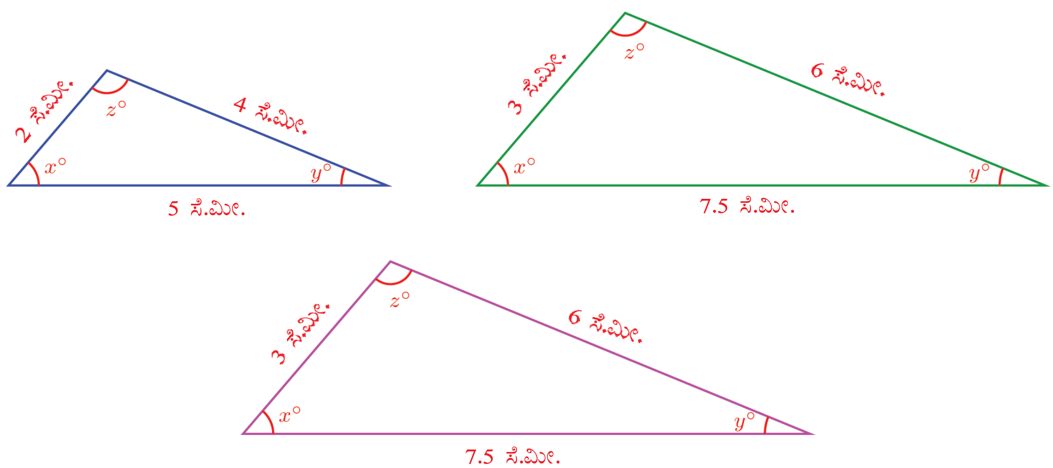
ಅದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು, ಮೂರನೇ ತ್ರಿಕೋನವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸುವ. ಅದರ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವೂ ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಆಗಿವೆ.



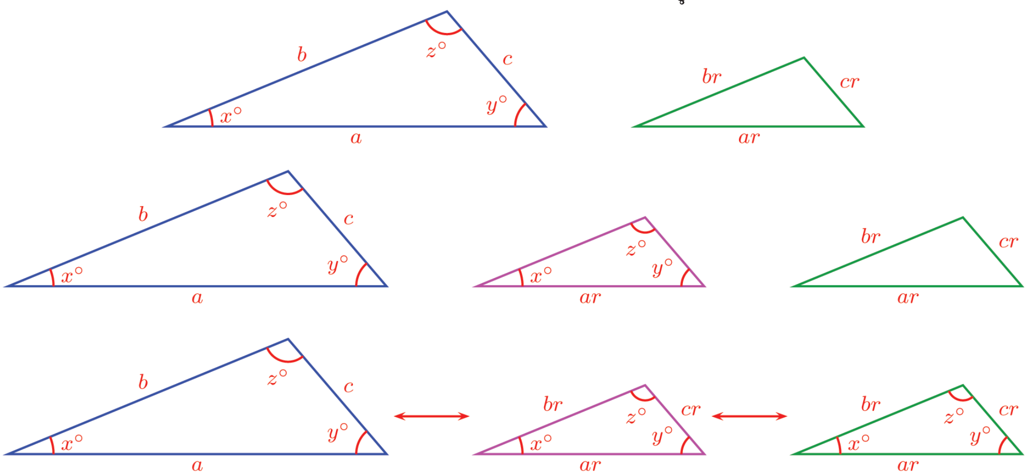
ಈ ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು, ಹಳೆಯ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಹಿಂದೆ ಕಂಡುಕೊಂಡಂತೆ, ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿರಬೇಕು; ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವು ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇತರ ಭುಜಗಳೂ ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿರಬೇಕು.



ಅಂದರೆ, ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಮತ್ತು ಹಳೆಯ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಇವುಗಳ ಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ).

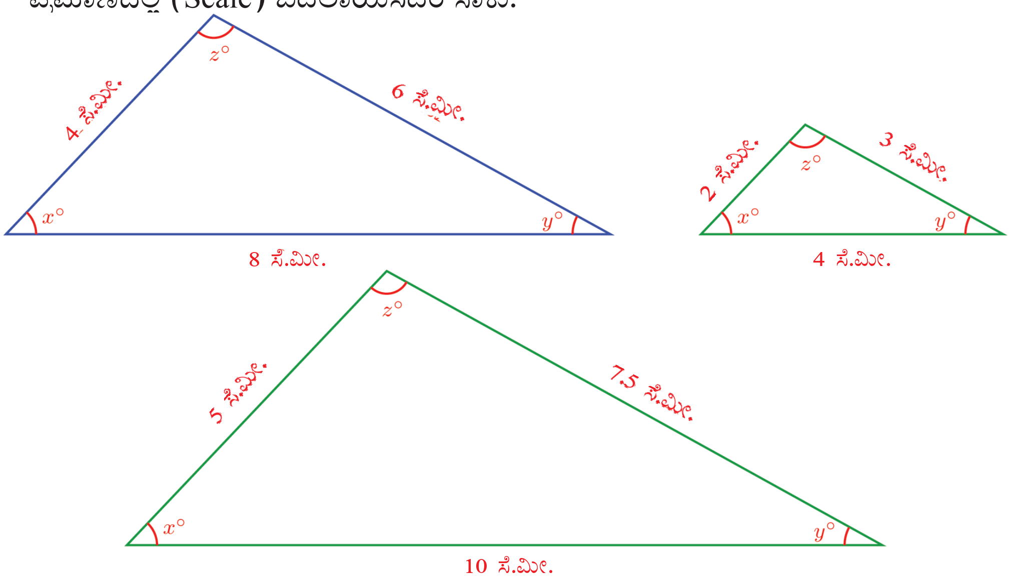


ಈಗ ಮೊದಲ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆಯೆಂದು ಲಭಿಸಿತಲ್ಲವೇ? ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದೋ ಸಣ್ಣದೋ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಇದರಂತೆ ಒಂದು ಎಡೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆಯೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.



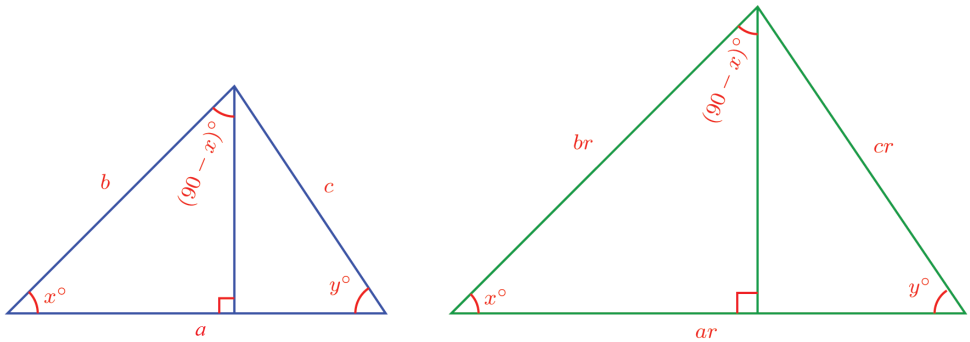
ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗದೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಣ್ಣದೋ ದೊಡ್ಡದೋ ಆದ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ (Scale) ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

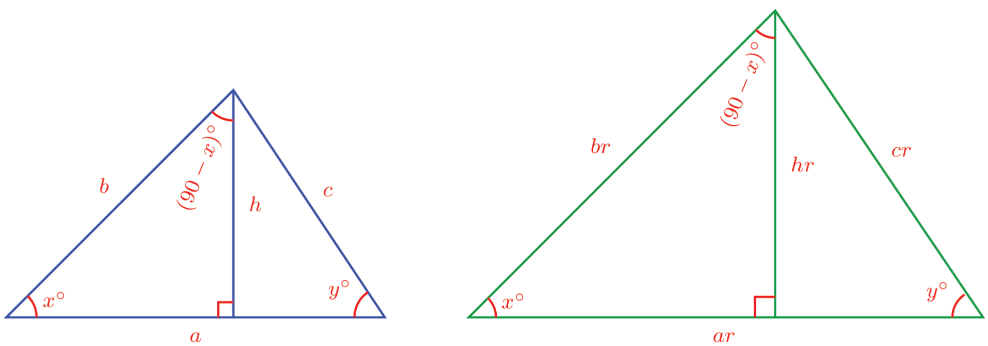


ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ : ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದೋ ಸಣ್ಣದೋ ಮಾಡಿದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ ಅದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಕಷ್ಟಕರವೇನಲ್ಲ. (ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ!)

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುವುವು? ಅದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಹೀಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ. ಈಗ ಹೇಳಿರುವುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಎರಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಲು, ಸಮಾನ ಕೋನವಿರುವ ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ.

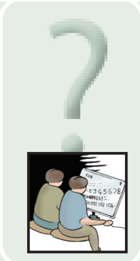


ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎಡಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡುವ. ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳು $x^\circ, 90^\circ, (90-x)^\circ$ ಎಂಬ ಅಳತೆಗಳೇ ಆಗಿವೆ. ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ , ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದೆ. ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ b ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ br ಆಗಿವೆ. ಆಗ ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬವನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬವು hr ಆಗುವುದು.



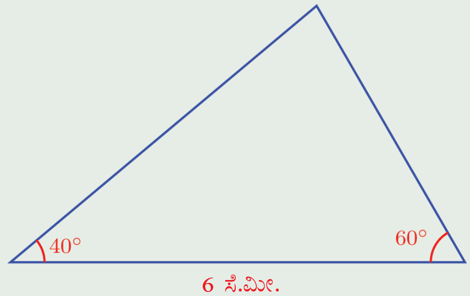
ಇನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ah$; ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ahr^2$

ಹಾಗಾದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗುವ ಪ್ರಮಾಣವು, ಭುಜಗಳು ಬದಲಾಗುವ ಪ್ರಮಾಣದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

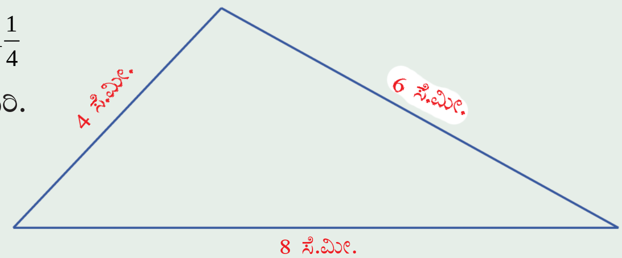


(1) ಇಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

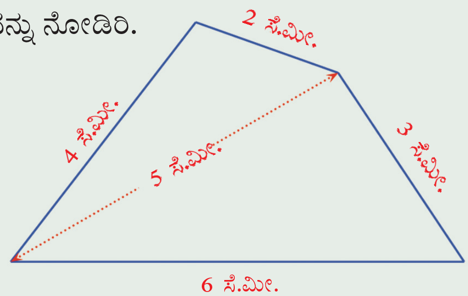
ಇದೇ ಕೋನಗಳಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೇ ಆಗಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು $1\frac{1}{4}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುರಚಿಸಿರಿ.



(3) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



i) ಇದೇ ಕೋನಗಳಿರುವ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ii) ಕೋನಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿರುವ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನ ವಿಶೇಷ

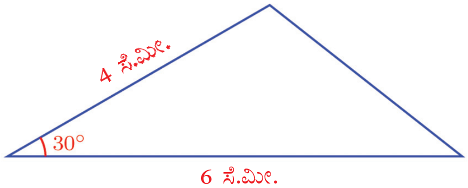
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿವೆ. ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಒಂದನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೇ ಎರಡನೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೂ ಆಗಿವೆ. ಇದು ಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರವಿರುವ ವಿಶೇಷತೆಯಾಗಿದೆ.

ಮೂರನೇ ದಾರಿ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವೂ ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ತಿಳಿದಿರುವುದಾದರೆ, ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದೋ ದೊಡ್ಡದೋ ಆಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದೆವು. ತಿಳಿದಿರುವ ಭುಜವನ್ನು ಬೇಕಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅದೇ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಅದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

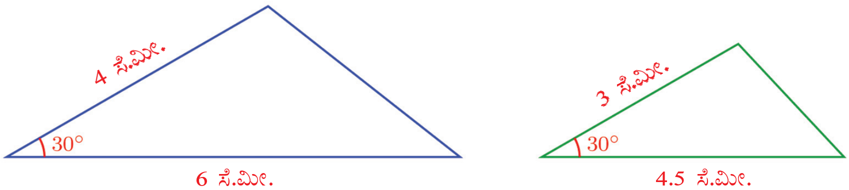
ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ ತಿಳಿದಿರುವುದು ಎಂದಾದರೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಿಸಿ ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು; ಕೋನಗಳು ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಇರುವುವು.

ಇನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಅವುಗಳನ್ನೊಗೊಂಡ ಕೋನವೂ ತಿಳಿದಿರುವುದಾದರೋ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



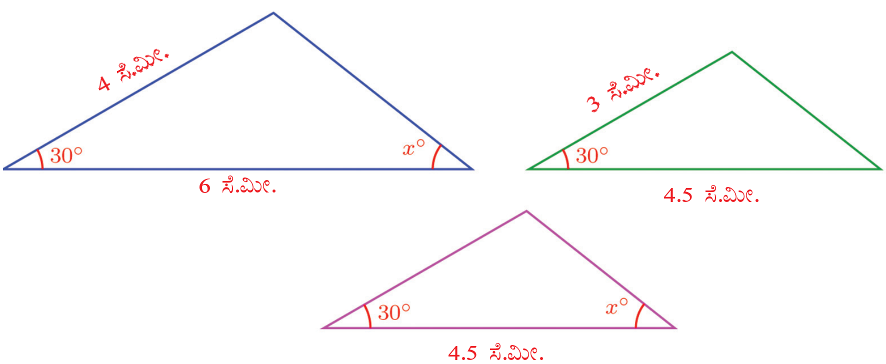
ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳನ್ನು $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿಸಬೇಕು.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವೂ, ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋನ 30^0 ಆಗುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ.

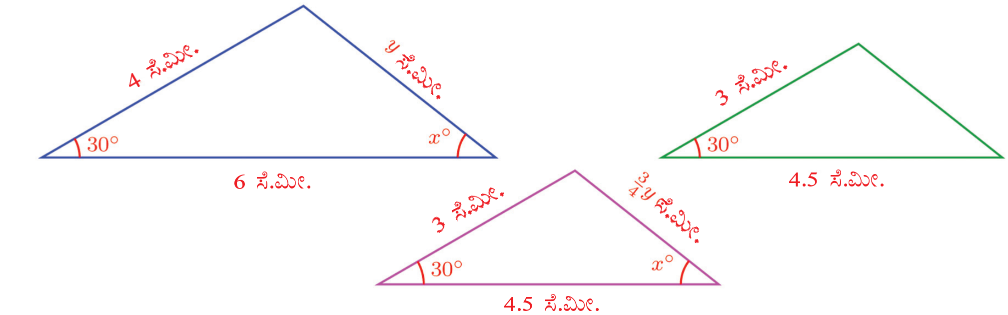


ಆದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ.

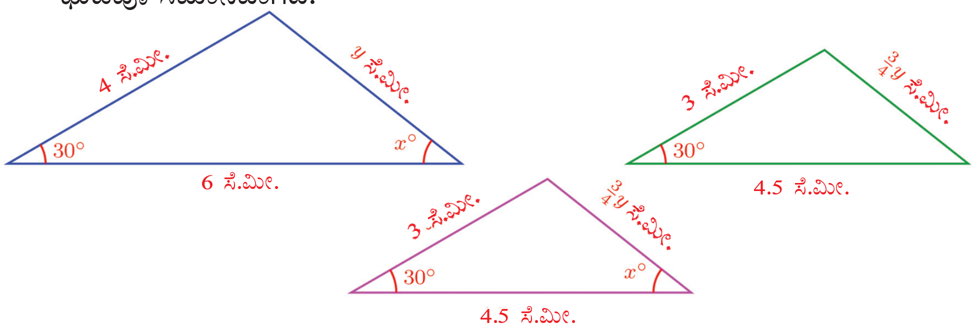
ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಎಡೆಯ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ. ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ 4.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳು.



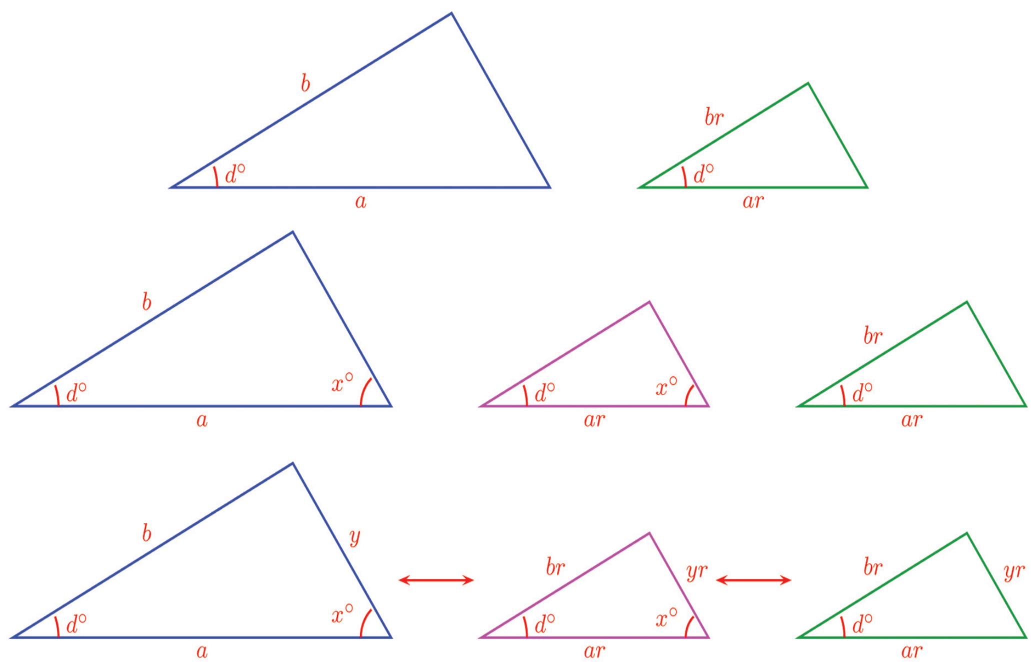
ಈ ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಮೊದಲ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದೆ. ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಇತರ ಭುಜಗಳೂ ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆ, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ತಿಳಿದಿರುವ ಭುಜವನ್ನು y ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಹಳೆಯ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡುವ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

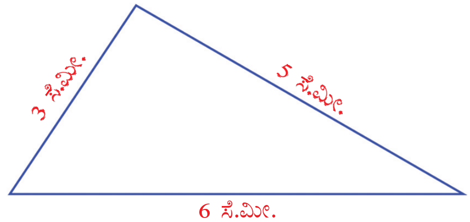


ಹಾಗೆ ಮೊದಲ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜವು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನವು ಯಾವುದೇ ಆಗಿದ್ದರೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ.

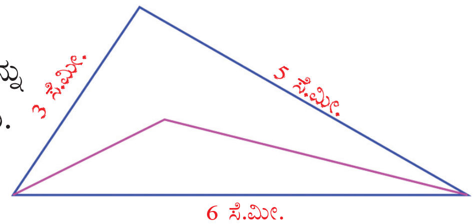


ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಇದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

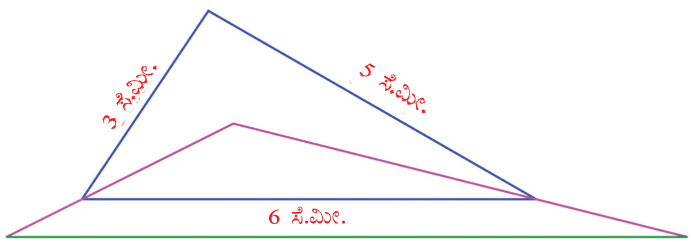
ಈ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಭುಜಗಳನ್ನೋ ಕೋನಗಳನ್ನೋ ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬೇಕಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



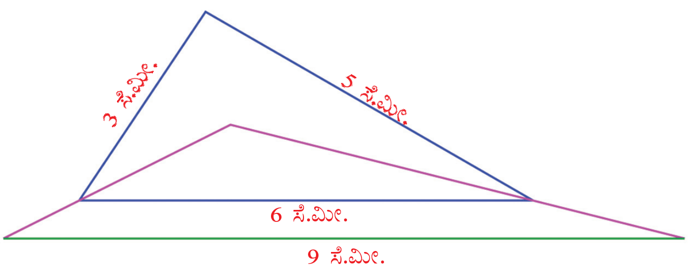
ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ತುದಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ.



ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಅವುಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಮುಂದುವರಿಸಿ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ.

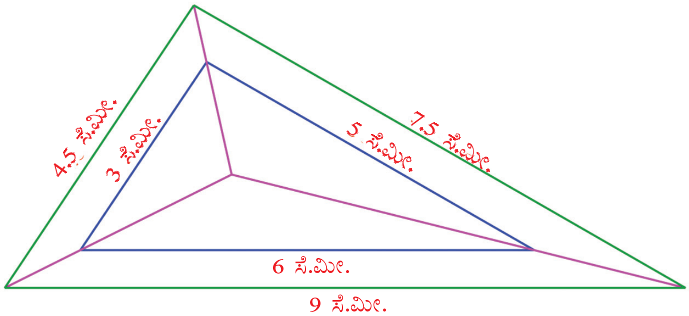


ಈಗ ತ್ರಿಕೋನವೂ, ಅದರೊಳಗೊಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವೂ ಉಂಟಾಯಿತು. ರಚಿಸಿರುವ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿವೆ. ಈ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಒಂದು ದಾರಿಯಿದೆ. ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. D ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ. Ray ಉಪಯೋಗಿಸಿ D ಯಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳಿಗೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. Min = 0 ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ g ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. D ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು g * AD ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದು AD ಯನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು E ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅದರಂತೆ D ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯವು g * BD ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದು BD ಯನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಒಂದು F ನ್ನೂ, ತ್ರಿಜ್ಯವು g * CD ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದು CD ಯನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು G ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು ವೃತ್ತವನ್ನು ಮರೆಮಾಡಿರಿ. EFG ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದು ತ್ರಿಕೋನ ABC ಗೆ ಸದೃಶ್ಯವಾಗಿದೆಯೆ? ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಭುಜಗಳನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. g = 1 ಆಗುವಾಗ ಏನು ಸಂಭವಿಸುತ್ತದೆ? g ಗೆ ಬದಲು 0.5, 2 ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ? D ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಇತರ ಎರಡು ಶಿರಗಳೊಂದಿಗೆ ಇದರಂತೆ ಜೋಡಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೋ?



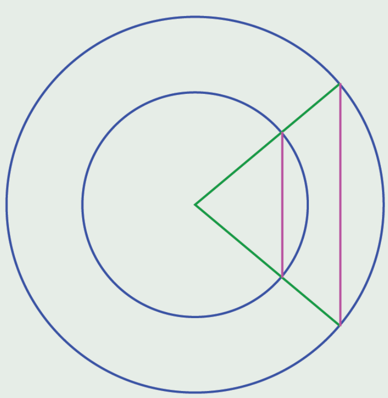
ಸದೃಶ್ಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ Dilate from Point ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. Min = 0 ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಲೈಡರ್ a ಮಾಡಬೇಕು. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Dilate from Point ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ನಂತರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ Scale Factor ಆಗಿ a ಯನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುವುದು. a ಮತ್ತು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಬದಲು ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದ ಸದೃಶ ರೂಪಗಳನ್ನು ಇದರಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಭುಜಗಳೆಲ್ಲ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಲಿಲ್ಲವೇ? ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳು ಸದೃಶ (similar) ವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇದುವರೆಗೆ ನೋಡಿದ ತತ್ವಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಸದೃಶವಾಗಿಸಲು ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧ ಉಂಟಾದರೆ ಸಾಕು.

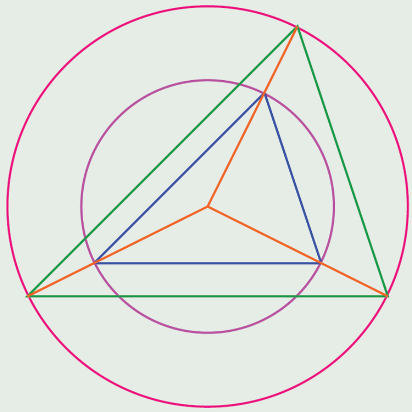
- ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿಸಬೇಕು.
- ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿಸಬೇಕು.
- ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿಸಬೇಕು.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಅದೇ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.



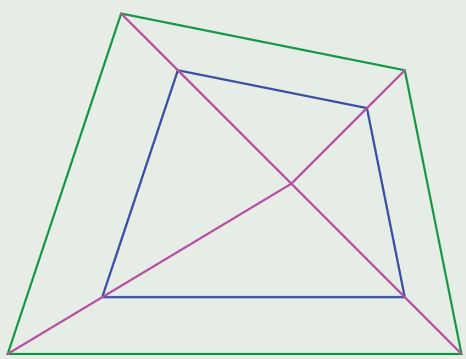
i) ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶ್ಯವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ಪ್ರಮಾಣವು, ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಬದಲಾದ ಪ್ರಮಾಣವೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಚತುರ್ಭಜದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು, ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೊರಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸುವುದು. ಈ ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಇನ್ನೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಉಂಟಾಗುವುದು.

i) ದೊಡ್ಡ ಚತುರ್ಭಜದ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ಎರಡೂ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಸಂಶೋಧನೆ

- ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನ ಸಮಭಾಜಕಗಳು, ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳು, ಪರಿವೃತ್ತತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳ ವಿಶೇಷತೆಗಳೇನು?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.			
• ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಅದರ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದು ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.			
• ಮೂರು ಭುಜಗಳು ತಿಳಿದಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಸಣ್ಣದು ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಬದಲಾವಣೆಯು ಇದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.			
• ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬೇಕಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ, ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಬೇಕಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ