வகுப்பு IX

கணிதம்

பகுதி - 1

MATHEMATICS
STD 9
Tamil Medium

கேரள அரசு
கல்வித்துறை

மாநிலக் கல்வி ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT), கேரளம்
2016

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா,
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா,
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா,
உச்சல ஜலதி தரங்கா,
தவ சுப நாமே ஜாகே,
தவ சுப ஆசிஸ மாகே,
காகே தவ ஜய காதா
ஜனகண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா.
ஜய ஹே, ஜயஹே, ஜயஹே
ஜய ஜய ஜய ஜயஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறந்தோர். எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன். அதன் வளம்வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமை கொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்து கொள்வேன். என் பெற்றோர், ஆசிரியர், மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். நான் எனது நாட்டினுடையவும், நாட்டு மக்களுடையவும் வளத்திற்காகவும், இன்பத்திற்காகவும் முயற்சி செய்வேன்.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

அன்பு மாணவர்களே,

அளவுகள் அவற்றின் இடையே உள்ள தொடர் புகள் ஆகியவற்றின் கற்றலாகவே கணிதம் தொடங்குகிறது. அளவுகளைச் சாதாரண எண் களாகவும், பொருட்களை வடிவியல் வடிவங் களாகவும் பார்க்கத் தொடங்கும்போது, கணிதத்தின் கருத்துத்தளம் உருவாக்கம் பெறுகிறது. எண் தொடர்புகள் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகள் ஆகின்றன. புதுச் சூழல்களைக் கணிதம் சார்ந்து விளக்குவதற்குப் புதிய எண்களும் குறியீடுகளும் அவசியமாகின்றன. பொருட்களின் காரணகாரியத் தொடர்பு கருத்து களின் அறிவுப் பூர்வமான வளர்ச்சியாக உருப்பெறுகிறது. கணித அறிவியலும் வளர்கிறது. அதன் அடுத்தப் படிநிலையை வரவேற்போம்.

முனைவர். பி. ஏ. பாத்திமா
இயக்குநர்
எஸ்.ஸி.இ.ஆர்.டி

Text Book Development Committee

Participants in workshop

T.V. Prakasan
GHSS, Vazhakkadu
Malappuram.

Unnikrishnan. M.V.
GHSS, Kumbala
Kasaragod.

Vijayakumar. T.K.
GHSS, Cherkula
Kasaragod.

Ramanujam. R
MNKMGHSS, Pulapatta
Palakkad.

Anilkumar.M.K.
SKNJHSS, Kalpatta
Vyanad

Ubaidhulla.K.C
SOHSS, Areacode.
Malappuram.

Ramesan. N.K.
RGMHSS, Mokeri. Kannur.

Jabir.K
GVHSS, Mogran, Kasaragod.

SreeKumar. T
Govt GHSS, Karamana
Thiruvananthapuram.

K.J. Prakash
GMGHSS, Pattom
Thiruvananthapuram.

Anil. C. Ushas
GHS, Nedumbram
Thiruvalla, Pathanamthitta.

Shijo David. C
CMSHSS,
Thrissur.

Froid Francis
VHSS, Valanchery
Malappuram.

Krishna Prasad. M
VMSAVHSS,
Chappanangadi,
Malappuram.

Balagangadharan. V.K.
AEO, Parappanangadi.
Malappuram.

Cover

Rajivan. N.T
GHSS, Thariode, Vyanad.

Expert

Dr. E. Krishnan
Rtd Prof. University College
Thiruvananthapuram.

Dr. Rameshkumar. P
Asst.Prof., Kerala University.

Venugopalan. C
Asst. Prof., Govt College of Teacher
Education, Thiruvananthapuram.

Dr. Sara Chandran
Rtd., Dy. of Collegiate Education
Kottayam.

Accordamic co-ordinator

Sujithkumar. G
Research Officer, SCERT.

TAMIL VERSION

Dr. Kanchana
Former Prof. & Head,
Dept. of Tamil,
University of Kerala.

T.Kumaradhas
Headmaster (Retd.),
GHS Kozhippara,
Palakkad.

Accordamic co-ordinator

Dr. D. Sahayadhas
Research Officer, SCERT.

M.J. David
Headmaster (Retd.),
GHS Meenakshipuram,
Palakkad.

S.C. Edwin Daniel
Headmaster (Retd.),
GHS Pambanar,
Idukki.

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Vidhyabhavan, Poojapura. Thiruvananthapuram - 695 012

Contents

1. பரப்பளவு 7
2. பின்ன எண்கள் 23
3. சமன்பாட்டு ஜோடிகள் 47
4. புதிய எண்கள் 57
5. வட்டங்கள் 77
6. இணைகோடுகள் 93
7. முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை 109

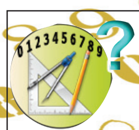
இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காக, சில


ஐ.சி.டி. வாய்ப்பு


கணக்கைச் செய்து பார்க்கலாம்


ஆராய்வோம்

மீள்பார்வை

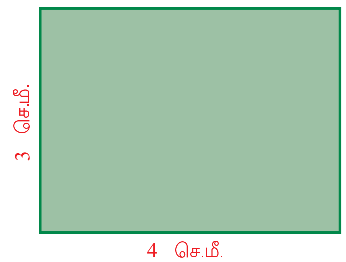


கலந்துரையாடலாம்

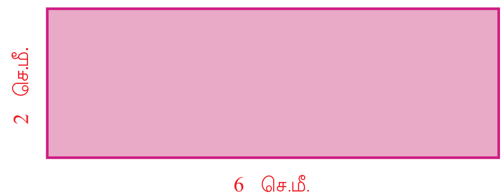
1 பரப்பளவு

ஒரு செவ்வகம் வரைய வேண்டும். அதன் பரப்பளவு 12 சதுர சென்டி மீட்டராக இருக்க வேண்டும். எவ்வாறு வரையலாம்?

இவ்வாறு ஆகலாம்:



இவ்வாறும் ஆகலாம் :

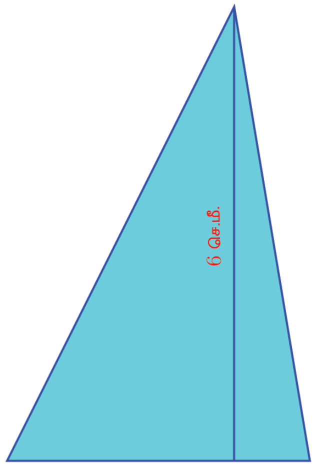


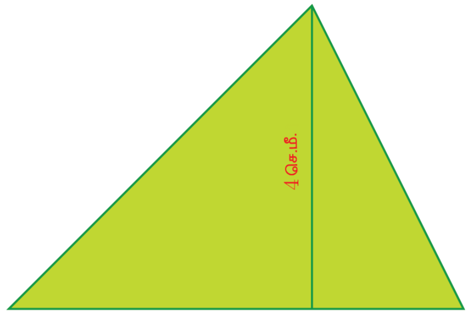
மேலும் பல விதங்களிலும் ஆகலாம், அல்லவா?

செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கம் 8 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும் எனவும் கூறினால்? ஒன்று மட்டும் அல்லவா உள்ளது?

12 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவு உள்ள முக்கோணம் வேண்டும் எனில்?

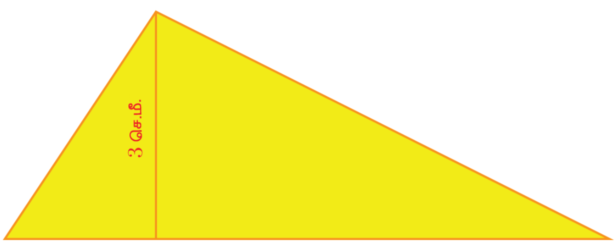
இதுவும் பல விதங்களில் ஆகலாம்:

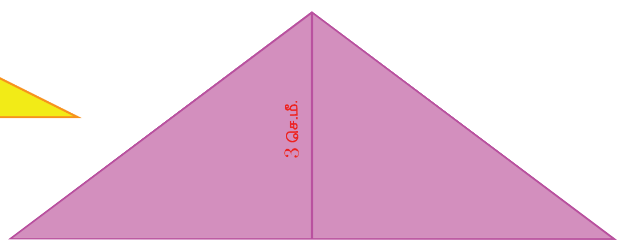




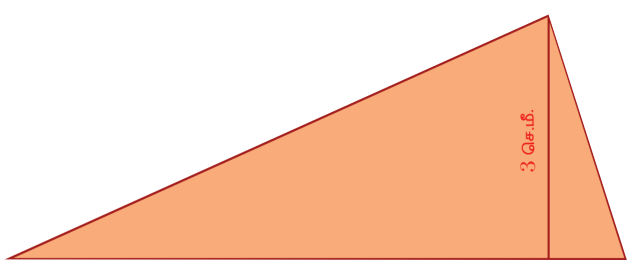
ஒரு பக்கம் 8 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும் என்றும் கூறினால்?

அப்போதும் பல விதங்களில் ஆகக் கூடாதா?

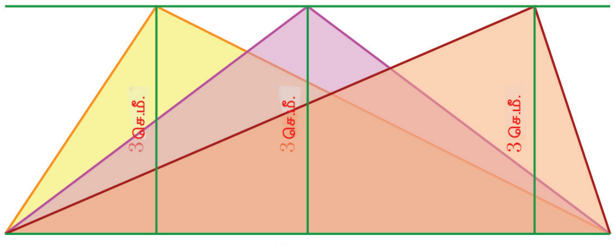




நீளம் 8 ஆகுமாறு ஒரு கோடு வரையவும். இக்கோட்டிலிருந்துள்ள உயரம் 3 ஆகுமாறு ஒரு புள்ளியை அடையாளப் படுத்தவும். (Grid உபயோகிக்கலாம்). இப்புள்ளி வழியே முதலாவது கோட்டுக்கு இணையாக வேறொரு கோடு வரையவும். இக்கோட்டில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி அப்புள்ளியும் முதலாவது வரைந்த கோட்டின் முனைப்புள்ளிகளும் உச்சிகளாக வரும் முக்கோணம் வரைக. Area உபயோகித்து இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவை அடையாளப்படுத்திப் பார்க்கவும். இந்த முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியை இணை கோடு வழியாக மாற்றிப் பார்க்கவும். முக்கோணத்தின் பரப்பளவு மாறுகிறதா?



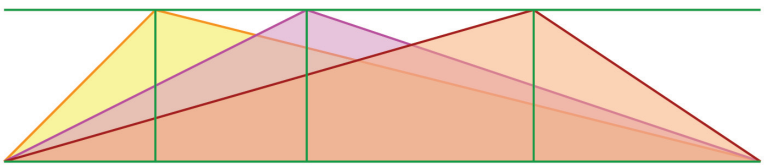
இவை அனைத்திலும் மேலே உள்ள பக்கங்களின் நீளம் வேறுபட்டுள்ளது; அடிப்பக்கமும் உயரமும் ஒன்றுபோல் இருப்பதால் பரப்பளவு மாறவும் இல்லை:



இம் முக்கோணங்கள் அனைத்திலும் மேல் உச்சி அடிப்பக்கத்திலிருந்து 3 சென்டிமீட்டர் உயரத்தில் உள்ளது. இதனை வேறொரு முறையில் கூறலாம். மேல் உச்சிகள் யாவும் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக 3 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் உள்ள கோட்டில் உள்ளன.

இதே அடிப்பக்கமும் பரப்பளவும் உள்ள எல்லா முக்கோணங்களின் உச்சிகளும் இக்கோட்டிலேயே இருக்க வேண்டும் அல்லவா; மாறாக, இக்கோட்டில் உள்ள எந்தப் புள்ளியையும் கீழே உள்ள கோட்டின் முனைகளுடன் இணைத்தால் இதே அடிப்பக்கமும் பரப்பளவும் உள்ள முக்கோணம் கிடைக்கும்.

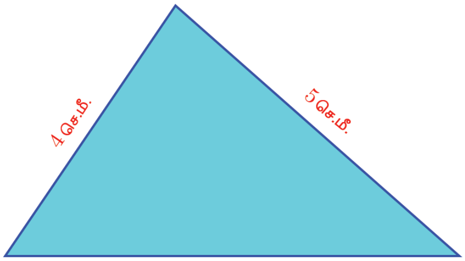
அடிப்பக்கம், பரப்பளவு என்பனவற்றை மாற்றினாலும் மேற்கூறிய யாவும் சரியல்லவா?



அடிப்பக்கமும் பரப்பளவும் சமமான எல்லா முக்கோணங்களிலும் மூன்றாவது உச்சி, அடிப்பக்கத்துக்கு இணையான ஒரு கோட்டிலாகும். மாறாக, அடிப்பக்கம் சமமாகவும், மூன்றாவது உச்சிகள் எல்லாம் அடிப்பக்கத்துக்கு இணையான ஒரு கோட்டிலும் உள்ள முக்கோணங்கள் எல்லாம் ஒரே பரப்பளவு உள்ளவையாகும்.

இதனை எவ்வாறெல்லாம் பயன்படுத்தலாம் எனக் காணலாம்:

பக்கங்களின் நீளம் 4, 5, 6 சென்டிமீட்டர் என முக்கோணம் வரைக.

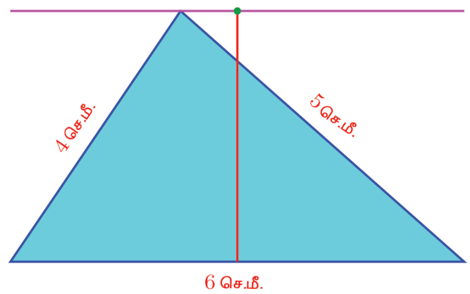


இனி இதே கீழ்ப்பக்கம் உள்ள, இதே பரப்பளவு உள்ள இரு சமப் பக்கமுக்கோணம் வரைய வேண்டும்:

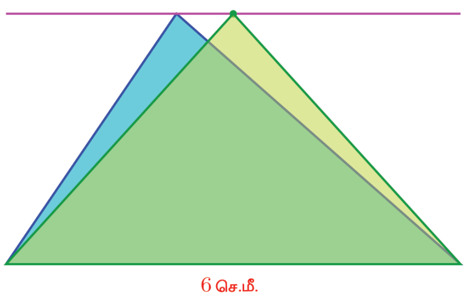
வரைய வேண்டிய முக்கோணத்தின் கீழ்ப்பக்கம் மாறாததால், மேல் உச்சியை எங்கு எடுக்க வேண்டும் என்று மட்டும் உறுதிப்படுத்தினால் போதும். பரப்பளவு மாறாமல் இருக்க, அது கீழே உள்ள பக்கத்துக்கு இணையாக இப்போது உள்ள முக்கோணத்தின் மேல் உச்சி வழியே உள்ள கோட்டில் இருக்க வேண்டும்.

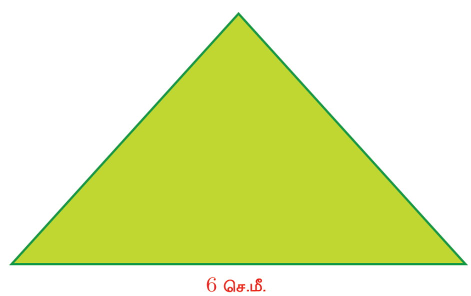
எல்லா இரு சமப்பக்கமுக்கோணங்களின் மேல் உச்சியும் அடிப்பக்கத்தின் செங்குத்து இருசமவெட்டியில் இருக்கும் என எட்டாம் வகுப்பில் கண்டிருக்கிறோம் அல்லவா?

ஆகவே இப்போது வரைந்த முக்கோணத்தின் மேல் உச்சி வழியே கீழ்ப்பக்கத்துக்கு இணையான கோடும், கீழ்ப்பக்கத்தின் செங்குத்து இருசமவெட்டியும் இணையும் புள்ளியே நமக்குத் தேவையான மூன்றாவது உச்சி:



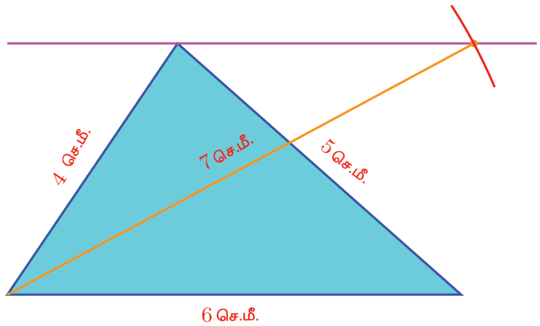
இனி முக்கோணம் வரையலாம் அல்லவா:



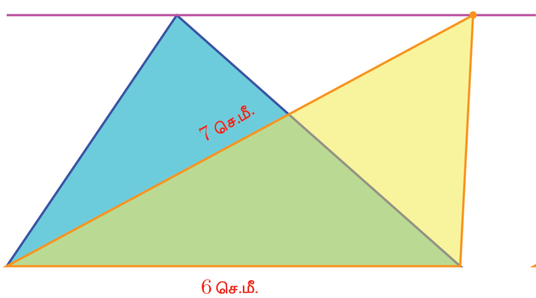


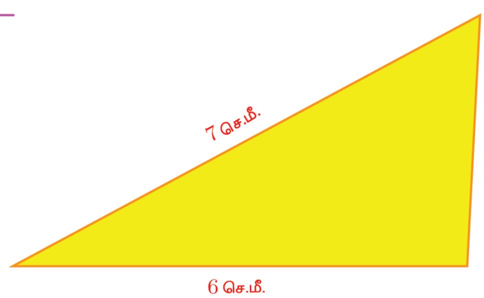
இனி இதே பரப்பளவு உள்ள வேறொரு முக்கோணம், இதே அடிப்பக்கத்துடன், இடப் பக்கம் 7 சென்டிமீட்டரும் உள்ள முக்கோணம் வரையலாமா?

இடது உச்சியிலிருந்து, 7 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள வட்டப்பகுதியை வரைந்து, மேலே உள்ள கோட்டினை வெட்டும் இடத்தைக் கண்டுபிடித்தால் போதும் அல்லவா?



ஆகவே முக்கோணம் இவ்வாறு ஆகும்:

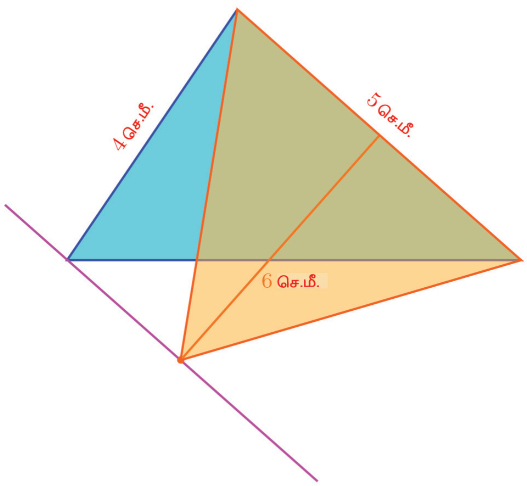


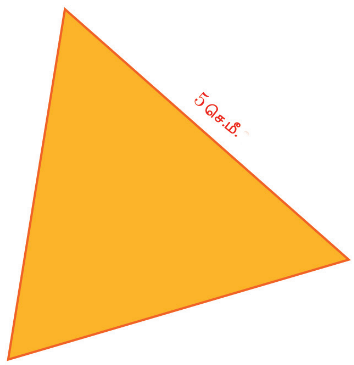


இதே பரப்பளவு உள்ள இரு சமப்பக்க முக்கோணம், அடிப்பக்கம் 5 சென்டிமீட்டர் ஆக வரைய வேண்டும் எனில்?

அடிப்பக்கம் 5 சென்டிமீட்டராக மாற்றி படத்தை வரைந்து முன்னர் செய்தது போன்று வரையலாம்.

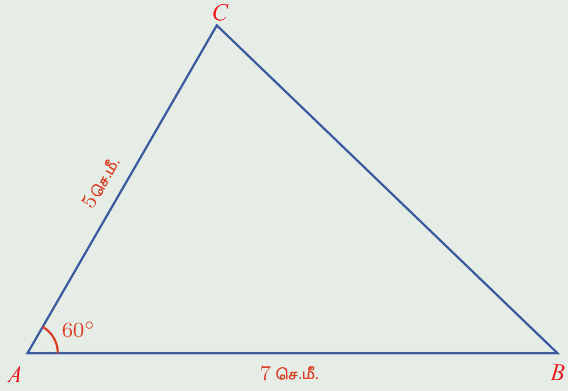
சிறிது சாய்ந்த முக்கோணம் ஆனாலும் போதும் எனில், இதே படத்தில் இடது உச்சி வழியாக வலப்பக்கத்திற்கு இணைகோடு வரைந்தும் செய்யலாம்.





(1) பக்கங்களின் நீளம் 3, 4, 6 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒரு முக்கோணம் வரைக. இதே பரப்பளவு உள்ள மூன்று வேறுபட்ட செங்கோண முக்கோணங்கள் வரைக.

(2) கீழ்க்காணும் முக்கோணத்தை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரையவும்.



இதே பரப்பளவு உள்ள ABP, ABQ, BCR என்ற முக்கோணங்களைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள அளவுகளில் வரையவும்.

i) $AB = 7$ சென்டிமீட்டர், $\angle BAP = 90^{\circ}$

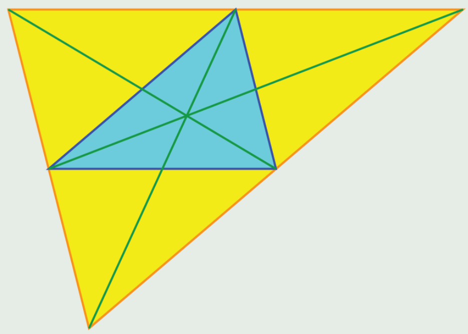
ii) $AC = 5$ சென்டிமீட்டர், $\angle ACQ = 60^{\circ}$

iii) $AB = 7$ சென்டிமீட்டர், $\angle ABC = 30^{\circ}$

(3) ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதன் இருபுள்ளிகளும் வட்டமையமும் உச்சிகளாக உள்ள முக்கோணம் வரைக. இதே பரப்பளவு உள்ள வேறொரு முக்கோணம், எல்லா உச்சிகளும் வட்டத்தில் அமையுமாறு வரைக.

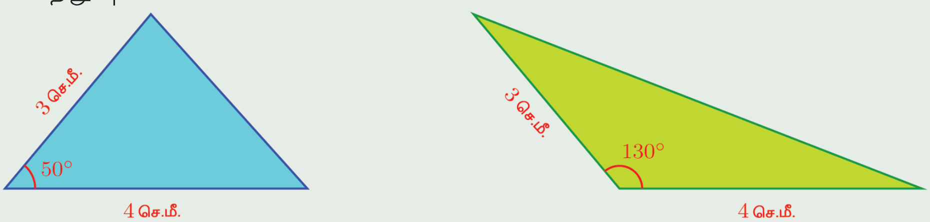
(4) இரண்டு பக்கங்களின் நீளம் 8, 6 சென்டிமீட்டரும், பரப்பளவு 12 சதுர சென்டிமீட்டரும் ஆன (சமம் அல்லாத) எத்தனை முக்கோணங்கள் வரைய இயலும்? பரப்பளவு 24 சதுர சென்டிமீட்டர் ஆனால்?

(5) படத்தில் நீல முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்துக்கும் எதிர் உச்சி வழியே இணைகோடு வரைந்தே பெரிய முக்கோணம் உருவாக்கப் பட்டுள்ளது:



படத்தில் நீல முக்கோணத்தின் அதே பரப்பளவு உள்ள எத்தனை முக்கோணங்கள் உள்ளன?

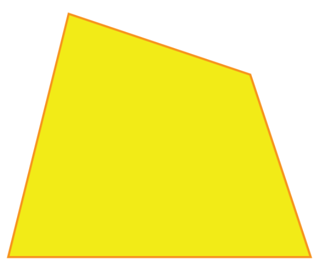
(6) படத்தில் காணும் இரு முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமம் என நிறுவுக.



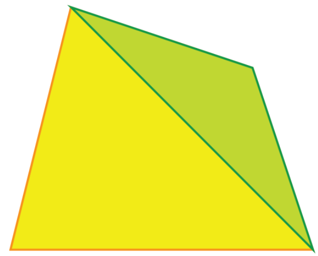
இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் மாறாமல் ஒரே பரப்பளவு உள்ள எத்தனை வெவ்வேறான முக்கோணங்கள் வரையலாம்?

நாற்கரமும் முக்கோணமும்

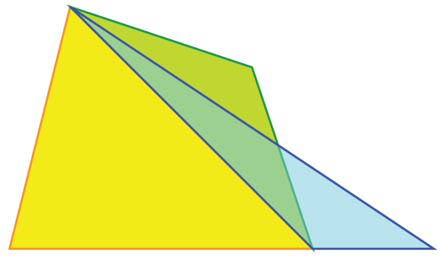
சிறப்புத்தன்மைகள் ஒன்றுமில்லாத ஒரு சாதாரண நாற்கரத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு?



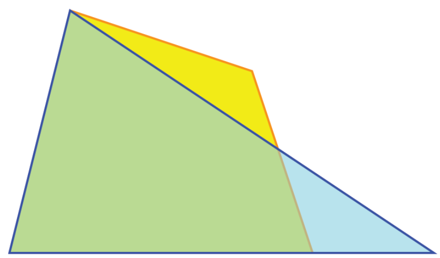
ஒரு மூலைவிட்டம் வரைந்து இரு முக்கோணங்களாகப் பிரித்து, ஒவ்வொன்றினுடையவும் பரப்பளவைக் கணக்கிட வேண்டும் அல்லவா?



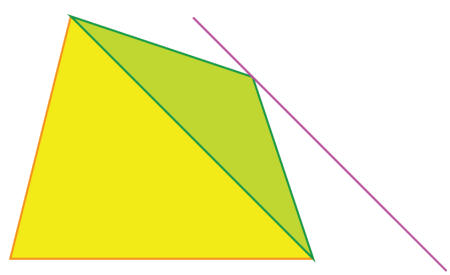
வேறொரு வழிமுறை உள்ளது. அடிப்பக்கமும் பரப்பளவும் மாறாமல் பச்சை நிறமுக்கோணத்தின் வலது மேல் உச்சியை நாற்கரத்தின் அடிப்பகுதியுடன் இணைத்தாலோ?



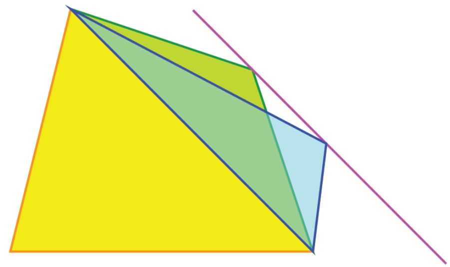
அப்படியெனில் நாற்கரத்தின் பரப்பளவு, மஞ்சள், நீலம் ஆகிய நிறங்கள் உள்ள முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை அல்லவா. இவை இணைந்த வடிவமே பெரிய ஒரு முக்கோணம். அவ்வாறு நாற்கரத்தின் பரப்பளவை ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவாக மாற்றலாம்.



இனி இதனை எவ்வாறு நிறைவேற்றுவது எனப் பார்ப்போம். பச்சை முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கமும் பரப்பளவும் மாறாமல் உச்சியை மாற்றுவதற்கு, அந்த உச்சி வழியாக எதிர்ப்பக்கத்திற்கு இணைகோடு வரைந்தால் போதுமே?

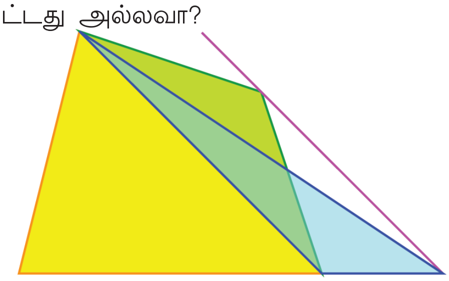


பச்சை முக்கோணத்தின் வலது மேல் உச்சியை இக்கோடு வழியாக எவ்வளவு நீட்டினாலும் பரப்பளவு மாறாது. ஆகவே அவ்வாறு உருவாக்கும் புதிய நாற்கரத்தின் பரப்பளவும் மாறுவதில்லை.



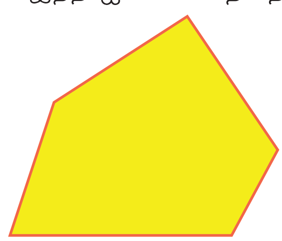
முக்கோண உச்சி, இணைகோடும் நாற்கரத்தின் அடிப்பக்கம் நீட்டியதும் சந்திக்கும் இடத்தில் சேர்ந்தாலோ?

நாற்கரத்தின் பரப்பளவு உள்ள முக்கோணம் ஆகிவிட்டது அல்லவா?

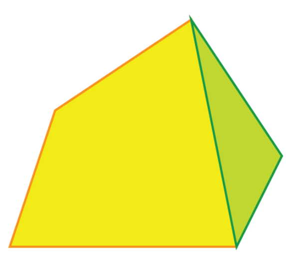


இந்த உத்தியை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்தி, எந்தப் பலகோணத்திற்கும் அதே பரப்பளவு உள்ள முக்கோணம் உருவாக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக இந்த ஐங்கோணத்தைப் பார்க்கவும்.



ஒன்றுவிட்ட இரு உச்சிகளைச் சேர்த்து இதனை ஒரு நாற்கரமும், ஒரு முக்கோணமும் ஆகப் பிரிக்கலாம்.



வெட்டி மாற்றுதலும் மாற்றி அடுக்குதலும்

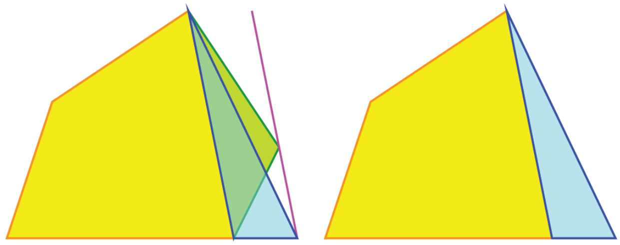
காகிதத்தில் வெட்டி எடுத்த ஒரு வடிவத்தைத் துண்டுகளாக்கி வேறொரு வடிவமாக அடுக்கினால் பரப்பளவு மாறாது. பரப்பளவு மாறாமல் வடிவம் மாறுகின்ற ஒரு முறையிலிருந்து, வெட்டிச் சேர்த்து வைக்கும் ஒரு முறை எப்போதும் இயல வேண்டும் என்றில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, நாற்கரத்தைப் பரப்பளவு மாறாமல் முக்கோணம் ஆக்கி வரையும் முறையை உபயோகித்து, காகிதத்தில் வெட்டி எடுத்த ஒரு நாற்கரத்தை வெட்டி அடுக்கி முக்கோணம் ஆக்க இயலாது. இவ்வாறு வெட்டி எடுக்கும் முறைகளை விளக்கும் பல வலைதளங்களின் விவரங்கள்

www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html

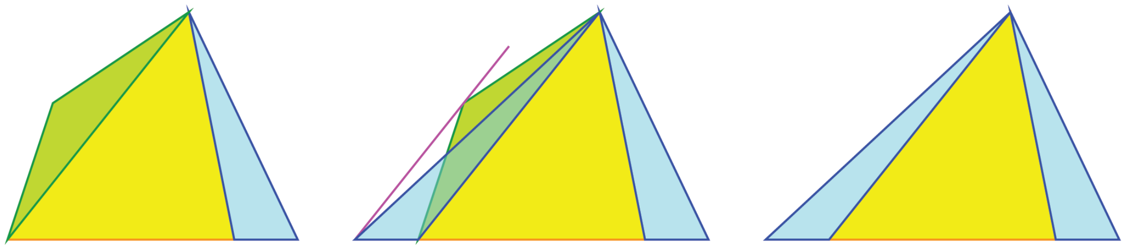
என்ற வலைப்பக்கத்தில் உள்ளன.

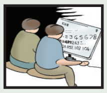
ஜியோஜிப்ராவில் நாற்கரம், ஐங்கோணம், அறுகோணம் எனும் வடிவங்களை வரைந்து அவற்றின் சம பரப்பளவு உள்ள முக்கோணங்களை உருவாக்கவும்.

இனி, பச்சை முக்கோணத்தின் வலது மேல் உச்சியை எதிர்ப்பக்கத்துக்கு இணையாக நீக்கி, ஐங்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தில் சேர்த்தால், ஐங்கோணத்தின் அதே பரப்பளவு உள்ள நாற்கரம் ஆகும்.

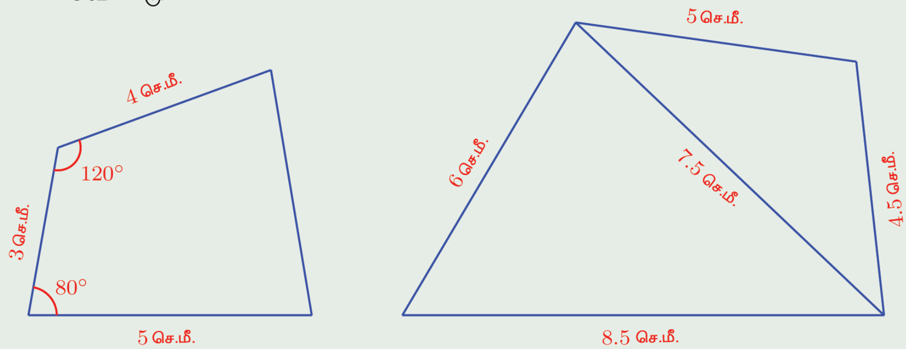


இந்த நாற்கரத்தின் இடது மேல் உச்சியையும் இதைப்போன்று கீழே கொண்டுவந்தால் இதே பரப்பளவு உள்ள முக்கோணம் ஆகும்.





(1) கீழ்க்காணும் இரு நாற்கரங்களையும் நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரையவும். அவற்றின் அதே பரப்பளவு உள்ள முக்கோணங்களையும் வரைந்து பரப்பளவைக் கணக்கிடுக. (தேவையான நீளங்களை அளந்து எடுக்க வேண்டும்)

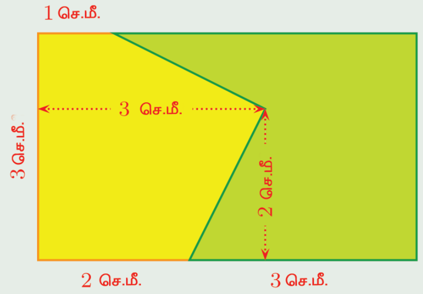


(2) ஒரு பக்கம் 6 சென்டி மீட்டரும், ஒரு கோணம் 60° உம் ஆன சாய்வுசதுரத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமபரப்பளவு உள்ள செங்கோண முக்கோணம் வரைக.

(3) ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணம் வரைந்து, அதே பரப்பளவு உள்ள முக்கோணம் வரைக. பரப்பளவினைக் கணக்கிடுக.

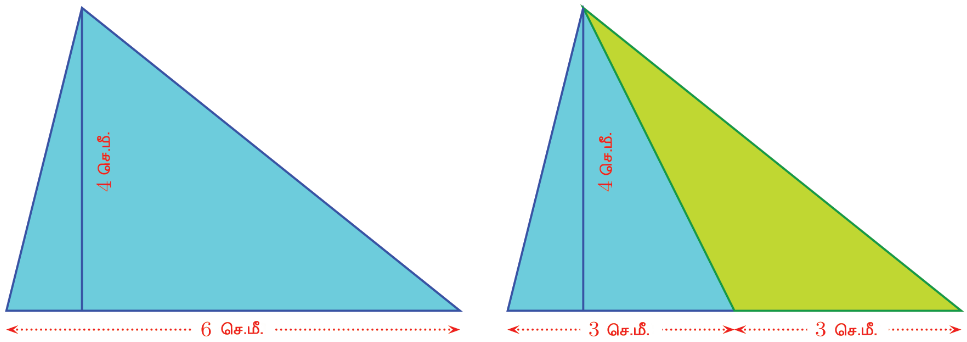
(4) படத்தில் ஒரு செவ்வகம் இரண்டாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்பகுதிகளைப் பிரிக்கும் ஒடிந்த கோட்டிற்குப் பதிலாக ஒரு நேர்கோடு வரைந்து செவ்வகத்தை இதே பரப்பளவு உள்ள வேறு இரு பாகங்கள் ஆக்கவும். இப்பாகங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.



முக்கோணப் பாகம்

இப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியையும் எதிர்ப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு, அதனை இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றது.

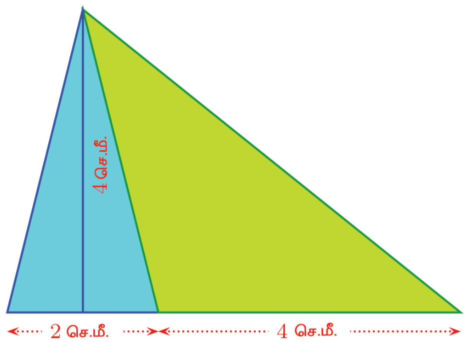
இப்பாகங்களின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

இரண்டுக்கும் அடிப்பக்கம் 3 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

உயரமோ? இரண்டுக்கும் 4 சென்டிமீட்டர் அல்லவா?

அப்படியானால் இரண்டின் பரப்பளவும் ஒரே போல்தான்: 6 சதுர சென்டிமீட்டர்.

இனி மேல் உச்சியைக் கீழ்க்கோட்டின் மையப்புள்ளிக்குப் பதிலாக, வேறு ஏதேனும் புள்ளியுடன் இணைத்தாலோ? எடுத்துக்காட்டாக, இப்படத்தைப் பார்க்கவும்.



இப்போது சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 4 உம், பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 8 உம் சதுர சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

அதாவது, சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் இரு மடங்கே பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவு ஆகும். கீழ்ப்பக்கத்தை வெட்டியிருப்பதும் இதே கணக்கில் அல்லவா? சிறிய துண்டின் நீளத்தின் இரு மடங்கே பெரிய துண்டின் நீளம்.

இதனை விகிதமாகக் கூறினால்?

கீழ்ப்பக்கத்தை வெட்டியிருப்பது $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் ஆகும். முக்கோணத்தின் பரப்பளவினைப் பிரித்திருப்பதும் இதே விகிதத்தில் தான்.

மேல் உச்சியிலிருந்துள்ள கோடு, கீழ்ப் பக்கத்தை எவ்வாறு பிரித்தாலும் இது சரியாகுமா? $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்?

நீளங்கள் இவ்வாறாகும் :

சிறிய பாகத்தின் நீளம் $6 \times \frac{2}{5}$ சென்டிமீட்டர்

பெரிய பாகத்தின் நீளம் $6 \times \frac{3}{5}$ சென்டிமீட்டர்.

பரப்பளவுகள் இவ்வாறாகும்:

சிறிய பாகத்தின் பரப்பளவு $6 \times \frac{2}{5} \times 2 = 12 \times \frac{2}{5}$ சதுர சென்டி மீட்டர்.

பெரிய பாகத்தின் பரப்பளவு $6 \times \frac{3}{5} \times 2 = 12 \times \frac{3}{5}$ சதுர சென்டி மீட்டர்.

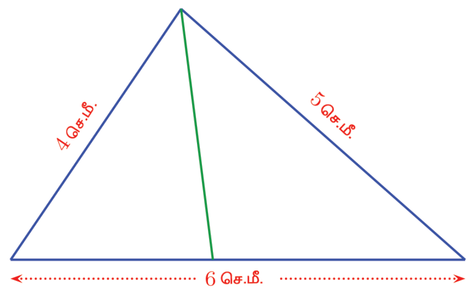
அதாவது, மேலிருந்துள்ள கோடு, முழு முக்கோணத்தின் பரப்பளவான 12 சதுர சென்டிமீட்டரை $2 : 3$ என்ற விகிதத்திலேயே பிரிக்கிறது.

நீளங்களின் விகிதம் எதுவானாலும், அது பரப்பளவுகளின் விகிதமாகும் எனக் காணலாம். முக்கோணத்தின் அளவுகள் மாறினாலும் இக்கூற்றிற்கு மாற்றம் இல்லை.

ஒரு முக்கோணத்தின் எந்த உச்சியிலிருந்தும் எதிர்ப் பக்கத்துக்கு வரையும் ஒரு கோடு, இப்பக்கத்தின் நீளத்தையும், முக்கோணத்தின் பரப்பளவையும் ஒரே விகிதத்திலேயே பிரிக்கிறது.

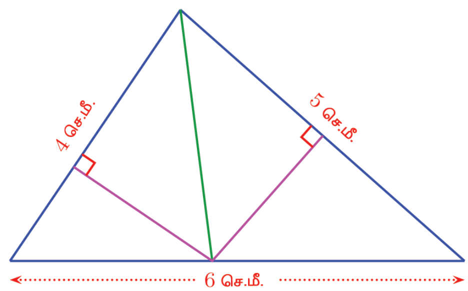
முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியிலிருந்து வரையப்படும் எதிர்ப்பக்கத்தின் இரு சமவெட்டி, முக்கோணத்தையும் இருசமபாகம் செய்கிறது எனக் கண்டோம்.

அப்படியானால் வேறொரு வினா கேட்கலாம். ஓர் உச்சியிலுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டி எதிர்ப்பக்கத்தை (முக்கோணத்தையும்) எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது?



படத்தில் முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியிலுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டி வரையப்பட்டுள்ளது.

கீழ்ப்பக்கத்தைக் கோணத்தின் இரு சமவெட்டி வெட்டும் விகிதத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்.



இங்கு முக்கோணப் பாகங்கள் இரண்டுக்கும் ஒரு பக்கம் தெரியும். எனவே இப்பக்கங்களை உபயோகித்து இவற்றின் பரப்பளவுகளைக் கண்டு பிடிக்க முயற்சி செய்யலாம். அதற்கு எதிர் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும். இரு முக்கோணங் களிலும் தெரிந்த பக்கத்தின் எதிர் உச்சி ஒரே புள்ளி அல்லவா.

இந்தச் செங்குத்துக் கோடுகளைப் பார்த்தால் ஒரே நீளம் உள்ளனவாகத் தோன்றுகின்றன அல்லவா? அது சரியா எனப் பார்க்கலாம். படத்தில் இடப்பக்கமும் வலப்பக்கமும் உள்ள செங்கோண முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கர்ணம் ஆகும்.

இந்தக் கர்ணம் பெரிய முக்கோணத்தின் மேலே உள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டி ஆனதால், சிறிய முக்கோணத்தின் மேலே உள்ள இரு கோணங்களும் சமம் ஆகும். செங்கோண முக்கோணம் ஆனதால் கர்ணத்தின் மற்ற முனையில் உள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும். எனவே இந்த முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களும் சமமாக வேண்டும் அல்லவா. அதாவது, நாம் வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரே நீளம் உள்ளவை ஆகும்.

அப்போது முக்கோணப் பாகங்களின் பரப்பளவுகள், 4 உம் 5 உம் இந்த நீளத்தின் பாதியால் பெருக்கியதாகும்.; அதாவது, அவற்றின் விகிதம் $4 : 5$ ஆகும்.

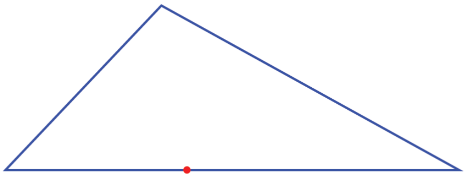
முன்னர் கண்டதற்கு ஏற்ப கோணத்தின் இரு சமவெட்டி எதிர்ப்பக்கத்தின் நீளத்தைப் பிரிப்பதும் இதே விகிதத்திலாகும்.

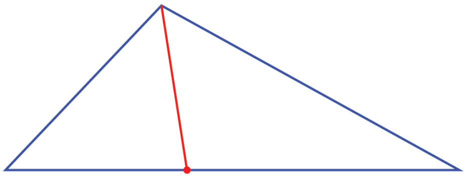
பக்கங்களின் நீளம் எதுவானாலும் இது சரியாகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் எந்தக் கோணத்தின் இரு சமவெட்டியும் எதிர்ப் பக்கத்தைப் பிரிப்பது, கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதத்திலாகும்.

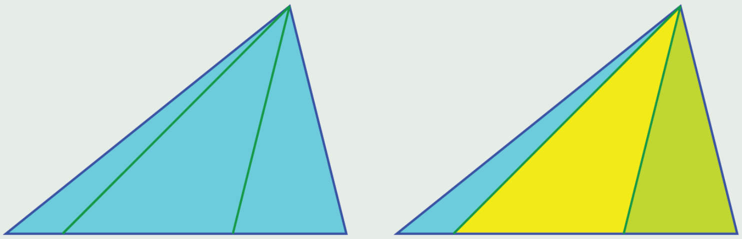
இதனை வேறொரு முறையில் கூறலாம்:

படத்தில் முக்கோணத்தின் கீழ்ப்பக்கத்தில் அடையாளப்படுத்தியிருக்கும் புள்ளி, அப்பக்கத்தை மற்ற இரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. இப்போது கூறியபடி, மேலே உள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டி இப்புள்ளி வழியே செல்ல வேண்டும். அதாவது, மேல் உச்சியையும் இப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடே மேலே உள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டி ஆகும்.



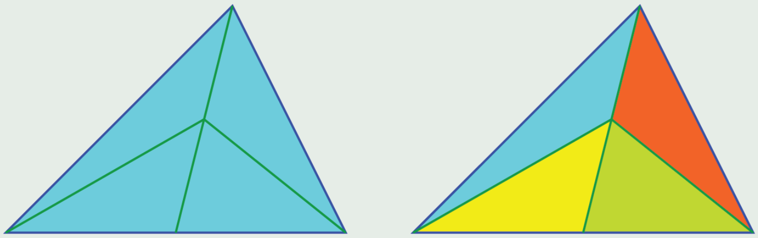


(1) கீழ்க்காணும் படத்தில், ஒரு முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியிலிருந்து கீழ்ப்பக்கத்துக்கு இரு கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.



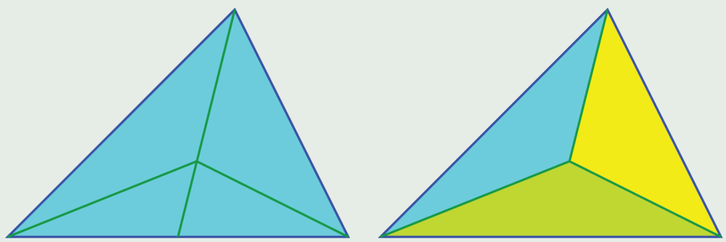
கோடுகள் கீழே உள்ள கோட்டினைப் பிரிக்கும் விகிதமும், படத்தில் உள்ள மூன்று சிறிய முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதமும் ஒரே போல் உள்ளது எனத் தெளிவுபடுத்துக.

(2) கீழ்க்காணும் படத்தில் ஒரு முக்கோணத்தின் மேலே உள்ள உச்சியையும் கீழே உள்ள பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்தப் பின்னர் இக்கோட்டின் மையப்புள்ளியுடன் மற்ற இரு உச்சிகளும் இணைக்கப் பட்டுள்ளன.



இவ்வாறு கிடைக்கும் நான்கு முக்கோணங்களின் பரப்பளவு, பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் நான்கில் ஒரு பாகமாகும் எனத் தெளிவுபடுத்துக.

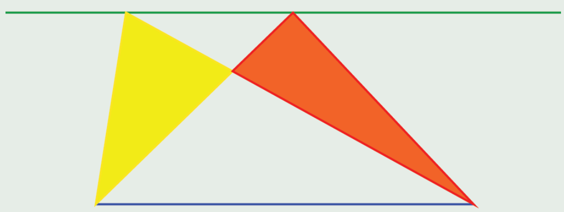
(3) கீழ்க்காணும் படங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியையும் கீழ்ப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்துப் பின்னர் இக்கோட்டினை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியுடன் மற்ற இரு உச்சிகளும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.



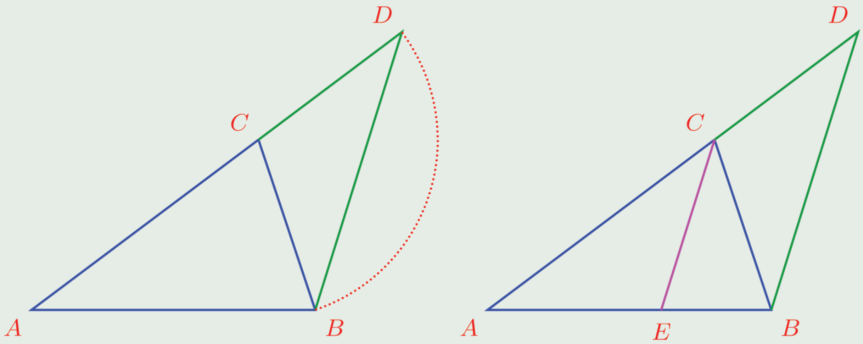
இரண்டாவது படத்தில் மூன்று சிறிய முக்கோணங்களின் பரப்பளவு, பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவின், மூன்றில் ஒரு பாகமாகும் எனத் தெளிவுபடுத்துக.

(4) ஒரு கோணத்தின் இரு சமவெட்டியின் எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரங்கள் சமம் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்துக.

(5) படத்தில் கீழேயும் மேலேயும் கிடைமட்டமாக உள்ள கோடுகள் இணையானவை. மஞ்சள் முக்கோணத்துக்கும் சிவப்பு முக்கோணத்துக்கும் ஒரே பரப்பளவு ஆகும் என நிறுவுக.



(6) படத்தில் ABC என்ற முக்கோணத்தின் AC என்ற பக்கம், CB என்ற பக்கத்தின் நீளத்தையும் சேர்த்து, D வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. மேலும், DB க்கு இணையாக C வழியாகக் கோடு வரைந்து, AB இல் உள்ள E இல் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது.

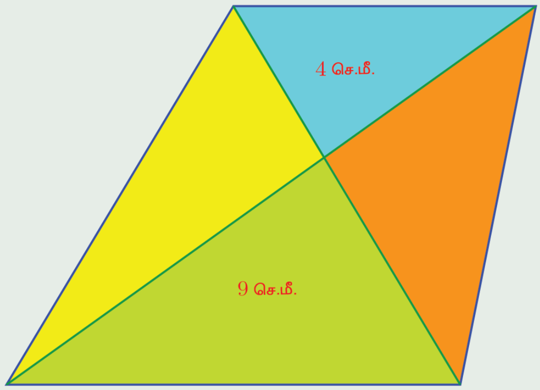


i) CE என்ற கோடு, $\angle C$ ஐச் சமபாகம் செய்கிறது எனத் தெளிவாக்குக.

ii) இதனைப் பயன்படுத்தி, 8 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கோட்டினை 4 : 5 என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பது எவ்வாறு என விளக்குக.

iii) 8 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டினை 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதற்கு இதனைப் பயன்படுத்த இயலுமா? எவ்வாறு?

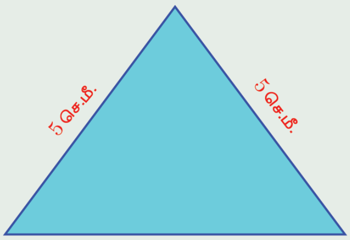
(7) படத்தில் ஒரு சரிவகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அதனை நான்கு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது:



நீல முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 4 சதுர சென்டிமீட்டரும், பச்சை முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 9 சதுர சென்டிமீட்டரும் ஆகும். சரிவகத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(8) பக்கங்களின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒரு சதுரம் வரையவும். இதே பரப்பளவு உள்ள ஓர் இருசமப் பக்க முக்கோணம் வரைக.

(9) கீழே வரையப்பட்டுள்ள இரு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே பரப்பளவு உள்ளது எனத் தெளிவுபடுத்துக.



மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமபரப்பளவு உள்ள பிற முக்கோணங்கள் வரையும் முறையை விளக்குதல். • ஒரு பலகோணத்தின் பரப்பளவு மாறாமல் பிற பலகோணங்களாக மாற்றும் முறைகளை நிறுவுதல். • பலகோணங்களை முக்கோணங்களாக மாற்றி பரப்பளவைக் கணக்கிடுதல். • முக்கோணத்தின் பரப்பளவை வெவ்வேறு விகிதங்களில் பிரிப்பதற்கு உரிய வழிமுறைகளைக் காணுதல். • பரப்பளவுடன் தொடர்பு உள்ள வடிவியல் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகளைக் காணுதல்.			

2 பின்ன எண்கள்

சம பின்னங்கள்

ஒரு பின்ன எண்ணைப் பலமுறைகளில் எழுதலாம் எனக் கண்டோம் அல்லவா; எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

இங்கு $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ என்பவை யாவும் $\frac{1}{2}$ இன் வெவ்வேறு வடிவங்கள் ஆகும்.

இவற்றை $\frac{1}{2}$ க்குச் சமமான பின்னங்கள் எனவும் கூறலாம்.

இதைப் போன்று

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \ldots$$

என்பதால் $\frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \ldots$ என்பவை எல்லாம் $\frac{3}{5}$ இன் பல வடிவங்கள் ஆகும்;

அல்லது $\frac{3}{5}$ க்குச் சமமான பின்னங்கள் ஆகும்.

ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியையும் பகுதியையும் ஒரே எண்ணல் எண்ணால் பெருக்கும் போது அதன் பல வடிவங்கள் அல்லது அதற்குச் சமமான பின்னங்கள் கிடைக்கின்றன.

இயற்கணித மொழியில் கூறினால்,

$\frac{a}{b}$ ஒரு பின்ன எண்ணும் n ஓர் எண்ணல் எண்ணும் எனில்

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$$

இனி சில எண் வரிசைகளைப் பார்க்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{1^2 + 1}{1 + 1} = 1 \qquad \frac{2^2 + 2}{2 + 1} = 2 \qquad \frac{3^2 + 3}{3 + 1} = 3$$

எந்த எண்ணல் எண்ணாக இருந்தாலும் இது சரியாகுமா? எடுத்துக்காட்டாக $\frac{138^2+138}{138+1}$ என்பது 138 தானா?

வர்க்கம் கணக்கிட்டு, கூட்டி வகுத்து சோதித்துப் பார்க்கலாம். இதில் ஒரு இரசனையும் இல்லை. மட்டுமல்ல, அவ்வாறு செய்வதால், ஏன் இவ்வாறு எனத் தெரிந்துகொள்வதும் இல்லை.

அதற்குப்பதிலாக தொகுதியை மாற்றி எழுதலாம்.

$$138^2 + 138 = 138\,(138 + 1)$$

இனி பகுதியும், சேர்த்து எழுதினால்,

$$\frac{138^2+138}{138+1} = \frac{138(138+1)}{138+1} = 138$$

இந்த முறையை இத்தகைய எந்தப் பின்ன எண்ணிலும் பயன்படுத்தலாம் அல்லவா.

இதனை இயற்கணித முறையில் எழுதலாம்:

n எந்த எண்ணல் எண் எனினும் $\frac{n^2+n}{n+1} = \frac{n\,(n+1)}{n+1} = n$

கீழே தரப்பட்டுள்ள வரிசைகள் ஒவ்வொன்றும் ஏன் சரியாகிறது என விளக்குக. இயற்கணிதம் பயன்படுத்திப் பொதுக்கோட்பாடு எழுதுக.

(1) $\frac{1^2+1}{1+1} = 1$ $\quad \frac{2^2+2}{2+2} = 1\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3^2+3}{3+3} = 2$ $\quad \frac{4^2+4}{4+4} = 2\frac{1}{2}$

(2) $\frac{2^2-2}{2-1} = 2$ $\quad \frac{3^2-3}{3-1} = 3$ $\quad \frac{4^2-4}{4-1} = 4$ $\quad \frac{5^2-5}{5-1} = 5$

(3) $\frac{2^2-1}{2-1} = 3$ $\quad \frac{3^2-1}{3-1} = 4$ $\quad \frac{4^2-1}{4-1} = 5$ $\quad \frac{5^2-1}{5-1} = 6$

குறுக்குப் பெருக்கல்

ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியையும் பகுதியையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கினால், அதன் வேறொரு வடிவம் கிடைக்கும். ஆனால் ஒரே பின்ன எண்ணின் ஏதேனும் இரு வடிவங்களுக்கு இடையில் இத்தகைய ஒரு தொடர்பு இருக்க வேண்டும் என்றில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ஆகும், ஆனால் 2 னையும் 4 னையும் ஒரே எண்ணல் எண்ணால் பெருக்கி 3 உம் 6 உம் ஆக்க முடியாது அல்லவா.

அப்படியானால் இரு பின்ன எண்கள் சமமா என எவ்வாறு சோதித்துப் பார்க்கலாம்?

தொகுதியிலும் பகுதியிலும் பொதுக்காரணிகளை நீக்கி, எளிய வடிவத்தில் மாற்றுவது ஒரு வழிமுறையாகும்:

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{42}{63}$ உம் $\frac{70}{105}$ உம் பார்ப்போம்:

$$\frac{42}{63} = \frac{2\times3\times7}{3\times3\times7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{70}{105} = \frac{2\times5\times7}{3\times5\times7} = \frac{2}{3}$$

எனவே $\frac{42}{63}$ உம் $\frac{70}{105}$ உம் $\frac{2}{3}$ இன் இரு வடிவங்கள் ஆகும்.

பெரிய எண்களைக் காரணிகள் ஆக்குதல் (கணினியைப் பயன்படுத்தினாலும்) அவ்வளவு எளிதானது அல்ல; எனவே பின்ன எண்களின் சமத்தன்மையைச் சோதித்துப் பார்க்க வேறொரு வழி முறையைப் பார்ப்போம். எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{119}{221}$ உம், $\frac{133}{247}$ உம் எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றிற்கு ஒரே பகுதி உள்ள வடிவங்கள் உள்ளன அல்லவா. (ஐந்தாம் வகுப்பில் பின்ன எண்களைக் கூட்டுவதற்கு ஒரே பகுதி ஆக்கியது நினைவில் வருகிறது அல்லவா?)

$$\frac{119}{221} = \frac{119\times247}{221\times247}$$

$$\frac{133}{247} = \frac{133\times221}{247\times221}$$

இந்தப் புதிய வடிவங்களின் பகுதி ஒரே போலதான். எனவே சமமா என அறிய தொகுதிகள் சமமா எனப் பார்த்தால் போதும்.

அதாவது 119×247 என்ற பெருக்கற்பலனும், 133×221 என்ற பெருக்கற்பலனும் சமமா எனப் பார்த்தால் போதும். ஒரு கணிப்பான் (கால்குலேட்டர்) பயன்படுத்தி, இதனை மிக விரைவாகச் செய்யலாம்.

$$119\times247 = 29393$$

$$133\times221 = 29393$$

தொகுதியும் பகுதியும் சமமானதால், பின்ன எண்கள் சமமாகும் ;

$$\frac{119}{221} = \frac{133}{247}$$

இங்குச் செய்தவற்றை இயற்கணிதத்தில் எழுதலாம். $\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ என்ற பின்ன எண்கள் சமமானவையா எனப் பார்க்க, முதலில் ஒரே பகுதி ஆன வடிவங்களில் ஆக்க வேண்டும்:

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

இனி சமமாகுமா என்று அறிய தொகுதிகளான aq, bp என்பன சமமா எனப் பார்த்தால் போதும்.

மாறாக, a, b, p, q என்ற ஏதேனும் நான்கு எண்ணல் எண்களில் aq, bp என்ற பெருக்கற்பலன்கள் சமம் எனக் கருதவும்.

அப்படியானால் $\frac{aq}{bq}$, $\frac{bp}{bq}$ என்ற பின்ன எண்களின் தொகுதிகளும் பகுதிகளும் சமமாகும்; ஆகவே

$$\frac{aq}{bq} = \frac{bp}{bq}$$

எனக் கிடைக்கும், தொடர்ந்து இரண்டிலும் தொகுதி, பகுதி என்பவற்றின் பொதுக் காரணிகளை நீக்கி,

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

எனக் காணலாம்.

a, b, p, q என்ற எண்களில் $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ எனில் $aq = bp$

மாறாக, $aq = bp$ எனில் $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$

இம்முறையில் பின்னங்களின் சமத்திலிருந்து எண்ணல் எண்களின் பெருக்கற்பலனின் சமத்திற்குச் சென்று சேர்வதையே குறுக்குப்பெருக்கல் (cross multiplication) எனக் கூறுகிறோம்.

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q}$$

ஒரு பின்ன எண்ணின் இரு வடிவங்களை உபயோகித்து வேறு பல வடிவங்களை உருவாக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{2}$ இன் வேறொரு வடிவம் $\frac{2}{4}$ அல்லவா. இவற்றின் தொகுதிகளையும் பகுதிகளையும் கூட்டிப் பார்க்கவும்.

$$\frac{1+2}{2+4} = \frac{3}{6}$$

இதுவும் $\frac{1}{2}$ இன் வேறொரு வடிவம் தானே?

மேலும் $\frac{1}{2}$ னையும் $\frac{3}{6}$ னையும் எடுத்துக்கொண்டு இச்செயலைச் செய்தால்?

$$\frac{1+3}{2+6} = \frac{4}{8}$$

$\frac{1}{2}$ இன் வேறொரு வடிவம் கிடைத்தது அல்லவா.

$\frac{2}{4}$ உம், $\frac{3}{6}$ உம் எடுத்து இதைச் செய்யலாம்.

$$\frac{2+3}{4+6} = \frac{5}{10}$$

ஏன் இது சரியாகிறது?

எண் தொடர்புகள் பற்றி நன்கு அறிய இயற்கணிதம் அவசியமாகிறது.

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

என எடுத்துத் தொடங்கலாம். $\frac{a+p}{b+q}$ என்ற பின்னமும் ஏன் இவற்றிற்குச் சமம் ஆகிறது என்பதையே அறிய வேண்டும்.

$\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ என்பன சமமானதால்,

$$aq = bp$$

மேலும் $\frac{a+p}{b+q}$ என்ற பின்னமும் $\frac{a}{b}$ என்ற பின்னமும் சமமாக வேண்டுமெனில், குறுக்குப்பெருக்கலின் படி, $(a+p)b$ என்ற பெருக்கற்பலனும் $(b+q)\,a$ என்ற பெருக்கற்பலனும் சமமாக வேண்டும், ஒவ்வொன்றாகப் பார்க்கலாம்.

$$(a+p)\,b = ab + pb$$
$$(b+q)\,a = ba + qa$$

ab, *ba* இவை ஒரேபோல் அல்லவா, எனவே இரு பெருக்கற்பலன்களின் இறுதியில் எழுதிய வடிவில் *ab* உள்ளது. முதலாவது பெருக்கற்பலனில் மீதி உள்ளது *pb;* இரண்டாவதில் *qa*. இதில் *pb* என்பது *bp* உம், *qa* என்பது *aq* உம் ஆகும். இவை சமம் என முன்னரே கண்டுள்ளோம். ஆகவே பெருக்கற்பலன்கள் சமமாயின அல்லவா?

ஒரு ஜோடி சம பின்னங்களிலிருந்து வேறொரு ஜோடி சம பின்னங்களை உருவாக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

இந்தப் பின்னங்களின் தொகுதி, பகுதிகளின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் பயன்படுத்தி, புதிய பின்னங்களை உருவாக்கலாம்:

$$\frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{10+4}{10-4} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

வேறொரு ஜோடியைப் பார்க்கவும்:

$$\frac{4}{2} = \frac{16}{8}$$

கபடம் இல்லா வினா

ஆறாவது வகுப்பில் படிக்கும் தம்பி கேட்டான்: "$\frac{1}{2}$ உம் $\frac{2}{4}$ உம் ஒன்றுதான் என ஆசிரியர் கூறியது. 2 மிட்டாய் களிலிருந்து 1 ஐ எடுப்பதும் 4 மிட்டாய் களிலிருந்து 2 ஐ எடுப்பதும் ஒரே போல் அல்ல. முதலில் ஒரு மிட்டாய் அல்லவா கிடைத்தது?"

உங்கள் பதில் என்ன?

இதிலிருந்து

$$\frac{4+2}{4-2} = 3$$

$$\frac{16+8}{16-8} = \frac{24}{8} = 3$$

எந்த ஜோடி சம பின்னங்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் இதைப் போன்று தொகுதி, பகுதி என்பவற்றின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் பயன்படுத்தி மற்றொரு ஜோடி சம பின்னங்களை உருவாக்க இயலுமா?

இயற்கணித மொழியில், $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ எனில், $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{p+q}{p-q}$ என்பன சமமாகுமா என்பதே வினா.

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ என எடுத்துக்கொண்டால் $aq = bp$ எனவும் கிடைக்கும். மேலும் $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{p+q}{p-q}$ ஆகியன சமமா என்று அறிய, குறுக்குப்பெருக்கல் முறையில் $(a+b)(p-q)$, $(a-b)(p+q)$ என்பன சமமாகுமா எனக் கண்டால் போதும்.

$$(a+b)(p-q) = ap - aq + bp - bq$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கச் சொற்றொடரில் $aq = bp$ என உபயோகித்தால் அது $ap - bq$ எனச் சுருங்கும்; எனவே

$$(a+b)(p-q) = ap - bq$$

இதைப் போன்று

$$(a-b)(p+q) = ap + aq - bp - bq$$

என்பதன் வலப்பக்கச் சொற்றொடரும் $ap - bq$ ஆகும்; ஆகவே

$$(a-b)(p+q) = ap - bq$$

அவ்வாறு $(a+b)(p-q)$ என்ற எண்ணும் $(a-b)(p+q)$ என்ற எண்ணும் $ap - bq$ என்ற எண்ணே ஆகும்; ஆகவே

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{p+q}{p-q}$$

(1) ஒரு ஜோடி சம பின்னங்களிலிருந்து வேறொரு ஜோடியை உருவாக்கும் இந்த முறையைப் பார்க்கவும்:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

i) வேறு சில சம பின்னங்களின் ஜோடிகளை எடுத்துப் பார்க்கவும். ஒன்றின் பகுதியையும் மற்றொன்றின் தொகுதியையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றினாலும் சமமான பின்ன எண்களே கிடைக்கின்றனவா?

ii) இயற்கணிதம் உபயோகித்து இதனை ஒரு பொதுக் கோட்பாடாக எழுதி விளக்கவும்.

(2) இந்தக் கணக்குகளைப் பார்க்கவும்:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{(3 \times 1) + (4 \times 2)}{(3 \times 2) + (4 \times 4)} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{(3 \times 1) + (4 \times 3)}{(3 \times 2) + (4 \times 6)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

i) $\frac{1}{2}$ க்குச் சமமான வேறு சில பின்ன எண்களை எடுத்து இதுபோன்று தொகுதிகளையும் பகுதிகளையும் 3 ஆலும் 4 ஆலும் பெருக்கிக் கூட்டிப் பார்க்கவும்; $\frac{1}{2}$ க்குச் சமமான பின்ன எண் கிடைக்கிறதா?

ii) சமமான வேறு சில பின்ன எண்களின் ஜோடிகளை எடுத்துக்கொண்டு, இது சரியாகுமா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

iii) இந்தக் கணக்குகள் அனைத்திலும், தொகுதிகளையும் பகுதிகளையும் 3 ஆலும் 4 ஆலும் பெருக்கிக் கூட்டுவதற்குப் பதிலாக, வேறு ஏதேனும் எண்களால் பெருக்கிக் கூட்டிப் பார்க்கவும்.

iv) $\frac{p}{q}$ என்ற பின்ன எண் $\frac{a}{b}$ என்ற பின்ன எண்ணுக்குச் சமம் எனில், m, n என்ற எந்த இரு எண்ணல் எண்களை எடுத்துக்கொண்டாலும் $\frac{ma + np}{mb + nq}$ என்ற பின்ன எண் $\frac{a}{b}$ க்குச் சமமாவது எதனால் என விளக்கவும்.

(3) ஓர் எண்ணின் வர்க்கத்துடன் ஒன்று கூட்டியதை, வர்க்கத்திலிருந்து ஒன்று கழித்துக் கிடைத்த எண்ணால் வகுத்தபோது $\frac{221}{220}$ கிடைத்தது. எண் எது?

(4) ஓர் எண்ணினுடையவும் அதன் வர்க்கத்தினுடையவும் தொகை அவற்றின் வித்தியாசத்தின் ஒன்றரை மடங்கு ஆகும். எண் எது?

பெரியதும் சிறியதும்

$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ என்பனவற்றில் பெரியது எது?

$\frac{3}{5}$ தான் பெரியது என உறுதிப்படுத்தியது எவ்வாறு?

ஐந்து சமப் பாகங்களில் 2 எண்ணிக்கை சேர்த்ததே $\frac{2}{5}$; இத்தகைய பாகங்கள் 3 சேர்ந்ததே $\frac{3}{5}$ ஆகும். எனவே $\frac{3}{5}$ பெரியது ஆகும். இதனை இவ்வாறு சுருக்கி எழுதலாம்:

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$$

பொதுவாகக் கூறினால், ஒரே பகுதி உள்ள பின்ன எண்களில் பெரிய தொகுதி உள்ள எண்ணே பெரியது. வேறொரு முறையில் கூறினால், ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியை மட்டும் பெரியதாக ஆக்கினால் எண் பெரியது ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

மாறாக, பகுதியை மட்டும் பெரியதாக ஆக்கினாலோ?

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{3}{4}$ உம் $\frac{3}{5}$ உம் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

4 சமப் பாகங்களில் ஒவ்வொன்றும், 5 சமப் பாகங்களில் உள்ள ஒவ்வொன்றையும் விடப் பெரியதாகும்.

எனவே முதலாவது பாகங்களில் 3 எண்ணிக்கை எடுத்துக்கொண்டால், இரண்டாவது பாகங்களில் 3 எண்ணிக்கை எடுத்துக்கொள்வதைவிடப் பெரியது ஆகும், அதாவது $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$

பொதுவாகக் கூறினால், தொகுதி ஒரேபோல் உள்ள பின்ன எண்களில், சிறிய பகுதி உள்ள எண்ணே பெரியது. இதை இவ்வாறும் கூறலாம். ஒரு பின்ன எண்ணின் பகுதியை மட்டுமே சிறியதாக ஆக்கினால் எண் பெரியது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{5}{9} < \frac{5}{8} < \frac{5}{7} < \frac{5}{6}$$

$\frac{3}{7}, \frac{4}{5}$ என்பன, இவற்றில் பெரியது எது?

இப்போது கண்டதற்கு ஏற்ப, $\frac{3}{7}$ ஐ, $\frac{3}{5}$ என ஆக்கினால் பெரியது ஆகும்; $\frac{3}{5}$ ஐ, $\frac{4}{5}$ என ஆக்கினால் மீண்டும் பெரியது ஆகும்; அதாவது

$$\frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

இதுபோன்று $\frac{5}{6}$ உம் $\frac{4}{9}$ உம் எடுத்துக்கொண்டால்

$$\frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{5}{6}$$

பொதுவாகக் கூறினால், ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியைப் பெரியதாகவும், பகுதியைச் சிறியதாகவும் ஆக்கினால் எண் பெரியது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{1}{10} < \frac{2}{9} < \frac{3}{7} < \frac{4}{5}$$

மேலும் $\frac{1}{2}$ னையும் $\frac{2}{3}$ னையும் பார்க்கவும்: இவற்றில் பெரியது எது?

இதுவரை கண்ட வழிமுறைகள் ஒன்றுமே பலன் தருவன அல்லவே (எதனால்?)

இருபின்ன எண்களின் ஒரே பகுதி உள்ள வடிவங்களைக் காணலாம்:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

இதில் பெரிய தொகுதி உள்ளது அல்லவா பெரியது; அதாவது $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$; மீண்டும் பழைய வடிவத்தில் எழுதினால் $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

இதுபோன்று $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ என்ற பின்ன எண்களில் பெரியதைக் கண்டுபிடிக்க, முதலில் ஒரே பகுதி உள்ள பின்ன எண்களாக ஆக்க வேண்டும்:

$$\frac{3}{4} = \frac{21}{28} \qquad \frac{5}{7} = \frac{20}{28}$$

இதில் தொகுதிகளை மட்டும் பார்த்து $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ எனக் காணலாம் அல்லவா. இங்குப் பயன்படுத்திய முறையை ஒரு பொதுக்கோட்பாடாக ஆக்கி இயற்கணிதத்தில் எழுதலாம்.

$\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ என்பனவற்றில் பெரியதைக் கண்டுபிடிக்க முதலில் இரண்டையும் ஒரே பகுதி உள்ள வடிவத்தில் ஆக்க வேண்டும்:

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

இனி aq, bp என்பனவற்றில் பெரியது எது எனப் பார்த்தால் போதும்.

மாறாக, a, b, p, q என்ற ஏதேனும் நான்கு எண்ணல் எண்களில் $aq < bp$ எனக் கருதவும். அப்போது $\frac{aq}{bq}$, $\frac{bp}{bq}$ என்ற பின்ன எண்களில் முதலாவதன் தொகுதி சிறியது என வரும்; இவற்றிற்கு ஒரே பகுதி ஆனதால் இதிலிருந்து $\frac{aq}{bq} < \frac{bp}{bq}$ எனக் காணலாம். இரண்டிலும் தொகுதி, பகுதி என்பனவற்றின் பொதுக் காரணிகளை நீக்கினால், $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ எனக் கிடைக்கும்.

a, b, p, q என்ற எண்ணல் எண்களில் $aq < bp$ எனில் $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$

மாறாக $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ எனில் $aq < bp$

அதாவது, இரு பின்ன எண்களில் பெரியது, சிறியது அறிவதற்கும் குறுக்குப்பெருக்கலைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதே பொருளாகும்.

இனி சில கணக்குகளைப் பார்க்கலாம்:

$\frac{2}{3}$ இன் தொகுதியிலும் பகுதியிலும் 1 ஐக் கூட்டினால் $\frac{3}{4}$ ஆகும். இதில் $\frac{3}{4}$ அல்லவா பெரியது.

வேறொரு பின்னம், எடுத்துக்காட்டாக $\frac{5}{9}$ ஐ எடுத்துக்கொண்டு தொகுதியிலும் பகுதியிலும் 1ஐக் கூட்டினால் $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ கிடைக்கும்; $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{9}$ ஆகியவற்றில் பெரியதை அறிய, 3×9 உம் 5×5 உம் பார்த்தால் போதும் அல்லவா; எனவே $\frac{5}{9} < \frac{3}{5}$.

இது எல்லாப் பின்ன எண்களுக்கும் சரியாகுமா?

$\frac{4}{3}$ ஐ எடுத்துக் கொண்டாலோ? தொகுதியிலும் பகுதியிலும் 1ஐக் கூட்டினால் $\frac{5}{4}$;

எனவே $3 \times 5 < 4 \times 4$ ஆனதால் $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$ எனவும் கிடைக்கும்.

இங்கு நிகழ்வு மாறாக ஆகிவிட்டது, முன்னர் எடுத்த பின்ன எண்களிலிருந்து $\frac{4}{3}$ க்கு என்ன வேறுபாடு?

எனவே இக்காரியத்தைக் குறித்துப் பொதுவாக என்ன ஊகிக்கலாம்?

அது சரியாகுமா எனச் சோதித்துப் பார்க்க இயற்கணிதம் உபயோகிக்கலாம்.

a, b என்ற எண்ணல் எண்களில் $a < b$ எனக் கருதவும். $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ ஆகுமா எனச் சோதித்துப் பார்க்க வேண்டும். அதற்கு $a\,(b + 1)$, $b\,(a + 1)$ என்பனவற்றின் பெருக்கல் பலன்களைக் காண வேண்டும்.

$$a\,(b+1) = ab + a$$
$$b\,(a+1) = ba + b$$

$ba = ab$ அல்லவா; எனவே $ab + a$, $ab + b$ ஆகியவற்றில் பெரியது எது எனக் காண வேண்டும்.

a, b ஆகியவற்றில் பெரியது b; ஆகவே ab என்ற எண்ணுடன் b என்ற எண்ணைக் கூட்டியது, a கூட்டியதைவிடப் பெரியது. அதாவது $ab + a < ab + b$; அல்லது, $a\,(b + 1) < b\,(a + 1)$. இதிலிருந்து $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ எனக் கிடைக்கும்.

இனி $b < a$ என எடுத்துச் செய்து பார்க்கவும்:

$\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$ எனக் கிடைத்தது அல்லவா?

வேறொரு கணக்கு: சமமான இரு பின்ன எண்களின் தொகுதியையும் பகுதியையும் கூட்டி, இரண்டுக்கும் சமமான வேறொரு பின்னம் உருவாக்கலாம் எனக் கண்டோம் அல்லவா. சமம் அல்லாத இரு பின்னங்களில் இச் செயல் செய்தாலோ?

எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ என அறியலாம்; தொகுதிகளையும் பகுதிகளையும் கூட்டிப் பார்க்கலாம் :

$$\frac{1+3}{2+4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ உம் $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ உம் அல்லவா, அதாவது,

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

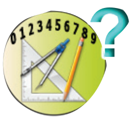
இது எல்லாப் பின்னங்களுக்கும் சரியாகுமா? வேறு சில பின்னங்களின் ஜோடிகளை எடுத்துச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

இது பொதுவாகச் சரியாகுமா என அறிவதற்கு இயற்கணிதம் உபயோகிக்கலாம்; $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ என எடுத்துத் தொடங்கலாம். எனவே $aq < bp$, இனி $\frac{a}{b}, \frac{a+p}{b+q}$ என்பனவற்றில் பெரியதைக் கண்டுபிடிக்க $a\,(b+q)$, $b\,(a+p)$ எனப் பெருக்கற் பலன்களைக் காண வேண்டும்.

$$a\,(b+q) = ab + aq$$

$$b\,(a+p) = ab + bp$$

$aq < bp$ ஆனதால் $ab + aq < ab + bp$; எனவே $a\,(b+q) < b(a+p)$ அதனால் $\frac{a}{b} < \frac{a+p}{b+q}$ இதைப் போன்று $\frac{a+p}{b+q} < \frac{p}{q}$ என்றும் காணலாம் அல்லவா (செய்து பார்க்கவும்)



இந்தக் கணக்கிலிருந்தும் முதலாவது கணக்கிலிருந்தும் கிடைத்துள்ள பொதுக்கோட்பாடுகளுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்பு என்ன?

இந்த முறையைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ எனக் கண்டோம். இந்தப் பின்னங்களின் இடையில் இதை மீண்டும் பயன்படுத்தினால் $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ எனக் காணலாம். இதனை எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் தொடரலாம் அல்லவா.

(1) கீழே உள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி பின்ன எண்களிலும் பெரியது எது என்பதைப் பெருக்கல் செயல் செய்யாமல் காணவும்:

i) $\frac{13}{17}, \frac{14}{15}$ ii) $\frac{13}{17}, \frac{11}{18}$ iii) $\frac{14}{15}, \frac{11}{18}$

(2) கீழே உள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி பின்ன எண்களிலும் பெரியது எது என மனக்கணக்காகச் செய்து கூறவும்.

i) $\frac{3}{5}, \frac{8}{13}$ ii) $\frac{3}{5}, \frac{6}{11}$ iii) $\frac{101}{102}, \frac{98}{99}$

(3) i) $\frac{1}{3}$ ஐ விடப் பெரியதும் $\frac{1}{2}$ ஐ விடச் சிறியதுமான மூன்று பின்ன எண்களைக் காணவும்.

ii) பகுதி 24 ஆன இதுபோன்ற மூன்று பின்ன எண்களைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

iii) தொகுதி 4 ஆன இது போன்ற மூன்று பின்ன எண்களைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(4) ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியுடனும் பகுதியுடனும் ஒரே எண்ணல் எண்ணைக் கூட்டி வேறொரு பின்னம் உருவாக்கப்பட்டது.

i) எத்தகைய பின்ன எண்ணில் இந்தச் செயல் செய்யும் போது சற்று பெரிய பின்ன எண் கிடைக்கும்?

ii) எத்தகைய பின்ன எண்ணில் இந்தச் செயல் செய்யும் போது சற்று சிறிய பின்ன எண் கிடைக்கும்?

பின்னங்களின் செயல்பாடுகள்

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ என்பவற்றின் தொகை என்ன?

இரண்டையும் $\frac{1}{6}$ களாக மாற்றியல்லவா கூட்டுவது:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}; \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ ஆனாலோ?

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}; \frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$$

பின்ன எண்களைக் கூட்டுவதற்கு உரிய பொதுவான முறையை இயற்கணிதத்தில் எழுதலாம். பின்ன எண்களை $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ என எடுத்துக் கொள்வோம். முதலில் இரண்டையும் ஒரே பகுதி உள்ள பின்ன எண்கள் ஆக்கலாம்.

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

இனி தொகுதிகளைக் கூட்டினால் போதும்:

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq}{bq} + \frac{bp}{bq} = \frac{aq+bp}{bq}$$

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ என்ற எந்த இரு பின்ன எண்களை எடுத்தாலும்

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) + (4 \times 2)}{4 \times 7} = \frac{29}{28} = 1\frac{1}{28}$$

இரு பின்ன எண்களின் வித்தியாசம் காணும் வழிமுறை யினையும் இது போன்று எழுதலாம்:

பயன்பாடும் கோட்பாடும்

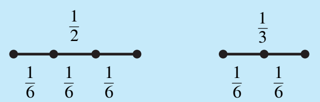
பின்ன எண்களின் கூட்டல் இயற்கணித வடிவில்

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$$

என்றல்லவா. இச்செயல் அவ்வளவு எளிதானது அல்ல.

எதனால் இவ்வாறு ஆயிற்று? எண்கள் உபயோகிக்கும் சூழல்களுக்கு ஏற்பவே அவற்றைக் குறித்துள்ள கணிதக் கோட்பாடுகள் உருவாக்கப்படுகின்றன. (மாறாக அல்ல). எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{2}$ மீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கயிறையும், $\frac{1}{3}$ மீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கயிறையும் சேர்த்து வைத்தால், மொத்த நீளம் எவ்வளவு?

$\frac{1}{2}$ மீட்டர் எனில் மூன்று $\frac{1}{6}$ மீட்டர்கள் சேர்ந்தது ஆகும். $\frac{1}{3}$ மீட்டரோ? இரு $\frac{1}{6}$ மீட்டர்கள் சேர்ந்தது.



இவற்றைச் சேர்த்து வைத்தால் மொத்தம் ஐந்து $\frac{1}{6}$ மீட்டர், அதாவது $\frac{5}{6}$ மீட்டர்.

எனவே $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ இதைப் போன்றுள்ள சூழல்களிலிருந்தே இத்தகைய எல்லாத் தொகைகளுக்கும் பொருந்தும் செயல்விதிமுறைகள் உருவாக்கப்படுகின்றன.

$\frac{p}{q} < \frac{a}{b}$ என்ற எந்த இரு பின்ன எண்களை எடுத்தாலும்

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq - bp}{bq}$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) - (4 \times 2)}{4 \times 7} = \frac{13}{28}$$

தொகுதி 1 ஆன பின்ன எண்களில், இச்செயல்கள் மிகவும் எளிதாகும்.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(1 \times b) + (1 \times a)}{ab} = \frac{b + a}{ab}$$

இதுபோன்று $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} = \frac{11 + 9}{9 \times 11} = \frac{20}{99}$

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{11 - 9}{9 \times 11} = \frac{2}{99}$$

சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம் :

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3}, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \times 4}$$

என்றெல்லாம் காணலாம் அல்லவா. எனவே

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

எனக் காணலாம்.

வேறொரு வினா

ஒரு தேர்வின் வினாத்தாளில் A, B என இரு பாகங்கள் உள்ளன.
A இல் 2 வினாக்கள், B இல் 3 வினாக்கள்.
ஒருவர் A யிலும் B யிலும் ஒவ்வொரு வினாவிற்கு மட்டுமே விடை எழுதினார்.
இவர் மொத்த வினாக்களின் $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ பாகத்திற்கு மட்டுமே விடை எழுதினார் எனக்கூறினால், சரியாகுமா?

$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}$ என இவ்வாறு தொடர்ந்து $\frac{1}{99 \times 100}$ வரை கூட்டினால் என்ன கிடைக்கும்?

முதலில் பார்த்த கணக்குகளை இவ்வாறும் எழுதலாம்:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

அதாவது தொகுதி 1 ஆன எந்தப் பின்ன எண்ணையும், அதே வகையிலுள்ள இரு பின்ன எண்களின் தொகையாக எழுதலாம். (தொகுதி 1 ஆன பின்னங்களை ஓரலகுப் பின்னங்கள் (unit fractions) எனக் கூறலாம்)

தொகுதி 2 ஆன பின்னங்களை, வேறுபட்ட மூன்று ஓரலகுப் பின்னங்களின் தொகையாக எழுதுவது எவ்வாறு?

இனி பின்ன எண்களின் பெருக்கலையும் வகுத்தலையும் பார்ப்போம். இரு பின்னங்களின் பெருக்கற்பலன் என்பது, அவற்றின் தொகுதிகளையும் பகுதிகளையும் வெவ்வேறாகப் பெருக்கிக் கிடைக்கும் பின்ன எண் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

பொதுவாகக் கூறினால்,

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ **என்ற எந்த இரு பின்ன எண்களை எடுத்தாலும்**

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq}$$

ஒரு பின்ன எண்ணை வேறொரு பின்ன எண்ணால் வகுப்பது என்பது முதலாவதை, இரண்டாவதன் தலைகீழியால் பெருக்குவது ஆகும் எனத் தெரியும் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

இதனையும் இயற்கணிதத்தில் எழுதலாம்,

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ **என்ற எந்த இரு பின்ன எண்களை எடுத்தாலும்**

$$\frac{a}{b} \div \frac{p}{q} = \frac{aq}{bp}$$

சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad 2 + 2 = 4 \qquad 2 \times 2 = 4$$

தொகை 1 ஆன வேறு இரு பின்ன எண்களைப் பார்ப்போம்:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \qquad 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

மேலும் ஒன்று:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \qquad \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{25}{6} \qquad \frac{5}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$$

தொகை 1 ஆன எந்த ஜோடி பின்ன எண்களினுடையவும் தலைகீழிகளின் தொகையும் பெருக்கற்பலனும் சமமாகுமா?

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திப் பார்ப்போம். $\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = 1$ என எடுத்துத் தொடங்கலாம்.

எனவே

$$\frac{aq + bp}{bq} = 1$$

பின்ன எண் 1 எனில் தொகுதியும் பகுதியும் சமமாக வேண்டும். எனவே

$$aq + bp = bq$$

இனி தலைகீழிகளின் தொகையைப் பார்ப்போம்:

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{bp + aq}{ap}$$

$aq + bp = bq$ ஆனதால், சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் உள்ள பின்னம் $\frac{bq}{ap}$ ஆகும்; அதாவது,

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{bq}{ap}$$

தலைகீழிகளின் பெருக்கற் பலனோ?

$$\frac{b}{a} \times \frac{q}{p} = \frac{bq}{ap}$$

அதாவது

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{b}{a} \times \frac{q}{p}$$

கீழ்க்காணும் கணக்குகள் ஒவ்வொன்றிலும் பொதுக்கோட்பாட்டைக் கண்டு பிடித்து, இயற்கணிதமுறையில் விளக்கவும் :

1) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2^2 - 1}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{2}{3^2 - 1}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = \frac{2}{4^2 - 1}$

2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{1 \times 2}$; $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{2 \times 3}$;

$\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{3 \times 4}$

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ $\qquad$ $\frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{9}{20}$

4. $4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3$ $\qquad$ $4\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2} = 3$

$5\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} = 4$ $\qquad$ $5\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{3} = 4$

$6\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 5$ $\qquad$ $6\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{4} = 5$

தசம வடிவங்கள்

10, 100, 1000 என 10 இன் அடுக்குகள் பகுதி ஆன பின்னங்களின் சுருக்கம் அல்லவா தசமவடிவம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{23}{100} = 0.23$$

$$\frac{327}{1000} = 0.327$$

$$\frac{3}{100} = 0.03$$

சில பின்னங்களின் பகுதி 10 இன் அடுக்கு அல்ல எனினும் இவ்வடிவில் மாற்றி எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75$$

வேறு சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்க்கலாம். $\frac{1}{8}$ ஐத் தசம வடிவில் எழுதுவது எவ்வாறு? $8 = 2^3$ அல்லவா; மேலும்

$$10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$

என எழுதலாம். அதாவது

$$1000 = 8 \times 125$$

இதிலிருந்து

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000} = 0.125$$

இது போன்று

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0.024$$

இனி $\frac{3}{160}$ ஆனாலோ?

முதலாவது, பகுதியைக் காரணிகள் ஆக்கலாம்.

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5 = 2^4 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 10$$

இதனைப் பெருக்கி, 10 இன் எந்த அடுக்காக எழுதலாம்?

அதற்கு எந்த எண்ணால் பெருக்க வேண்டும்? $2^4 \times 5^4 = 10^4$ அல்லவா?

அதாவது,

$$160 \times 5^4 = (2^4 \times 10) \times 5^4 = 2^4 \times 5^4 \times 10 = 10^5 = 100000$$

எனவே

$$\frac{3}{160} = \frac{3 \times 5^4}{160 \times 5^4} = \frac{3 \times 625}{100000} = \frac{1875}{100000} = 0.01875$$

இவ்வாறு எல்லாப் பின்னங்களுக்கும் தசம வடிவம் காண இயலுமா?

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{3}$ ஆனாலோ?

3 ஐ ஏதேனும் எண்ணால் பெருக்கினால், 10 இன் அடுக்கு கிடைக்குமா? வேறொரு முறையில் வினவினால் 10 இன் ஏதேனும் அடுக்கில் 3 ஒரு காரணியாகுமா?

10 இன் பகாக் காரணிகள் 2 உம் 5 உம் மட்டும் அல்லவா; ஆகவே, 10 இன் எந்த அடுக்குக்கும் பகாக் காரணிகள் இவை இரண்டுமே.

ஆனால் 10 இன் எந்த ஓர் அடுக்கின் காரணியும் 3 ஆகாது; அதனால், $\frac{1}{3}$ க்கு 10 இன் ஏதேனும் அடுக்கு பகுதி ஆன வடிவம் இல்லை. ஆனால் மற்றொன்று செய்யலாம்; 10 இன் அடுக்குகள் பகுதி ஆன பின்ன எண்களின் ஒரு வரிசையையே $\frac{1}{3}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் முறையில் உருவாக்கலாம்.

அதற்கு முதலில் $\frac{1}{3}$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாம்: $\frac{1}{3} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3}$

நீளத்தின் தசமம்

$\frac{1}{8}$ மீட்டர் என்பதை மேலும் சிறிய அளவு பயன்படுத்தி, பின்னம் இல்லாது எழுதுவது எவ்வாறு? முதலில் டெசிமீட்டர் ($\frac{1}{10}$ மீட்டர்) பயன்படுத்தி முயற்சிக்கலாம்.

$\frac{1}{8}$ மீட்டர் என்றால் $\frac{10}{8}$ டெசிமீட்டர். அதாவது $1\frac{2}{8}$ டெசிமீட்டர். இந்த $\frac{2}{8}$ டெசி மீட்டரைச் சென்டிமீட்டரில் கூறினாலோ? $\frac{20}{8}$ சென்டிமீட்டர், அதவாது $2\frac{4}{8}$ சென்டி மீட்டர். இந்த $\frac{4}{8}$ சென்டி மீட்டரை மில்லி மீட்டர் ஆக்கினாலோ? $\frac{40}{8} = 5$ மில்லி மீட்டர். எனவே $\frac{1}{8}$ மீட்டர் என்பது 1 டெசிமீட்டர், 2 சென்டிமீட்டர், 5 மில்லி மீட்டர். அதாவது 125 மில்லிமீட்டர்.

இதில் $\frac{10}{3}$ என்பதை $3 + \frac{1}{3}$ என எழுதலாம் அல்லவா. ஆகவே மேலே எழுதப்பட்ட சமன்பாட்டினை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{10}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் ஒரு பின்னம் 10 பகுதியான $\frac{3}{10}$ ஆகும். இதற்கும் $\frac{1}{3}$ க்கும் இடையிலுள்ள வித்தியாசம்.

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

இதுபோன்று $\frac{1}{3}$ உடன் மேலும் நெருங்கிய, 100 பகுதி ஆன பின்னம் உருவாக்கலாம். அதற்கு $\frac{1}{3}$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{3}$$

தொடர்ந்து, வலப்பக்கத்திலுள்ள $\frac{100}{3}$ ஐ $33 + \frac{1}{3}$ என எழுதினால்,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{100}\left(33 + \frac{1}{3}\right) = \frac{33}{100} + \frac{1}{300}$$

எனவும், இதனைச் சிறிது மாற்றி எழுதினால்

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

எனவும் காணலாம்.
இவ்வாறு தொடர்ந்தால்

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000} = \frac{1}{30000}$$

என்றெல்லாம் காணலாம். அதாவது, $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$ என இவ்வாறு தொடரும் பின்ன எண்களுக்கும் $\frac{1}{3}$ க்கும் உள்ள வித்தியாசம் குறைந்து வருகிறது. இந்த வித்தியாசத்தை எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் சிறியது ஆக்கலாம். வேறொரு விதத்தில் கூறினால்,

$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$ எனத் தொடரும் பின்ன எண்கள் $\frac{1}{3}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.
இதனைச் சுருக்கி எழுதுவது இவ்வாறாகும்.

முற்றுப்பெறாத அளவுகள்

$\frac{1}{3}$ மீட்டரைப் பின்னம் இல்லாது கூறுவது எவ்வாறு? டெசிமீட்டர் ஆக்கினால் $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ டெசிமீட்டர் எனக் கிடைக்கும். $\frac{1}{3}$ டெசிமீட்டரைச் சென்டி மீட்டர் ஆக்கினாலோ? மீண்டும் $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ சென்டிமீட்டர். $\frac{1}{3}$ சென்டிமீட்டரை மில்லி மீட்டர் ஆக்கினாலோ? மீண்டும் $3\frac{1}{3}$ மில்லி மீட்டர். ஆகவே $\frac{1}{3}$ மீட்டர் எனில் 3 டெசிமீட்டர், 3 சென்டிமீட்டர், 3 மில்லிமீட்டர், மேலும் $\frac{1}{3}$ மில்லி மீட்டர். அதாவது $333\frac{1}{3}$ மில்லிமீட்டர். ஒரு மில்லி மீட்டரின் $\frac{1}{1000}$ பாகமான மைக்ரோமீட்டர் உபயோகித்தாலோ? $333333\frac{1}{3}$ மைக்ரோமீட்டர்.

மீண்டும் மீண்டும் பத்துச் சமப் பாகங்கள் ஆக்கினாலும் இது முற்றுப்பெறுமா?

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

இதில் 0.333... என்ற தசம வடிவம், இது வரை கண்ட தசம வடிவங்களிலிருந்து வேறுபட்டது என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்:

முன்னர் கண்ட தசம வடிவங்கள் அனைத்தும் பத்தின் ஏதேனும் அடுக்கு, பகுதி ஆன ஒரு பின்ன எண்ணாகும்; இதுவும் பத்தின் அடுக்குகள் பகுதிகள் ஆன பின்னங்களின் முற்றுப்பெறாத ஒரு வரிசை, தொடர்ச்சியாக மெதுவாக அணுகுகின்ற ஒரு பின்ன எண்ணையே குறிப்பிடுகிறது.

$\frac{1}{3}$ போன்றுள்ள எண்களை உட்படுத்த, புதிய ஒரு தசம வடிவம் உருவாக்குவதே இங்கே செய்யப்படுகிறது.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைக் காணலாம். $\frac{1}{6}$ க்கும் 10 இன் அடுக்கு பகுதி ஆன சம பின்னம் இல்லை அல்லவா (எதனால்?); இதையும் இந்தப் புதிய வழிமுறையில் எழுத இயலுமா எனப் பார்ப்போம்.

$\frac{1}{3}$ இல் செய்தது போன்று முதலில் இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}\times\frac{10}{6}$$

$\frac{10}{6}$ ஐ $\frac{5}{4}$ என எழுதலாம் எனினும் அதனைத் தெளிவுபடுத்துவதற்கு, எளிதாக்குதலை இறுதியில் செய்யலாம். இனி வலப் பக்கம் உள்ள $\frac{10}{6}$ ஐ $1+\frac{4}{6}$ என ஆக்கினால்

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{4}{6}\right)=\frac{1}{10}+\frac{4}{60}$$

இதனைச் சிறிது மாற்றி

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$$

என எழுதலாம். எனவே $\frac{1}{6}$ உடன் நெருங்கி வருகின்ற, 10 பகுதி ஆன பின்னம் கிடைத்தது. இனி மேலும் சிறிது நெருங்கி, 100 பகுதி ஆன பின்னம் கிடைக்க இவ்வாறு தொடங்கலாம்.

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{100}\times\frac{100}{6}$$

இதில் வலப்பக்கத்தில் உள்ள $\frac{100}{6}$ ஐ $16+\frac{4}{6}$ என மாற்றி இவ்வாறு ஆக்கலாம்:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{100}\left(16+\frac{4}{6}\right)=\frac{16}{100}+\frac{4}{600}$$

தொடர்ந்து இதனை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{1}{6}-\frac{16}{100}=\frac{4}{600}=\frac{1}{150}$$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால்,

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{16}{100}=\frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{166}{1000}=\frac{1}{1500}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1666}{10000}=\frac{1}{15000}$$

என்றெல்லாம் கிடைக்கும்.

அதாவது,

$\frac{1}{10}, \frac{16}{100}, \frac{166}{1000}, \ldots$ எனத் தொடரும் பின்ன எண்கள் $\frac{1}{6}$ க்கு நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.

$\frac{1}{3}$ இன் காரியத்தில் உள்ளது போன்று இங்கும் இதனைச் சுருக்கி, தசம வடிவமாக எழுதலாம்.:

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$$

இச் செயல்களைக் கீழ்க்காண்பது போன்று சுருக்கி எழுதலாம்:

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} & \frac{1}{1000} \\
 & 0. & 1 & 6 & 6 \\ \hline
6 & 1. & 0 & 0 & 0 \\
 & & 6 & & \\ \hline
 & & 4 & 0 & \\
 & & 3 & 6 & \\ \hline
 & & & 4 & 0 \\
 & & & 3 & 6 \\ \hline
 & & & & 4
\end{array}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{4}{60}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{16}{100} + \frac{4}{600}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{166}{1000} + \frac{4}{6000}$$

இதைப் போன்று $\frac{2}{3}$ ஐச் செய்து பார்க்கலாம்:

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} & \frac{1}{1000} \\
 & 0. & 6 & 6 & 6 \\ \hline
3 & 2. & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 8 & & \\ \hline
 & & 2 & 0 & \\
 & & 1 & 8 & \\ \hline
 & & 2 & 0 & \\
 & & 1 & 8 & \\ \hline
 & & 2 & 0 &
\end{array}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{10} + \frac{2}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{66}{100} + \frac{2}{300}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{666}{1000} + \frac{2}{3000}$$

$$\frac{2}{3} = 0.666\ldots$$

முன்னர் கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளைப் போன்று, $\frac{6}{10}, \frac{66}{100}, \frac{666}{1000}, \cdots$ என்ற எண்கள் $\frac{2}{3}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது என்பதே இவ்வாறு எழுதுவதன் பொருள். இங்கு வேறொரு காரியமும் உண்டு. முதலாவது வகுத்தலில் இருந்தே மீதி 2 மட்டும் ஆனதால், தொடர்ந்து ஈவாக 6 என்பதே மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது எனக் காணலாம்.

அதாவது இவ்வாறு ஒரு செயலில் ஏதேனும் ஒரு மீதி தொடர்ந்து வந்தால், ஈவில் அந்த இடம் முதல் உள்ள இலக்கங்கள் மீண்டும் மீண்டும் வரும். எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{7}$ ஐப் பார்க்கலாம்.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10^2} & \frac{1}{10^3} & \frac{1}{10^4} & \frac{1}{10^5} & \frac{1}{10^6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 0.\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7 \\
\hline
7 & 1.\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 & 7 \\
\cline{2-2}
 & 3\ 0 \\
 & 2\ 8 \\
\cline{2-2}
 & 2\ 0 \\
 & 1\ 4 \\
\cline{2-2}
 & 6\ 0 \\
 & 5\ 6 \\
\cline{2-2}
 & 4\ 0 \\
 & 3\ 5 \\
\cline{2-2}
 & 5\ 0 \\
 & 4\ 9 \\
\cline{2-2}
 & 1
\end{array}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{3}{7\times10}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{14}{10^2} + \frac{2}{7\times10^2}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{142}{10^3} + \frac{6}{7\times10^3}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1428}{10^4} + \frac{4}{7\times10^4}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{14285}{10^5} + \frac{5}{7\times10^5}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{10^4} + \frac{4}{7\times10^4}$$

மேலும் தொடர்ந்தால், 1, 4, 2, 8, 5, 7 என்ற இலக்கங்களே இதே வரிசையில் மீண்டும் மீண்டும் வரும். (ஏன்?)

ஆகவே

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$$

என எழுதலாம்.

- இதனைப் போன்று $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \cdots$ என்பனவற்றின் தசமவடிவம் கண்டு பிடிக்கவும். ஐந்தாம் வகுப்பில் **பாகமாக்குதல்** என்ற பாடத்தில், **சுழற்சிப்பகுத்தல்** என்ற பகுதியில் கூறப்பட்டுள்ள செயல்களுடன் இவற்றிற்கு என்ன தொடர்பு?

இனி இந்த எண்களின் வரிசையைப் பார்க்கவும்: $\frac{49}{100}, \frac{499}{1000}, \frac{4999}{10000}, \cdots$ இவை ஏதேனும் பின்ன எண்ணை நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றனவா?

$$\frac{1}{2} - \frac{49}{100} = \frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{2} - \frac{499}{1000} = \frac{1}{1000}$$
$$\frac{1}{2} - \frac{4999}{10000} = \frac{1}{10000}$$

எனக் காண்பது கடினமானது அல்ல. அதாவது இந்த எண்கள் $\frac{1}{2}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது. எனவே புதிய தசம முறைப்படி,

$$\frac{1}{2} = 0.4999...$$

எனவும் எழுதலாம்.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

என்ற தசம வடிவத்தை முன்னரே கண்டுள்ளோம் அல்லவா.

இதுபோல் 0.19, 0.199, 0.1999, ... என்ற எண்கள் $\frac{1}{5}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது எனக் காணலாம். எனவே $\frac{1}{5}$ க்கு 0.2 என்ற பழைய வடிவத்துக்கு அப்பால், 0.1999... என்ற புதிய வடிவமும் உண்டு.

பொதுவாகக் கூறினால், புதிய தசம வடிவங்களை அனுமதித்தபோது, பழைய எல்லா வடிவங்களுக்கும் மேலும் ஒரு புது வடிவமும் கிடைக்கிறது.

இனி 0.9, 0.99, 0.999, ... என்ற எண்களை எடுத்தாலோ?

இவை 1 ஐ நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது. அல்லவா?

ஆகவே புதிய முறையில்

$$1 = 0.999...$$

என எழுதலாம்.

(1) கீழ்க்காணும் பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் சமமான 10 இன் அடுக்கு பகுதி ஆன பின்னத்தைக் கண்டுபிடித்து தசம வடிவத்தில் எழுதவும்:

i) $\frac{1}{50}$ ii) $\frac{3}{40}$ iii) $\frac{5}{16}$ iv) $\frac{12}{625}$

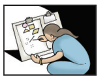
(2) கீழ்க்காணும் பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் நெருங்கி நெருங்கி வரும் 10 இன் அடுக்கு, பகுதி ஆன பின்னங்களைக் கண்டு பிடித்து, தசம வடிவில் எழுதவும் :

i) $\frac{5}{6}$ ii) $\frac{3}{11}$ iii) $\frac{23}{11}$ iv) $\frac{1}{13}$

(3) i) எந்த எண்ணினுடையவும் $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \dots$ என உள்ள பாகங்களை எடுத்துக் கொண்டால், அவை அந்த எண்ணின் $\frac{1}{9}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் என இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விளக்கவும்.

ii) மேற்கூறிய பொதுக்கோட்பாட்டை ஒரிலக்க எண்களில் உபயோகித்து $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ என்பனவற்றின் தசம வடிவங்கள் காணவும். (இங்கு $\frac{3}{9}, \frac{6}{9}$ இவற்றை விட்டுவிட்டது ஏன்?)

iii) ஒரேயொரு இலக்கம் மீண்டும் மீண்டும் வரும் தசம வடிவங்களைக் குறித்துப் பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

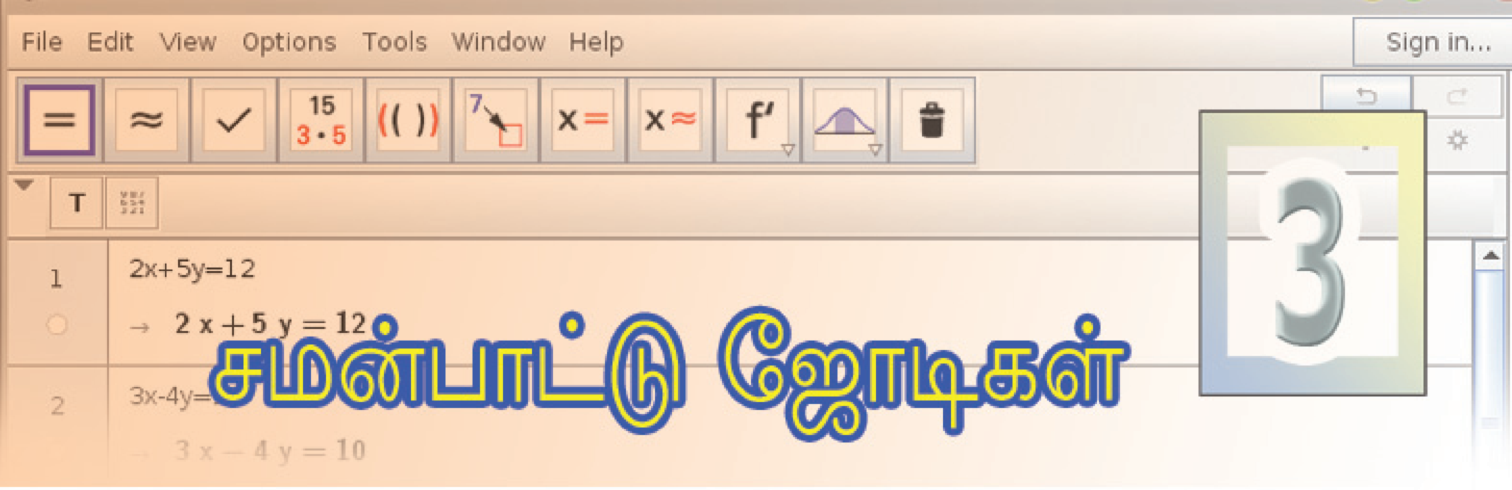


ஆய்வு

- எந்த ஒரு பின்ன எண்ணையும் ஓரலகு உள்ள பின்னங்களின் தொகையாக எத்தனை வேண்டுமாயினும் எழுத இயலுமா? நிறுவுக.

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• இரு பின்ன எண்களின் சமத் தன்மையைச் சோதித்துப் பார்ப்பதற்கு உள்ள பல வழிமுறைகளைப் புரிந்து கொள்ளுதல். • ஒரு பின்ன எண்ணுக்குச் சமமான வேறு பின்ன எண்களைக் கண்டு பிடிக்க உள்ள வழிமுறைகளைத் தெளிவுபடுத்துதல். • இரு பின்ன எண்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் வழிமுறையைக் கண்டுபிடித்து விளக்குதல். • பின்ன எண்கள் உட்படும் எண் வரிசைகளை இயற்கணித உதவியுடன் தெளிவுபடுத்துதல். • பின்ன எண்களைத் தசம வடிவத்தில் எழுதும் முறையை விளக்குதல். • பின்ன எண்களை முடிவுறா தசமவடிவத்தில் எழுதும் முறையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.			



3 சமன்பாட்டு ஜோடிகள்

மனக்கணக்கும் இயற்கணிதமும்

முதலில் ஒரு கணக்கு செய்யலாம்.

> ஒரு குடத்தில் கறுப்பு முத்துக்களும் வெள்ளை முத்துக்களும் என 100 முத்துக்கள் உள்ளன; வெள்ளையை விட, கறுப்பில் 10 அதிகமாக உள்ளன. கறுப்பு எத்தனை? வெள்ளை எத்தனை?

பலமுறைகளில் சிந்திக்கலாம். அதிகமாக உள்ள 10 கறுப்பு முத்துக்களை மாற்றி வைத்தால், குடத்தில் 90 முத்துக்கள், இதில் கறுப்பும் வெள்ளையும் சமம். அதாவது 45 வீதம். இனி மாற்றி வைத்த கறுப்பையும் சேர்த்து எடுத்தால், கறுப்பு 55 ஆகும்; வெள்ளை 45 தான்.

இயற்கணித வடிவம் பயன்படுத்தியும் செய்யலாம். (எட்டாம் வகுப்பில் **சமன்பாடுகள்** என்ற பாடம்). கறுப்பு முத்துக்களின் எண்ணிக்கையை x என எடுத்தால், வெள்ளை முத்துக்கள் $x - 10$; எல்லாம் சேர்த்து 100 எனக் கொண்டால்,

$$x + (x - 10) = 100$$

இதிலிருந்து x ஐ மட்டும் பிரித்து எடுக்கலாம்.

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 100 \\ 2x &= 110 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

அவ்வாறு, கறுப்பு முத்துக்கள் 55 எனக் கிடைக்கும், 10 ஐக் கழித்தால் வெள்ளை முத்துக்கள் 45 எனவும் கிடைக்கும்.

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திச் செய்யும் வேறொரு வழிமுறையும் உள்ளது. கறுப்பு முத்துக்களின் எண்ணிக்கை x என்றும், வெள்ளை முத்துக்களின் எண்ணிக்கை y என்றும் எடுத்தால், கணக்கில் கூறிய தகவல்களை இரு சமன்பாடுகளாக ஆக்கலாம்.

$$x + y = 100$$
$$x - y = 10$$

இதிலிருந்து x உம் y உம் எவ்வாறு பிரித்து எடுக்கலாம்?

இரு எண்களின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் கூட்டினால், பெரிய எண்ணின் இரு மடங்கு கிடைக்கும் என்று, ஏழாம் வகுப்பில் கற்றது நினைவில் இருக்கிறதா? (**மாறும் எண்களும் மாறாத தொடர்புகளும்** என்ற பாடத்தில் **தொகையும் வித்தியாசமும்** என்ற பகுதி)

தொகையிலிருந்து வித்தியாசத்தைக் கழித்தால், சிறிய எண்ணின் இரு மடங்கு கிடைக்கும் என்றும் பார்த்தோம்.

அப்போது முத்துக்களின்,

$$2x = (x + y) + (x - y) = 110$$

$$2y = (x + y) - (x - y) = 90$$

இனி $x = 55$, $y = 45$ என்றும் காணலாம்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> ஒரு மேசைக்கும் நாற்காலிக்கும் சேர்த்து 5000 ரூபாய் விலை. ஒரு மேசைக்கும் நான்கு நாற்காலிகளுக்கும் சேர்த்து 8000 ரூபாய். ஒவ்வொன்றின் விலை எவ்வளவு?

முதலில் மனக்கணக்காகச் செய்யலாமா எனப் பார்ப்போம். ஒரு மேசையும் நான்கு நாற்காலிகளும் சேர்ந்தபோது, விலையில் 3000 ரூபாய் கூடியது. அதற்குக் காரணம், மூன்று நாற்காலிகள் அதிகமாக வாங்குவதால் அல்லவா? அதாவது, மூன்று நாற்காலிகளின் விலையே அதிகமாக வந்த 3000 ரூபாய், அவ்வாறெனில் ஒரு நாற்காலியின் விலை 1000 ரூபாய், மேசையின் விலை 4000 ரூபாய்.

இவ்வாறு ஒன்றும் சிந்திக்காமல், நாற்காலியின் விலை x ரூபாய் என எடுத்துத் தொடங்கலாம். இனி சிறிது சிந்தித்தால், மேசையின் விலை $5000 - x$ ரூபாய் எனக் காணலாம். ஒரு மேசையும் நான்கு நாற்காலிகளும் சேர்ந்தால் $(5000 - x) + 4x$ ரூபாய்; இது 8000 ரூபாய் எனக் கூறப்பட்டுள்ளது. அதாவது,

$$(5000 - x) + 4x = 8000$$

இதிலிருந்து x ஐக் கணக்கிடலாம்:

$$5000 + 3x = 8000$$

$$3x = 3000$$

$$x = 1000$$

அவ்வாறு நாற்காலியின் விலை 1000 ரூபாய் எனக் கிடைக்கும்; மேசையின் விலை $5000 - 1000 = 4000$ ரூபாய் எனக் கிடைக்கும்.

முதலில் ஒன்றும் சிந்திக்காமல், நாற்காலியின் விலை x ரூபாய், மேசையின் விலை y ரூபாய் என்று எடுத்தும் தொடங்கலாம். அப்போது கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள தகவல்களைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு இரு சமன்பாடுகள் உருவாக்கலாம் ;

$$x + y = 5000$$

$$4x + y = 8000$$

இனி முதல் சமன்பாட்டின்படி, y என்ற எண்ணை x என்ற எண்ணிலிருந்து கணக்கிடலாம் :

$$y = 5000 - x$$

அப்போது இரண்டாவது சமன்பாட்டில் y க்குப் பதிலாக $5000 - x$ எனப் பயன்படுத்தலாம் :

$$4x + (5000 - x) = 8000$$

இது நாற்காலியின் விலையை மட்டும் x என்று எடுத்தபோது கிடைத்தது. இது பழைய சமன்பாடு அல்லவா? இதிலிருந்து முதலில் செய்ததைப்போன்று இரண்டின் விலையையும் கணக்கிடலாம்.

மேலும் ஒரு கணக்கு;

ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியுடன் ஒன்று கூட்டி எளிதாக்கிய போது $\frac{1}{2}$ கிடைத்தது. பகுதியுடன் ஒன்று கூட்டி எளிதாக்கிய போது $\frac{1}{3}$ உம் கிடைத்தது. அந்தப் பின்ன எண் என்ன?

இதை மனக்கணக்காகச் செய்வது கடினம்; தொகுதி அல்லது பகுதியை x என்று மட்டும் எடுத்தாலும் முழுமையாக முன்னோக்கிச் செல்ல இயலாது. தொகுதி x உம் பகுதி y உம் என எடுத்துத் தொடங்கலாம். அப்போது கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள தகவல்கள் ஒவ்வொன்றையும் பயன்படுத்திச் சமன்பாடுகள் உருவாக்கலாம்.

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

குறுக்குப் பெருக்கல் பயன்படுத்தி, இவற்றை இவ்வாறு எழுதலாம். (**பின்ன எண்கள்** என்ற பாடம்)

$$2\,(x + 1) = y$$

$$3x = y + 1$$

முதல் சமன்பாடு கூறுவது y என்ற எண்ணும் $2\,(x + 1)$ என்ற எண்ணும் சமம் என்பதாகும். அப்போது இரண்டாவது சமன்பாட்டில் y க்குப் பதிலாக $2\,(x + 1)$ என எழுதலாம். அதாவது,

$$3x = 2\,(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

இதிலிருந்து $x = 3$ என்று கணக்கிடலாம். தொடர்ந்து முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து $y = 2 \times 4 = 8$ என்றும் கணக்கிடலாம். அப்போது $\frac{3}{8}$ தான் கணக்கில் கூறப்பட்ட பின்ன எண்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகள் ஒவ்வொன்றையும் மனக்கணக்காகவோ, ஒரு மாறி மட்டும் உள்ள சமன்பாடாக மாற்றியோ அல்லது இரண்டு மாறிகள் மட்டும் உள்ள இரு சமன்பாடுகளாக மாற்றியோ செய்யவும்.

(1) சுற்றளவு ஒரு மீட்டர் உள்ள செவ்வகத்தின், பெரிய பக்கத்திற்குச் சிறிய பக்கத்தை விட ஐந்து சென்டிமீட்டர் நீளம் அதிகம். பக்கங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடவும்.

(2) ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களை விட 4 மாணவிகள் அதிகமாக உள்ளனர். 8 மாணவர்கள் மட்டும் வராமல் இருந்த ஒரு நாள், மாணவர்களின் இரு மடங்காக மாணவிகள் இருந்தனர். வகுப்பில் எத்தனை மாணவர்களும் எத்தனை மாணவிகளும் உள்ளனர்.?

(3) ஒருவர் 10000 ரூபாயை இரண்டு திட்டங்களில் சேமித்தார்; வட்டி விகிதம் 8 சதவீதமும், 9 சதவீதமும் ஆகும். ஓர் ஆண்டு கழிந்த பின்னர் இரண்டு திட்டங்களிலிருந்தும் மொத்தம் 875 ரூபாய் வட்டி கிடைத்தது. ஒவ்வொன்றிலும் எவ்வளவு ரூபாய் வீதம் சேமித்தார்?

(4) மூன்றரை மீட்டர் நீளம் உள்ள கம்பியை இரண்டாக வெட்டி, ஒரு துண்டை வளைத்து சதுரமும், மற்ற துண்டை வளைத்து சமபக்க முக்கோணமும் உருவாக்க வேண்டும். இரண்டின் பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம் இருக்க வேண்டும். எவ்வாறு வெட்டலாம்?

(5) ஒரு வினாடியில் u மீட்டர் என்ற வேகத்தில் தொடங்கி, ஒவ்வொரு வினாடியிலும் a மீட்டர் / வினாடி என்ற விகிதத்தில் வேகம் அதிகரித்து, நேர்கோட்டின் வழியாகப் பயணிக்கின்ற ஒரு பொருள், t வினாடியில் பயணிக்கும் தூரம் $ut + \frac{1}{2}at^2$ ஆகும். இவ்வாறு பயணிக்கும் ஒரு பொருள் 2 வினாடிகளில் 10 மீட்டரும், 4 வினாடிகளில் 28 மீட்டரும் பயணிக்கிறது. பயணத்தின் ஆரம்பத்தில் வேகம் என்ன? ஒவ்வொரு வினாடியிலும் வேகம் அதிகரிப்பதன் வீதம் என்ன?

இரு சமன்பாடுகள்

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

2 பேனாக்களும் 3 நோட்டுப்புத்தகங்களும் சேர்ந்து 40 ரூபாய்.
2 பேனாக்களும் 5 நோட்டுப்புத்தகங்களும் சேர்ந்து 60 ரூபாய் எனில் ஒரு பேனாவின் விலை எவ்வளவு? ஒரு நோட்டுப்புத்தகத்தின் விலை?

முன்னர் செய்த நாற்காலி, மேசை கணக்கைப் போன்று சிந்தித்துப் பார்க்கவும். முதலில் கூறிய 40 ரூபாயிலிருந்து 60 ரூபாயாக அதிகரித்தது எவ்வாறு?

2 நோட்டுப்புத்தகங்கள் அதிகம் வாங்கியதால் அல்லவா? அதாவது, 2 நோட்டுப்புத்தகங்களின் விலையே அதிகமான 20 ரூபாய். அப்படியானால் ஒரு நோட்டுப்புத்தகத்தின் விலை 10 ரூபாய்.

இனி முதலில் கூறியதிலிருந்து 2 பேனாக்களின் விலை கிடைப்பதற்கு, 40 இல் இருந்து மூன்று நோட்டுப்புத்தகங்களின் விலையைக் கழித்தால் போதுமே? அதாவது, $40 - 30 = 10$ ரூபாய். அப்போது ஒரு பேனாவின் விலை 5 ரூபாய்.

இனி, பேனாவின் விலை x ரூபாய், நோட்டுப்புத்தகத்தின் விலை y ரூபாய் என எடுத்து, கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ளவற்றை இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளாக உருவாக்கி, இதைச் செய்வது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

2 பேனாக்களும் 3 நோட்டுப்புத்தகங்களும் சேர்ந்து விலை 40 ரூபாய்	$2x + 3y = 40$
2 பேனாக்களும் 5 நோட்டுப்புத்தகங்களும் சேர்ந்து விலை 60 ரூபாய்	$2x + 5y = 60$
கூடியது 2 நோட்டுப்புத்தகங்களின் விலை	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
கூடியது 20 ரூபாய்	$60 - 40 = 20$
2 நோட்டுப்புத்தங்களின் விலை 20 ரூபாய்	$2y = 20$
ஒரு நோட்டுப்புத்தகத்தின் விலை 10 ரூபாய்	$y = 10$
2 பேனாக்களின் விலை, 40 ரூபாயிலிருந்து 30 ரூபாயைக் கழித்து	$2x = 40 - (3 \times 10) = 10$
ஒரு பேனாவின் விலை 5 ரூபாய்	$x = 5$

சிறிது வேறுபட்ட ஒரு கணக்கைப் பார்க்கவும்:

> 3 பென்சில்களும் 4 பேனாக்களும் சேர்ந்து விலை 26 ரூபாயும். 6 பென்சில்களும் 3 பேனாக்களும் சேர்ந்து 27 ரூபாயும் ஆகும் எனில், ஒரு பென்சில், ஒரு பேனா விலை எவ்வளவு?

முதலில் இயற்கணிதம் இல்லாமல் பார்ப்போம். இங்கு இரண்டாவதன் விலை அதிகரிக்கக் காரணம், முதல் கணக்கைப் போன்று, ஒரு பொருள் மட்டும் அதிகரித்ததால் அல்ல. அப்படியானால் அதைப் போன்று அவ்வளவு எளிதானது அல்ல இதன் காரியங்கள்.

இரு தகவல்களிலும் பென்சில் அல்லது பேனா ஒரே எண்ணிக்கை எனில் முதல் கணக்கு போல் செய்யலாம். அப்படிச் செய்தால்?

விலைகளை இவ்வாறு எழுதி வைக்கலாம்.

பென்சில்	பேனா	விலை
3	4	26
6	3	27

முதலில் கூறியதில் 3 பென்சில்களும், இரண்டாவது கூறியதில் 6 பென்சில்களும் உள்ளன. முதலில் உள்ளதில் 6 பென்சில்கள் என ஆக்க இயலுமா?

6 பென்சில்களும், 8 பேனாக்களும் ஆனாலோ?

	பென்சில்	பேனா	விலை
	3	4	26
$\times 2$	6	3	27
	6	8	52

மூன்றாவது வரிசையில் இரண்டாவது வரிசையை விட விலை 25 ரூபாய் அதிகரித்தது, 5 பேனாக்களின் விலை மட்டும் அல்லவா?

அப்போது ஒரு பேனாவின் விலை 5 ரூபாய். இனி முதல் வரிசையிலிருந்து, 3 பென்சில்களின் விலை $26 - 20 = 6$ ரூபாய், ஒரு பென்சிலின் விலை 2 ரூபாய் என இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

இனி இந்தச் சிந்தனைகள் அனைத்தையும் இயற்கணிதத்தில் எழுதிப் பார்க்கலாம். ஒரு பென்சிலின் விலை x ரூபாய் என்றும், ஒரு போனவின் விலை y ரூபாய் என்றும் எடுத்தால், கணக்கின் தகவல்களையும் அவற்றைப் பயன்படுத்தி விலைகள் கண்டுபிடித்த முறைகளையும் இவ்வாறு எழுதலாம்.

3 பென்சில்களும் 4 பேனாக்களும் சேர்ந்து விலை 26 ரூபாய்	$3x + 4y = 26$
6 பென்சில்களும் 3 பேனாக்களும் சேர்ந்து விலை 27 ரூபாய்	$6x + 3y = 27$
6 பென்சில்களும் 8 பேனாக்களும் சேர்ந்து விலை 52 ரூபாய்	$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 52$
அதிகமானது 5 பேனாக்களின் விலை	$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$
அதிகமானது 25 ரூபாய்	$5y = 25$
ஒரு பேனாவின் விலை 5 ரூபாய்	$y = 5$

3 பென்சில்களின் விலை

26 ரூபாயிலிருந்து 20 ரூபாய் கழித்தது	$3x = 26 - (4 \times 5) = 6$
ஒரு பென்சிலின் விலை, 2 ரூபாய்	$x = 2$

இங்குச் செய்த அனைத்தையும் சுருக்கமாக எழுதலாம். முதலில் கணக்கிலிருந்து கிடைத்த தகவல்களைச் சமன்பாடுகளாக எழுதலாம். அவற்றை 1 ஆம் சமன்பாடு என்றும், 2 ஆம் சமன்பாடு என்றும் கூறலாம்.

$$3x + 4y = 26 \qquad (1)$$

$$6x + 3y = 27 \qquad (2)$$

$3x + 4y$ என்ற எண் 26 ஆகும் என்றே 1ஆம் சமன்பாடு கூறுகிறது. அப்படியானால் அதன் இரு மடங்கு 52.

$$6x + 8y = 52 \qquad (3)$$

இனி 2 ஆம் சமன்பாட்டையும், 3 ஆம் சமன்பாட்டையும் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 52 - 27$$

இதை எளிதாக்கி,

$$5y = 25$$

என்றும் அதிலிருந்து $y = 5$ என்றும் கிடைக்கும். தொடர்ந்து 1ஆம் சமன்பாட்டில் y ஆக 5 என எடுத்தால் x னையும் கணக்கிடலாம்.

$$3x + (4 \times 5) = 26$$

$$3x = 26 - 20 = 6$$

$$x = 2$$

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> சிறிய பாத்திரத்தில் ஐந்து தடவைகளும், பெரிய பாத்திரத்தில் இரண்டு தடவைகளும் தண்ணீர் நிறைத்து ஊற்றியபோது 20 லிட்டர். சிறிய பாத்திரத்தில் இரண்டு தடவைகளும் பெரிய பாத்திரத்தில் 3 தடவைகளும் நிறைத்து ஊற்றியபோது 19 லிட்டர். ஒவ்வொரு பாத்திரத்திலும் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்?

சிறிய பாத்திரத்தில் x லிட்டரும், பெரிய பாத்திரத்தில் y லிட்டரும் கொள்ளும் என எடுத்து, கணக்கில் கூறிய தகவல்களைச் சமன்பாடுகளாக உருவாக்கலாம்:

$$5x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

முதல் கணக்கில் செய்தது போன்று, இதில் (1) இல் $2x$ என ஆக்கவேண்டுமெனில், $\frac{2}{5}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்; மாறாக, (2) இல் $5x$ என ஆக்கவேண்டுமெனில் $\frac{5}{2}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

வேறுபட்ட தகவல்கள்

ராமு 7 ரூபாய் கொடுத்து ஒரு பென்சிலும், ஒரு பேனாவும் வாங்கினான். அஜு 4 பென்சில்களும் 4 பேனாக்களும் வாங்கி னான்; 28 ரூபாய் ஆனது. இந்தத் தகவல் களை வைத்து ஒவ்வொன்றின் விலையைக் கண்டு பிடிக்க இவர்கள் முயற்சி செய்தனர். பென்சிலின் விலை x என எடுத்து முதலில் கூறியதைப் பயன்டுத்தி பேனாவின் விலை $7 - x$ என உருவாக்கினர்.

இரண்டாவது கூறியதைப் பயன்படுத்தி

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

என எழுதினர். இதை எளிதாக்கிய போது கிடைத்ததோ? $28 = 28$!

இங்குப் பென்சிலின் விலை x, பேனாவின் விலை y என எடுத்திருந்தால்?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

இரண்டாவது எழுதிய சமன்பாட்டை

$$4(x + y) = 28$$

என உருவாக்கினால் மீண்டும்

$$x + y = 7$$

என்று கிடைக்கிறது அல்லவா?

அதாவது, இந்தக் கணக்கில் இரண்டாகக் கூறினாலும் விலைகளுக்கு இடையில் உள்ள ஒரு தொடர்பு மட்டுமே கூறப் பட்டுள்ளது. அதை மட்டும் பயன்படுத்தி மதிப்புகளை வெவ்வேறாகக் கண்டு பிடிக்கவும் இயலாது.

கணக்கும் காரியமும்

10 மீட்டர் சுற்றளவு உள்ள ஒரு செவ்வகம் உருவாக்க வேண்டும். நீளம், அகலத்தை விட 5.5 மீட்டர் அதிகமாக இருக்க வேண்டும். நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

அகலத்தை x என எடுத்தால், நீளம் $x + 5.5$ என இருக்க வேண்டும். சுற்றளவு 10 மீட்டர் ஆக இருக்கவேண்டும் என்பதால்,

$$x + (x + 5.5) = \frac{10}{2} = 5$$

அதாவது,

$$2x + 5.5 = 5$$

அதாவது,

$$2x = -0.5$$
$$x = -0.25$$

இவை சரியாவது இல்லை அல்லவா. செவ்வகத்தின் அளவுகள் எவ்வாறு குறை எண்கள் ஆகும்?

இதன் பொருள், இந்த விதிமுறைகள் இரண்டும் சரியாகும் விதத்தில் ஒரு செவ்வகம் வரைய இயலாது என்பதாகும். இந்தக் கணக்கில் அகலம் x, நீளம் y என எடுத்திருந்தால், தரப்பட்டுள்ள தகவல் களிலிருந்து கிடைக்கும் சமன்பாடுகள்

$$x + y = 5$$
$$y - x = 5.5$$

இது இரண்டும் சரியாகின்ற மிகை எண்கள் இல்லை என்று விரைவில் புரிந்து கொள்ளலாம். (இரண்டு மிகை எண்களின் தொகை அவற்றின் வித்தியாசத்தை விடச் சிறியதாக ஆகுவது இல்லை அல்லவா)

இவ்வாறு ஏதேனும் விதத்தில் விடையைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பின்ன எண்கள் இல்லாமல் செய்வதற்கு ஒரு வழிமுறை உள்ளது. (பின்ன எண்களை எவர்தான் விரும்புகின்றனர்?) (1) லும் (2) லும் $10x$ ஆக்கலாம். அதற்கு (1) ஐ 2 ஆலும், (2) ஐ 5 ஆலும் பெருக்கினால் போதும். சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு மாறுகின்றன.

$$(1) \times 2: \quad 10x + 4y = 40 \qquad (3)$$

$$(2) \times 5: \quad 10x + 15y = 95 \qquad (4)$$

இனி (4) இல் இருந்து (3) கழித்து

$$(4) - (3): \quad 11y = 55$$

என்றும், அதிலிருந்து

$$y = 5$$

என்றும் கணக்கிடலாம். தொடர்ந்து, இதை (1) இல் பயன்படுத்தி x உம் கணக்கிடலாம்.

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

அவ்வாறு சிறிய பாத்திரத்தில் 2 லிட்டரும், பெரிய பாத்திரத்தில் 5 கொள்ளும் எனக் கணக்கிடலாம்.

(1) ராஜு இருநூறு பக்கங்கள் உடைய நோட்டுப்புத்தகங்கள் ஏழும், நூறு பக்கங்கள் உடைய நோட்டுப்புத்தகங்கள் ஐந்தும் வாங்கினான். விலை 107 ரூபாய். ஜோசப் இரு நூறு பக்கங்கள் உடைய நோட்டுப்புத்தகங்கள் ஐந்தும், நூறு பக்கங்கள் உடைய நோட்டுப்புத்தகங்கள் ஏழும் வாங்கினான். விலை 97 ரூபாய் ஆனது. ஒவ்வொரு இனத்திலும் உள்ள நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலை எவ்வளவு?

(2) ஓர் எண்ணின் நான்கு மடங்கையும், வேறொரு எண்ணின் மூன்று மடங்கையும் கூட்டியபோது 43 கிடைத்தது. முதல் எண்ணின் மூன்று மடங்கிலிருந்து, இரண்டாவது எண்ணின் இரு மடங்கைக் கழித்த போது கிடைத்தது 11. எண்கள் எவை?

(3) ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் தொகை 11 ஆகும். இந்த எண்ணின் இலக்கங்களை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றினால் கிடைக்கும் எண், முதல் எண்ணை விட 27 அதிகம் ஆகும். எண்கள் எவை?

(4) நான்கு ஆண்டுகளுக்கு முன்னர், ரஹீமின் வயது ராமுவின் வயதின் மூன்று மடங்காக இருந்தது. இரண்டு ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் இது இரு மடங்காகும். அவர்களின் தற்போதைய வயது என்ன?

(5) ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தை 5 மீட்டர் கூட்டவும், அகலத்தை 3 மீட்டர் குறைக்கவும் செய்தால், பரப்பளவில் 5 சதுர மீட்டர் குறையும். நீளத்தை 3 மீட்டரும், அகலத்தை 2 மீட்டரும் கூட்டினால், பரப்பளவில் 50 சதுரமீட்டர் கூடும். நீளமும் அகலமும் என்ன?

வேறு சில சமன்பாடுகள்

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

இரு சதுரங்களில், பெரியதன் பக்கம் சிறியதன் பக்கத்தை விட 5 சென்டிமீட்டர் அதிகமாகும், பெரியதன் பரப்பளவு, சிறியதன் பரப்பளவை விட 55 சதுர சென்டிமீட்டர் அதிகமாகும். இரண்டிலும் பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

பெரியதன் ஒரு பக்கத்தை x சென்டிமீட்டர் என்றும் சிறியதன் ஒரு பக்கத்தை y சென்டிமீட்டர் என்றும் எடுத்தால் கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து இரு சமன்பாடுகளை உருவாக்கலாம்.

$$x - y = 5$$

$$x^2 - y^2 = 55$$

இனி என்ன செய்யலாம்?

$x^2 - y^2 = (x + y)\ (x - y)$ எனத் தெரியும் அல்லவா. இதை இவ்வாறும் எழுதலாம்.

$$x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

அப்போது நமது செவ்வகக் கணக்கில்,

$$x + y = \frac{55}{5} = 11$$

இப்போது $x + y = 11$ என்ற தொகையும், $x - y = 5$ என்ற வித்தியாசமும் கிடைத்தது அல்லவா? இனி எண்களைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

$$x = \frac{1}{2}\ (11 + 5) = 8$$

$$y = \frac{1}{2}\ (11 - 5) = 3$$

அதாவது, சதுரங்களின் பக்கங்கள் முறையே, 8 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் ஆகும்.

வேறொரு கணக்கு:

ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 10 மீட்டரும், பரப்பளவு $5\frac{1}{4}$ சதுர மீட்டரும் ஆகும். அதன் பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

பக்கங்களின் நீளம் x மீட்டர், y மீட்டர் என எடுத்தால் சுற்றளவு, $2(x+y)$ மீட்டர், பரப்பளவு xy சதுர மீட்டர், அப்படியானால் கணக்கின் தகவல் களிலிருந்து இவ்வாறு சமன்பாடுகளை உருவாக்கலாம்.

$$x + y = 5$$

$$xy = 5\frac{1}{4}$$

இனி, இவற்றிலிருந்து $x - y$ கண்டுபிடிக்கலாமா?

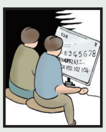
$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ எனத் தெரியும் அல்லவா. இதை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

அப்போது நமது கணக்கில்,

$$(x-y)^2 = 5^2 - 4 \times 5\frac{1}{4} = 25 - 21 = 4$$

அப்படியானால் $x - y = 2$ இனி, $x + y = 5$ என்பதையும் பயன்படுத்தினால் $x = 3\frac{1}{2}, y = 1\frac{1}{2}$ அதாவது, செவ்வகத்தின் பக்கங்கள், $3\frac{1}{2}$ மீட்டர், $1\frac{1}{2}$ மீட்டர்.

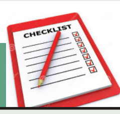


(1) 10 மீட்டர் நீளம் உள்ள கயிறை இரண்டாக வெட்டி, ஒவ்வொரு துண்டையும் சதுரமாக உருவாக்க வேண்டும். அவற்றின் உள்ளே உள்ள பரப்பளவுகளின் வித்தியாசம் $1\frac{1}{4}$ சதுர மீட்டராக இருக்க வேண்டும். எவ்வாறு வெட்டலாம்?

(2) ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம், அகலத்தை விட 1 மீட்டர் அதிகமாகும். அதன் பரப்பளவு $3\frac{3}{4}$ சதுர மீட்டர் எனில் நீளம், அகலம் என்ன?

(3) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் $6\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டரும், பரப்பளவு $7\frac{1}{2}$ சதுர சென்டிமீட்டரும் ஆகும். செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடவும்.

மீள்பார்வை

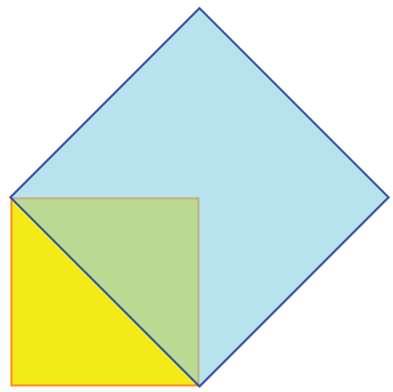


கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• இரு அளவுகளைப் பற்றிய இரண்டு தகவல்களைப் பயன்படுத்தி, மனக்கணக்காகவோ, ஒரு மாறி மட்டும் உள்ள சமன்பாடாக உருவாக்கியோ, இரண்டு மாறிகள் உள்ள ஒருஜோடி சமன்பாடுகளாக உருவாக்கியோ அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்க இயலுதல்.			

4 புதிய எண்கள்

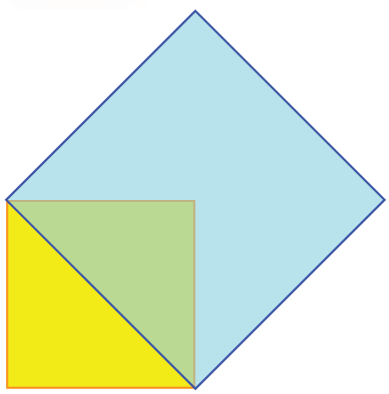
நீளங்களும் எண்களும்

படத்தைப் பார்க்கவும்:



ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் பக்கமாக உள்ள வேறொரு சதுரம் வரையப் பட்டுள்ளது.

இவ்வாறு வரையும் பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு, சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவின் இரு மடங்காகும் என ஏழாம் வகுப்பில் கண்டது நினைவில் உள்ளது அல்லவா?



அதாவது சிறிய சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் ஒரு மீட்டர் எனில், பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு இரண்டு சதுர மீட்டர்.

இதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?

எப்படியாயினும் ஒரு மீட்டரை விடக் கூடுதலாகும். இரண்டு மீட்டரை விடக் குறைவானதும், (அது எவ்வாறு?) ஒன்றுக்கும் இரண்டுக்கும் இடையிலுள்ள பின்ன எண் ஆகலாம். ஆனால் சதுரத்தின் பரப்பளவு இரண்டு சதுர மீட்டர் ஆனதால் பக்கத்தின் நீளமான இந்த எண்ணின் வர்க்கம் இரண்டாக வேண்டும்.

எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் இரண்டு?

ஒன்றரை ஆகுமா?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

அது கூடுதலாகும், ஒன்றேகால் ஆனாலோ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

அது குறைந்து போனது, ஒன்றும் மூன்றிலொன்றும் ஆனாலோ?

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

இதுவும் குறைவுதான்; ஆனால் ஒன்றேகாலை விடக் கூடுதலாகும்.

இவ்வாறு பல எண்களை ஊகித்துப் பார்த்து தவறாகியும் திருத்தியும் முயற்சிப்பதற்குப் பதிலாக இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திப் பார்த்தாலோ?

வர்க்கம் 2 ஆன பின்ன எண்ணின் தொகுதி ஆன எண்ணல் எண்ணை x எனவும், பகுதி ஆன எண்ணல் எண்ணை y எனவும் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

அதாவது,

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

இதை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம் அல்லவா: $x^2 = 2y^2$

இப்போது இது ஓர் எண்ணல் எண் பிரச்சினை ஆயிற்று; இரு எண்ணல் எண்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்; அவற்றில் ஒன்றின் வர்க்கம் மற்றொன்றின் வர்க்கத்தின் இரு மடங்கு ஆக வேண்டும்.

இந்தச் சமன்பாட்டில் x^2 என்ற எண்ணல் எண் 2 இன் மடங்காகும். அதாவது, x^2 ஓர் இரட்டை எண் ஆகும். x இன் மதிப்போ?

எல்லா ஒற்றை எண்களின் வர்க்கம் ஒற்றை எண்ணும், எல்லா இரட்டை எண்களின் வர்க்கம் இரட்டை எண்ணும் அல்லவா? எனவே x உம் இரட்டை எண் ஆகும்.

ஆகவே $x = 2u$ என எழுதலாம். இதிலிருந்து $y^2 = 2u^2$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது, y^2 உம் அதனால் y உம் இரட்டை எண் ஆகும். எனவே $y = 2v$ என எழுதலாம்.

$y^2 = 2u^2$ என்ற சமன்பாடு $(2v)^2 = 2u^2$ என்றாகும். இதைச் சுருக்கினால் $2v^2 = u^2$; அதாவது,

$$u^2 = 2v^2$$

இது நமது பழைய சமன்பாடுதானே? x, y என்ற எண்களுக்குப் பதிலாக u, v என்ற எண்கள் உள்ளன. அப்போது x, y என்பவற்றைக் குறித்துக் கூறியவை

அனைத்தும் u, v என்பவற்றிற்கும் பொருந்தும். இறுதியில் u, v என்பவை இரட்டை எண்கள் எனவும் ஆகும். அதனால்,

$$u = 2s \qquad v = 2t$$

என எடுத்தால், $s^2 = 2t^2$

எனவும் காணலாம்.

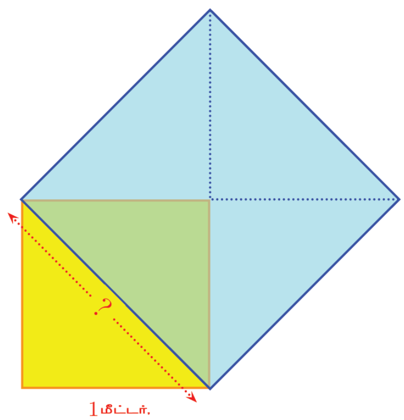
இது இவ்வாறு முற்றுப்பெறாமல் தொடரலாம் என்பதைத் தவிர நமது பிரச்சினைக்கு விடை கிடைப்பதில்லை அல்லவா. இங்கு வேறொரு காரியத்தைக் கவனிக்க வேண்டும்; $x = 2u$ என்றும், அதில் $u = 2s$ என்றும் கிடைத்தது அல்லவா, எனவே $x = 4s$ ஆகும். இதைப் போன்று $y = 4t$ என்றும் கிடைக்கும். எனவே முதலாவது கண்டதைப் போன்று x, y என்பன 2 இன் மடங்கு மட்டுமல்ல, 4 இன் மடங்கும் ஆகும்.

சமன்பாட்டுச் செயலை மீண்டும் தொடர்ந்தால், x, y என்ற எண்கள் 8, 16 போன்ற எண்களின் மடங்குகள் ஆகும் என வருகிறது.

அதாவது, $x^2 = 2y^2$ என்ற சமன்பாட்டை மெய்யாக்கும் எண்ணல் எண்கள் உள்ளன எனில் அவை இரண்டின் எல்லா அடுக்குகளின் மடங்குகளாக ஆக வேண்டும்.

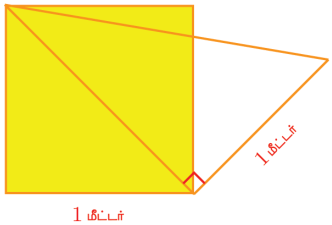
இது எவ்வாறு இயலும்? இரண்டின் எல்லா அடுக்குகளின் மடங்குகள் ஆன எண்ணல் எண் உண்டா? எனவே இவ்வகையில் உள்ள எண்ணல் எண்கள் இல்லை; வர்க்கம் இரண்டு ஆன பின்ன எண்ணும் இல்லை.

எந்தப் பின்ன எண்ணினுடையவும் வர்க்கம் 2 அல்ல.



அப்போது நமது வடிவியல் பிரச்சினை என்னவாயிற்று? பக்கங்கள் 1 மீட்டர் ஆன சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம், ஒரு மீட்டரின் பின்ன எண் மடங்கு எனில் அந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் இரண்டு ஆக வேண்டும், (பக்கங்களின் நீளம் பின்ன எண் ஆனாலும் பரப்பளவு அதன் வர்க்கம் ஆகும் என ஆறாம் வகுப்பில் கண்டோம் அல்லவா) ஆனால் வர்க்கம் இரண்டு ஆன பின்ன எண் இல்லை. ஆகவே என்ன கூறலாம்?

எல்லாப் பக்கங்களின் நீளமும் 1 ஆன சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தை ஒரு பின்ன எண்ணாகக் கூற இயலாது.



இவ்வாறு எண்ணல் எண்களாகவோ பின்ன எண்களாகவோ கூற இயலாத நீளங்கள் பல உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

எண்கள் உருவாகுதல்

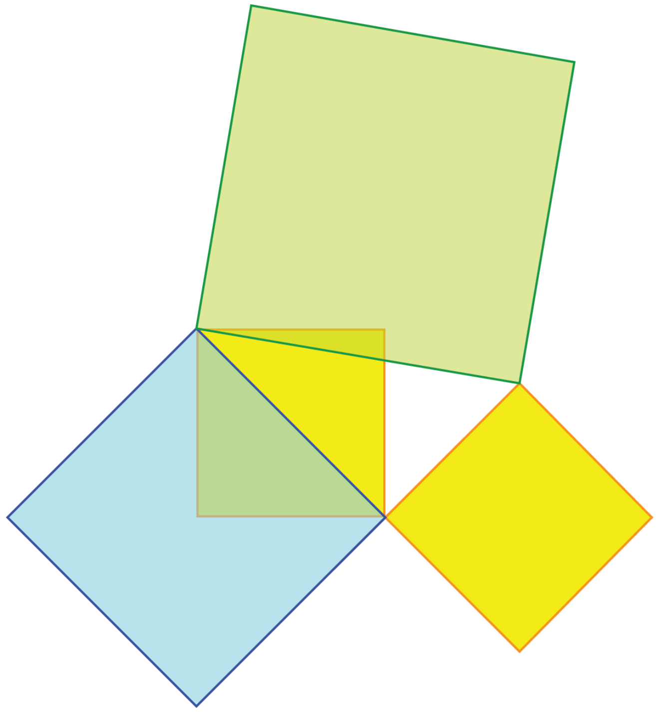
எதையும் அளந்து எண் ஆக்குதல்; இந்த எண்கள் வாயிலாக அவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்புகள்மூலம் உலகத்தைப் புரிந்து கொள்ள முயற்சித்தல் என்பதே கணிதத்தின் ஒரு முக்கியப் பணியாகும்.

அளக்கப்படுவதன் பண்பு மாறுவதற்கு ஏற்ப வேறுபட்ட வகைகளில் உள்ள எண்களை உருவாக்க வேண்டி வரும். இயற்கையிலி ருந்து நேரடியாகக் கிடைத்ததை மட்டும் உண்டு வாழ்ந்த காலத்தில் மனிதனுக்குத் தன் கூட்டத்தில் உள்ள ஆட்களின் எண்ணிக்கை, வளர்த்தும் கால்நடைகளின் எண்ணிக்கை போன்றவை மட்டுமே தேவைப்பட்டன. அக்காலத்தில் எண்ணல் எண்கள் மட்டுமே போதுமானவையாக இருந்தன.

ஏறக்குறைய கி.மு. ஐயாயிரத்தில் நதியோ ரங்களில் தங்கியிருந்து, பரவலாக வேளாண்மை தொடங்கியதுடன், அதற்கு உரிய இடங்களை உறுதிப்படுத்தவும், உறைவிடங்களை உரு வாக்கவும், பல்வேறு நீளம், பரப்பு என எல்லா வற்றையும் அளக்க வேண்டிய அவசியங்கள் வந்தன. இக்காலத்தில் தான் பின்னஎண்கள் என்ற கருத்து உருவாயிற்று. பங்கீட்டின் போது பின்ன எண்கள் தேவைப் படுகிறது அல்லவா. எல்லா அளவுகளையும் பின்ன எண்களால் குறிப்பிட இயலாது என்ற பகுத்தறிவில் இருந்தே புதியவகை எண்கள் தேவைப் பட்டன.

பிற்காலத்தில் பௌதீகத் தேவைகளுக்கு மட்டுமன்றி கணிதத்தின் வசதிக்காவும் புதிய வகை எண்கள் உருவாக்கப்பட்டன. குறை எண்கள், சிக்கல் எண்கள் (complex numbers) போன்றவை இவ்வாறு உருவா னவை. இவ்வகை எண்களும் பௌதீக வியல் போன்ற இதர அறிவியல் களில் மிக அதிகமாக உபயோகிக்கப் படுகின்றன என்பது மற்றொரு காரியம் ஆகும்.

சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தில் வரைந்துள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளம் என்ன? இதன் பக்கங்கள் அனைத்திலும் சதுரங்கள் வரைந்து பார்க்கலாம்.



பைதகோரஸ் தேற்றப்படி, நமது செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் பக்கம் ஆன (பச்சை) சதுரத்தின் பரப்பளவு $1 + 2 = 3$ சதுர மீட்டராகும். எனவே அதன் நீளம் 1 மீட்டரின் பின்ன எண் மடங்கு எனில் அந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் 3 ஆக வேண்டும்.

எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கமும் 2 இல்லை எனக் கண்டதைப் போன்று எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கமும் 3 அல்ல என்றும் காணலாம். ஆகவே இந்தச் செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளத்தையும் பின்ன எண்ணாகக் கூற இயலாது.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்க்கலாம். கனஅளவு 2 கன செண்டிமீட்டர் ஆன ஒரு சதுரக் கட்டையை உருவாக்க வேண்டும் எனக் கருதவும். இதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் என்னவாக இருக்க வேண்டும். எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கமும் 2 அல்ல என்பது போன்று, எந்தப் பின்ன எண்ணின் மூன்று அடுக்கும் 2 அல்ல. ஆகவே இந்தச் சதுரக்கட்டையின் பக்கத்தின் நீளத்தையும் பின்ன எண்ணாகக் கூற முடியாது.

இவ்வாறு பல சூழல்களிலும் பின்ன எண்ணாகக் கூற முடியாத நீளங்கள் தேவையாக வரும்.

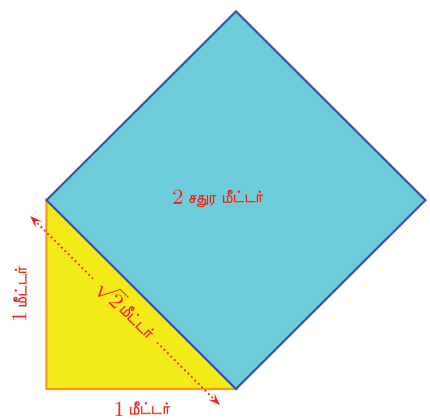
அளவுகளும் எண்களும்

எண்ணல் எண்ணாகவோ பின்ன எண்ணாகவோ கூற இயலாத நீளங்களைக் குறிப்பிட புதிய எண்களை உருவாக்க வேண்டும். நமது முதல் எடுத்துக்காட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். பக்கங்களின் நீளம் 1 ஆன (மீட்டரோ, சென்டிமீட்டரோ எதுவும் ஆகலாம்) சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தை எவ்வாறு குறிப்பிடலாம்?

இவ்வினாவை இவ்வாறும் கேட்கலாம்; பரப்பளவு 2 ஆன சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளத்தை எவ்வாறு குறிப்பிடலாம்?

பக்கம் எண்ணல் எண்ணாகவோ பின்ன எண்ணாகவோ ஆன சதுரம் எனில் அதன் நீளம் பரப்பளவின் வர்க்கமூலம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, பரப்பளவு 4 ஆன சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{4} = 2$; பரப்பளவு $2\frac{1}{4}$ எனில், பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$

இதைப் போன்று பரப்பளவு 2 ஆன சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{2}$ என எழுதலாம்.



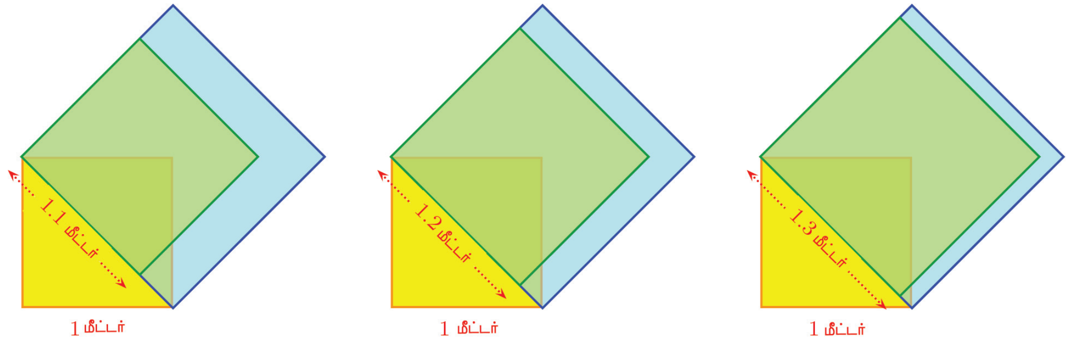
நீளத்தைக் குறிப்பிட ஓர் அடையாளம் கொடுத்தால் மட்டும் போதாது அல்லவா. அதன் அளவு அறிய, தெரிந்த நீளங்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும் அல்லவா? அதற்கு உரிய வழிமுறை, இந்த நீளத்துடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும் என்பதாகும். இத்தகைய நீளங்களை மூலை விட்டத்திலேயே அடையாளப்படுத்தினால், இவை பக்கங்கள் ஆன சதுரங்கள், மூலைவிட்டம் பக்கம் ஆன சதுரங்களுடன் நெருங்கி வரும் அல்லவா.

சிதறும் நம்பிக்கை

எல்லா அளவுகளையும் எண்ணல் எண்களால் ஒப்புமைப்படுத்தலாம் என கி.மு. 6ஆம் நூற்றாண்டில் பைதகோரஸும் அவரின் சீடர்களும் நம்பினர். மேலும் சரியாகக் கூறினால் எந்த இரு அளவுகளையும் எண்ணல் எண்களின் விகிதத்தால் குறிப்பிடலாம் என்பதே இந்த நம்பிக்கை. ஆனால் ஒரு சதுரத்தின் மூலை விட்டம், பக்கங்கள் என்பனவற்றின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதத்தை எண்ணல் எண்களால் எழுத இயலாது. இந்த விகிதத்தை எண்ணல் எண்களால் $a : b$ என எழுத வேண்டுமெனில் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் பக்கத்தின் $\frac{a}{b}$ மடங்காக வேண்டும். அவ்வாறெனில், மூலைவிட்டத்தின் வர்க்கம் பக்கத்தின் வர்க்கம் $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ மடங்காக வேண்டும். மூலைவிட்டத்தின் வர்க்கம் பக்கத்தின் வர்க்கத்தின் இரு மடங்கு ஆனதால் $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ஆகும். இது இயலாது எனக் கண்டோம் அல்லவா.

பைதகோரஸின் சீடரான ஹிப்பாசஸ் இதனைக் கண்டுபிடித்தார் எனக் கருதப் படுகிறது.

சதுரத்தின் மூலைவிட்டமும் பக்கமும் போன்று, எண்ணல் எண்களின் விகிதத்தைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிட்டுப் பார்க்க இயலாத அளவுகளை ஒருமித்து அளக்க இயலாத அளவுகள் (incommensurable magnitudes) எனக் கூறுகிறோம்.



எண்கள் மட்டுமாகக் கூறினால், இக்கோடுகளின் நீளங்களான பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 2 உடன் அடுத்தடுத்து வரும்.

இவ்வாறான எண்களைக் காண பின்ன எண்களின் தசம வடிவமே எளிதானது. முதலில் 1.1, 1.2, 1.3, . . . என உள்ள பின்ன எண்களின் வர்க்கங்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.5^2 = 2.25$$

எனக் காணலாம். எனவே பத்தில் ஒன்று வரை எடுத்தால், இதனை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

இனி 1.4 க்கும் 1.5 க்கும் இடையிலுள்ள 1.41, 1.42, 1.43, . . . என்ற எண்களின் வர்க்கங்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$1.41^2 = 1.9881; \quad 1.42^2 = 2.0164$$

எனவும் காணலாம். அதாவது நூறில் ஒன்றுகள் வரை எடுத்தால், முன்னர் எழுதியதைப் போன்று,

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால்,

1.4^2	=	1.96	1.5^2	=	2.25
1.41^2	=	1.9881	1.42^2	=	2.0164
1.414^2	=	1.999396	1.415^2	=	2.002225
1.4142^2	=	1.99996164	1.4143^2	=	2.00024449
1.41421^2	=	1.9999899241	1.41422^2	=	2.0000182084

எனக் காணலாம். அதாவது ஐந்து தசம இடங்கள் வரை எடுத்தால்

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

இதில்

$$2 - 1.41421^2 = 0.0000100759 < 0.00002$$

எனவும் காண வேண்டும்.

சுருங்கக் கூறின்

$\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \ldots$ எனத் தொடரும் பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 2 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது. இதனைச் சுருக்கி எழுதுவது இவ்வாறாகும்.

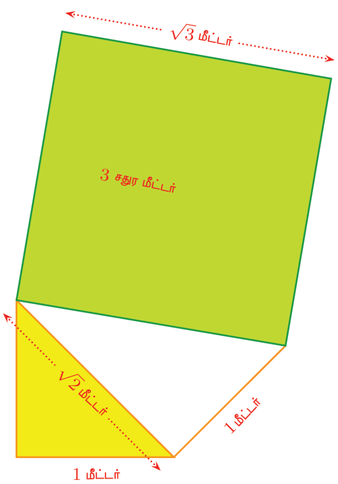
$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

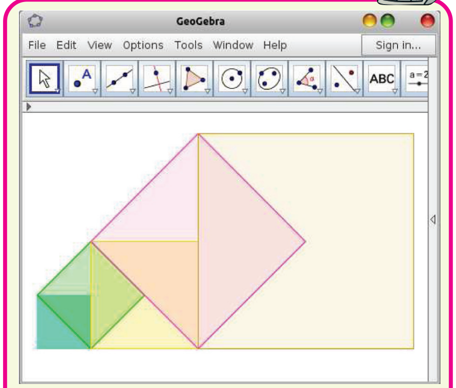
எனவே $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணின் ஒரு தசம இடம் மட்டும் எடுத்தால் 1.4, இரண்டு தசம இடம் வரை எடுத்தால் 1.41 என்று இவ்வாறு கூறலாம். இதனை எழுதுவது,

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

என இவ்வாறாகும். இதில் $\approx$ என்ற அடையாளத்தின் பொருள் தோராயமாகச் சமமானது என்பதாகும். இதைப் போன்று பரப்பளவு 3 உள்ள சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{3}$ ஆகும் எனக் கூறலாம்.





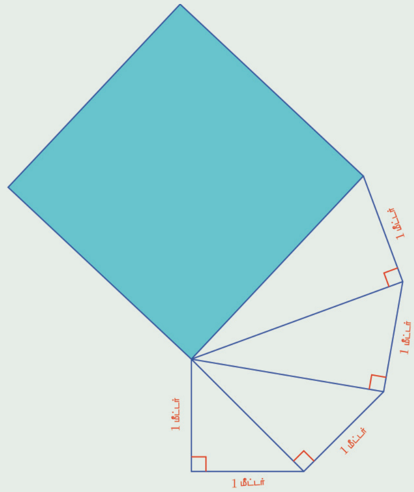
படத்தில் மிகச் சிறிய சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 1 சென்டிமீட்டராகும். மிகப்பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவையும் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தையும் கணக்கிடவும். இத்தகைய ஒரு படத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரையவும். (Regular polygon பயன்படுத்தலாம்) Area பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு சதுரத்தின் பரப்பளவையும் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும். இதில் எந்தச் சதுரங்களின் பக்கங்களைப் பின்ன எண்களாகக் கூற இயலும்?

முன்னரே செய்தது போன்றுள்ள கணக்கீடுகள் மூலம், 1.7, 1.73, 1.732, ... எனத் தொடரும் பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 3 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது எனவும் காணலாம். இதனைச் சுருக்கி $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ என எழுதலாம்.

பொதுவாகக் கூறினால் x எந்த மிகை எண் ஆனாலும், பரப்பளவு x ஆன சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{x}$ என எழுதலாம். ஒரு வேளை $\sqrt{x}$ ஓர் எண்ணல் எண்ணோ பின்ன எண்ணோ ஆகலாம்; அல்லது வர்க்கம் x உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும், தசம வடிவத்திலுள்ள பின்ன எண்களைக் கணக்கிட்டு, $\sqrt{x}$ ஐத் தசம வடிவத்திலும் எழுதலாம்.

(1) படத்தில் மிகவும் மேல் உள்ள செங்கோணத்தின் கர்ணத்தைப் பக்கமாகக் கொண்டு சதுரம் வரையப்பட்டுள்ளது.

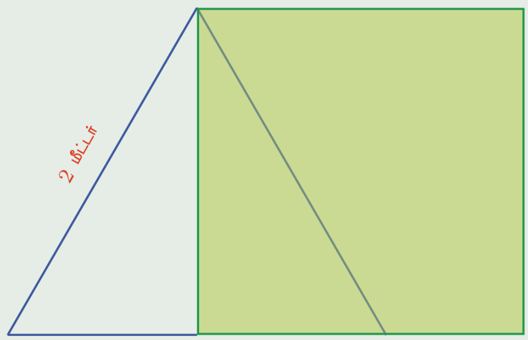
சதுரத்தின் பரப்பளவும், ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் கணக்கிடுக.



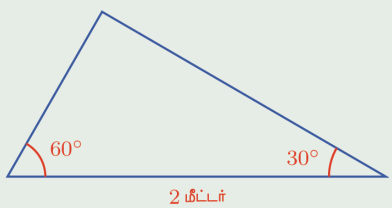
(2) பக்கங்களின் நீளம் 2 மீட்டர் உள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரத்தைப் பக்கமாகக் கொண்டு ஒரு சதுரம் வரையப்பட்டுள்ளது.

i) சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு சதுரமீட்டராகும்?

ii) முக்கோணத்தின் உயரம் எத்தனை மீட்டராகும்?



iii) கீழ்க்காணும் முக்கோணத்தின் மற்ற இரு பக்கங்களின் நீளம் என்ன?



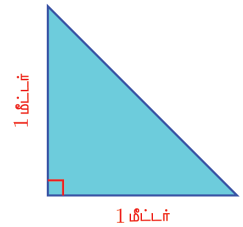
(3) எந்த ஒற்றை எண்ணையும் இரு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம் என எட்டாம் வகுப்பில் **முற்றொருமைகள்** என்ற பாடத்தில் கண்டுள்ளோம் அல்லவா. இதனைப் பயன்படுத்தி $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ சென்டி மீட்டர் நீளம் உள்ள கோடுகள் வரையவும்.

(4) $\sqrt{13}$ சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோடு வரைவதற்கு உரிய இரு வேறுபட்ட வழிமுறைகளை விளக்குக.

(5) $\sqrt{2}$ ஐ விடப் பெரியதும், $\sqrt{3}$ ஐ விடச் சிறியதுமான மூன்று பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

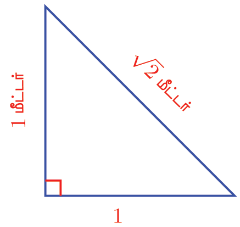
கூட்டலும் கழித்தலும்

செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளம் 1 மீட்டர் உள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?



சுற்றளவு?

இதன் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $\sqrt{2}$ மீட்டர் அல்லவா?



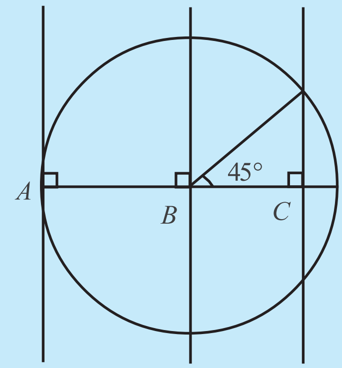
எனவே சுற்றளவு கிடைப்பதற்கு 2 மீட்டரும் $\sqrt{2}$ மீட்டரும் கூட்ட வேண்டும். இந்த நீளத்தை $2 + \sqrt{2}$ மீட்டர் என எழுத வேண்டும்.

$\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் தோராயமாகச் சமமான தசம பின்ன எண்கள் 1.4, 1.41, 1.414, ...எனத் தொடரும் அல்லவா.

எனவே $2 + \sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் தோராயமாகச் சமமான பின்ன எண்கள் கிடைப்பதற்கு மேலே குறித்த எண்ணுடன் 2 கூட்டப்பட்டதே, அதாவது, 3.4, 3.41, 3.414, ... என்ற பின்ன எண்களாகும்.

இவ்வாறும் விகிதம்

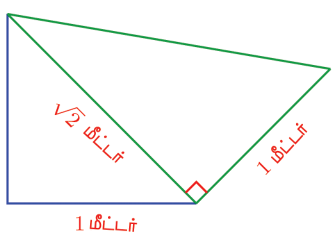
இப்படத்தில் B வட்டமையம் ஆகும்.



$AB : BC = \sqrt{2} : 1$

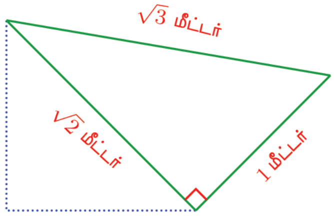
இந்தக் கணக்கில் சென்டிமீட்டர் வரை துல்லியமான அளவு போதும் எனத் தீர்மானித்தால் சுற்றளவு 3.41 மீட்டர் என எடுக்கலாம். இனி, மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாக வேண்டுமெனில் 3.414 மீட்டர் என எடுக்க வேண்டும்.

இம் முக்கோணத்தின் கர்ணத்தை அடிப்பக்கமாகக் கொண்டு, படத்தில் காண்பித்துள்ளது போன்று வேறொரு செங்கோண முக்கோணம் உருவாக்கினாலோ?



இதன் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{3}$ மீட்டர் எனக் கண்டோம் அல்லவா.

இதன் சுற்றளவை $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ மீட்டர் என எழுதலாம்.



$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ என்ற எண்ணுடன் தோராயமாகச் சமமான பின்ன எண்கள் கிடைக்க, இவை ஒவ்வொன்றுடனும் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களை முறையே கூட்ட வேண்டும்.

$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414
$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	:	3.1	3.14	3.146

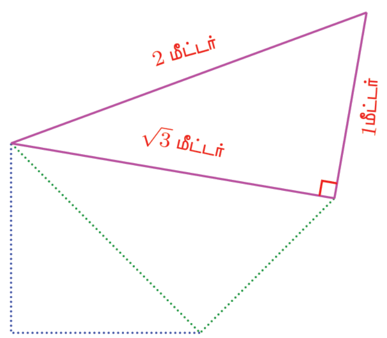
இவற்றுடன் 1 ஐக் கூட்டினால் $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ என்ற எண்ணுடன் தோராயமாகச் சமமான பின்ன எண்கள் கிடைக்கும்.

ஆகவே புதிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவு மில்லி மீட்டர் வரை துல்லியமாக 4.146 மீட்டர்.

இந்த முக்கோணத்தின் சுற்றளவு, முதலாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவை விட எவ்வளவு கூடுதலாகும்? ஏறக்குறைய $4.146 - 3.414 = 0.732$ மீட்டர் எனக் கூறலாம். இல்லையெனில் இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2 = \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

இனி இந்த முக்கோணத்தின் மேல் இதுபோன்று வேறொரு முக்கோணம் வரைந்தாலோ? அதன் பக்கங்களின் நீளம் என்ன?



இதன் சுற்றளவு, இரண்டாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவைவிட எவ்வளவு கூடுதல்?

புதிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவு $2+1+\sqrt{3} = 3+\sqrt{3}$ மீட்டர். இதனுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களைக் கணக்கிடாமலே சுற்றளவு எவ்வளவு கூடுதல் எனக் காணலாம்.

இரண்டாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவு, $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ மீட்டர் அல்லவா, ஆகவே சுற்றளவில் வித்தியாசம்

$$(3+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{2}$$

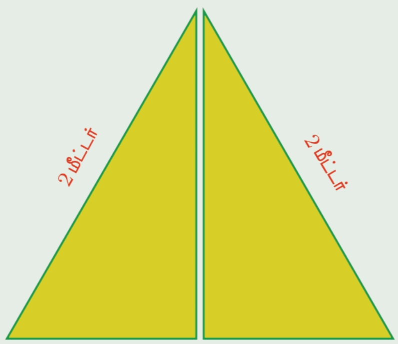
இது மூன்று தசம இடங்களுக்குத் துல்லியமாக

$$2 - 1.414 = 0.586$$

எனக் கணக்கிடலாம். அதாவது சுற்றளவு ஏறக்குறைய 0.586 மீட்டர் கூடுதலாகும்.

(1) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் $1\frac{1}{2}$ மீட்டரும், மற்றொரு பக்கம் $\frac{1}{2}$ மீட்டரும் ஆகும். அதன் சுற்றளவைச் சென்டிமீட்டர் வரை துல்லியமாகக் கணக்கிடவும்.

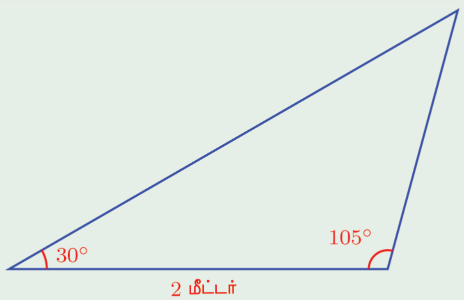
(2) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை ஓர் உச்சி வழியாக வெட்டி, இரு சமப்பாகங்களாகப் பிரித்ததே படத்தில் காண்பிக்கப் பட்டுள்ளது.



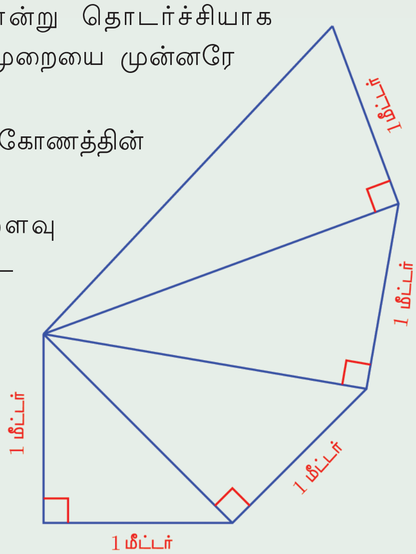
i) இவற்றில் ஒன்றின் சுற்றளவு எத்தனை மீட்டர்?

ii) முழு முக்கோணத்தைவிட சுற்றளவு எவ்வளவு குறைந்தது?

(3) கீழ்க்காணும் முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடுக.



(4) படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போன்று தொடர்ச்சியாக செங்கோண முக்கோணங்கள் வரையும் முறையை முன்னரே கண்டிருக்கிறோம் அல்லவா.



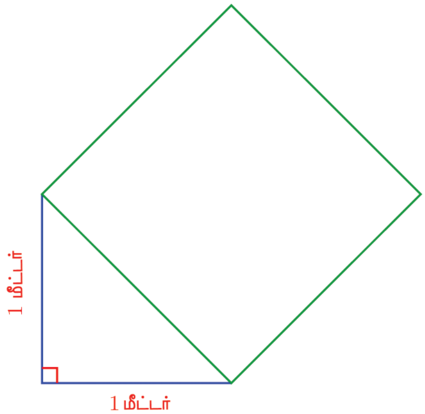
i) இவ்வாறு வரைகின்ற பத்தாவது முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு?

ii) பத்தாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவு ஒன்பதாவது முக்கோணத்தை விட எவ்வளவு கூடுதலாகும்?

iii) இயற்கணித மொழியில், nஆவது முக்கோணத்தின், அதன் தொட்டு முன்னர் உள்ள முக்கோணத்தின் சுற்றளவுகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்தை எவ்வாறு எழுத லாம்?

(5) செங்கோணப் பக்கங்கள் $\sqrt{3}$ செ.மீ., $\sqrt{2}$ செ.மீ. ஆன செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் எவ்வளவு? செங்கோணப் பக்கங்களின் தொகை கர்ணத்தைவிட எவ்வளவு கூடுதலாகும்?

பெருக்கல்



இப்படத்தைப் பலமுறை பார்த்தோம் அல்லவா, இதில் சதுரத்தின் சுற்றளவு எத்தனை மீட்டர் ஆகும்?

அதன் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் நீளமும் $\sqrt{2}$ மீட்டர் என அறிவோம். எனவே சுற்றளவு கிடைக்க இதன் நான்கு மடங்கைக் கணக்கீடு செய்தால் போதும்.

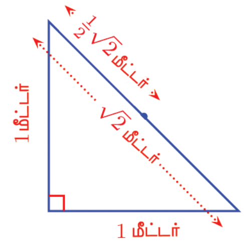
மற்ற எண்களைப் போன்று $\sqrt{2}$ இன் 4 மடங்கையும் $4 \times \sqrt{2}$ என எழுதலாம். இதனைச் சாதாரணமாக, பெருக்கல் அடையாளம் இல்லாது, $4\sqrt{2}$ என எழுதுவோம்.

இந்த எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிக்க $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களின் நான்கு மடங்கை எடுக்க வேண்டும்.

ஆகவே நமது சதுரத்தின் சுற்றளவு, மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாக எடுத்தால்,

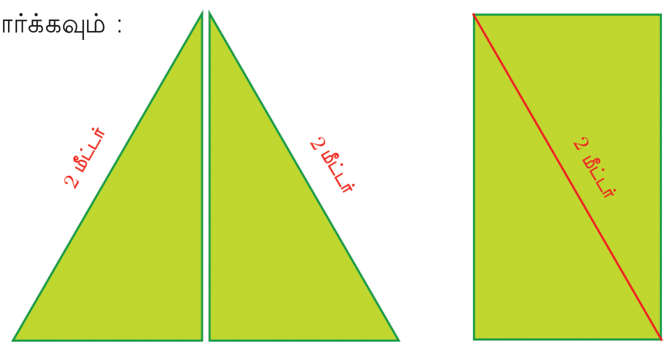
$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ மீட்டர்}$$

இதுபோன்று $\sqrt{2}$ இன் பாதியை $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ என எழுதுகிறோம்.

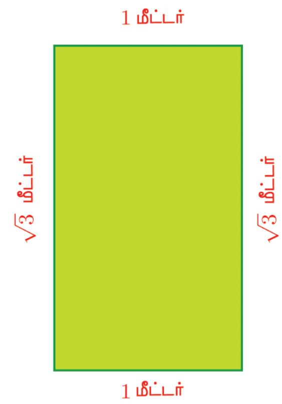


$\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களின் பாதியை எடுத்தால், $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்கள் கிடைக்கும். அதாவது, $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$

இனி இப்படத்தைப் பார்க்கவும் :



ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தை, சமமான இரு செங்கோண முக்கோணங்களாக வெட்டி, மாற்றி அடுக்கி ஒரு செவ்வகம் உருவாக்கப்பட்டிருகிறது.



இந்தச் செவ்வகத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு மீட்டர்?

செங்கோண முக்கோணங்கள் சமமானதால், ஒவ்வொன்றின் அடிப்பக்கமும் 1 மீட்டர் ஆகும். உயரம் $\sqrt{3}$ மீட்டர் என முன்னர் ஒரு கணக்கில் கண்டீர்கள்.

எனவே, சுற்றளவு $2\sqrt{3} + 2$ மீட்டர்.

இந்த எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களை இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$2\sqrt{3}$	:	3.4	3.46	3.464 . . .
$2\sqrt{3}+2$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

மற்ற எண்களில் உள்ளதைப் போன்று இங்கும் $2\sqrt{3} + 2$ உம் $2(\sqrt{3} + 1)$ உம் ஒன்றே தானா? இரண்டாவது கூறப்பட்ட எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களை இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$\sqrt{3} + 1$	:	2.7	2.73	2.732 . . .
$2\left(\sqrt{3}+1\right)$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

அதாவது, $2\sqrt{3} + 2$ என்ற எண்ணுடனும் $2(\sqrt{3} + 1)$ என்ற எண்ணுடனும் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்கள் ஒரேபோல்தான்; ஆகவே,

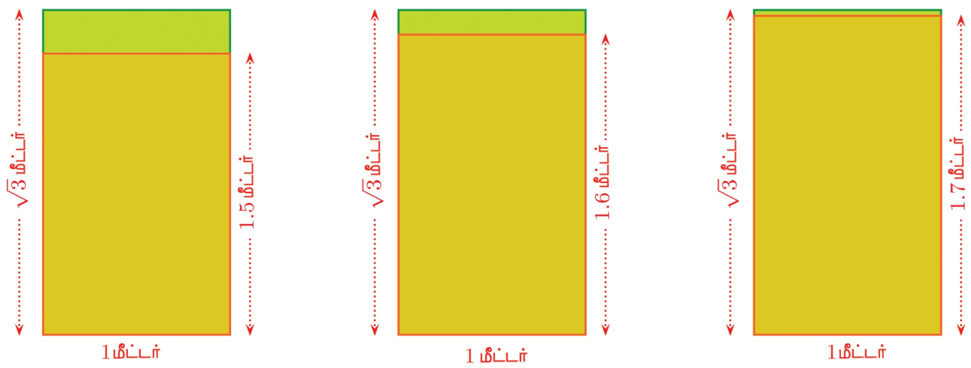
$$2\sqrt{3} + 2 = 2(\sqrt{3} + 1)$$

இனி மேலே உள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு சதுரமீட்டர் எனப் பார்க்கலாம்.

பக்கங்களின் நீளம் பின்ன எண்கள் எனில், அவற்றின் பெருக்கற் பலனே பரப்பளவு (ஆறாம் வகுப்பில் **பாகங்களின் பாகம்** என்ற பாடத்தில் **பின்னப் பரப்பு** என்ற பகுதி)

இங்கும் பரப்பளவு, பக்கங்களின் பெருக்கற் பலனான $1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ சதுர மீட்டர் ஆகுமா?

இதனைக் காண்பதற்கு முன்னர் ஒரு முறை செய்ததைப் போன்று, ஒரு பக்கம் 1 மீட்டரும் மற்ற பக்கம் $\sqrt{3}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் பின்ன எண் நீளமும் ஆன செவ்வகங்களை இதனுள் வரைந்து பார்க்கலாம்.



தொடர்ந்து உட்செவ்வகங்களின் உயரங்கள் 1.73, 1.732,. . . என இவ்வாறு மீட்டரில் எடுக்கும்போது அவற்றின் பரப்பளவுகளும் இதே எண்களாகச் சதுர மீட்டரில் கிடைக்கும்.

அதாவது, பக்கங்களின் நீளம் $\sqrt{3}$மீட்டரும் 1 மீட்டரும் உடைய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $\sqrt{3}$சதுர மீட்டர்தான்.

இனி செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ என ஆனாலோ? இதன் பரப்பளவைக் குறிப்பிடுவது $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ என்ற அடையாளத்தில் ஆகும். இதனை எண்முறையில் விளக்க, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ என்பவற்றுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களை முறையே பெருக்கித் தேவையான தசம இடங்கள் வரை எடுக்க வேண்டும்.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732	1.7320	1.73205 . . .
$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421 . . .
$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$	:	2.4	2.44	2.449	2.4494	2.44948 . . .

$$\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2.44948\ . . .$$

தசமக் கணக்கு

தசம வடிவத்திலுள்ள எண்களை ஒரு குறிப்பிட்ட தசம இடம் வரை சுருக்கி (திருத்தமாக) எழுதும்போது அடுத்த இடத்தில் உள்ள இலக்கம் 5 இல் கூடுதல் எனில், நமக்கு வேண்டிய இட இலக்கத்தினுடன் 1ஐக் கூட்டி எடுக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ஆனதால் இப்பெருக்கற்பலனை ஒரு தசம இடத்திருத்தமாக எழுதுவது 2.4 என்றாகும்.

இங்கு வேறொரு காரியம் உண்டு 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, 1.41421^2, . . . எனத் தொடரும் வர்க்கங்கள் 2 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் எனக் கண்டோம் அல்லவா. ($\sqrt{2} = 1.41421$ . . . என எழுதுவதன் பொருள் இதுதானே?) 1.7^2, 1.73^2,1.732^2, 1.7320^2, 1.73205^2,. . . எனத் தொடரும் வர்க்கங்கள் 3 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் எனவும் கண்டோம்.

எனவே இந்த வர்க்கங்களின் பெருக்கல் பலன் 6 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரவேண்டும் அல்லவா?

மட்டுமல்ல, பின்ன எண்களின் வர்க்கங்களின் பெருக்கல்பலன், பெருக்கல்பலனின் வர்க்கம் ஆனதால்

$$1.7^2 \times 1.4^2 = (1.7 \times 1.4)^2$$

$$1.73^2 \times 1.41^2 = (1.73 \times 1.41)^2$$

$$1.732^2 \times 1.414^2 = (1.732 \times 1.414)^2$$

என்றெல்லாம் காணலாம். இதில் 1.7×1.4, 1.73×1.41 என இவ்வாறு பெருக்கற்பலன்கள் அட்டவணையில் கடைசி வரிசையில் கணக்கிடப் பட்டுள்ளன. எனவே 2 உடனும், 3 உடனும், 6 உடனும் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களை இவ்வாறு எழுதலாம்.

3	:	1.7^2	1.73^2	1.732^2	1.7320^2	$1.73205^2 \ldots$
2	:	1.4^2	1.41^2	1.414^2	1.4142^2	$1.41421^2 \ldots$
6	:	2.4^2	2.44^2	2.449^2	2.4494^2	$2.44948^2 \ldots$

இதில் கடைசி வரிசையில் காண்பது என்ன?

2.4, 2.44, 2.449, 2.4494, 2.44948, . . . எனத் தொடரும் பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 6 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.

புதிய எண்களின் வரையறைப்படி, இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$\sqrt{6} = 2.44948\ldots$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ என்ற எண்ணும் இதுவே ஆகும் என முன்னர் கண்டோம்.

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

2 க்கும் 3 க்கும் பதிலாக வேறு எண்களை எடுத்துக் கொண்டாலும், இது போலவே வர்க்கமூலங்களின் பெருக்கற்பலன், பெருக்கற் பலனின் வர்க்கமூலம் எனக் காணலாம். (வர்க்க மூலங்கள் எண்ணல் எண்களோ பின்ன எண்களோ எனில் இது சரியாகும் என ஏழாம் வகுப்பிலேயே கண்டுள்ளோம்.)

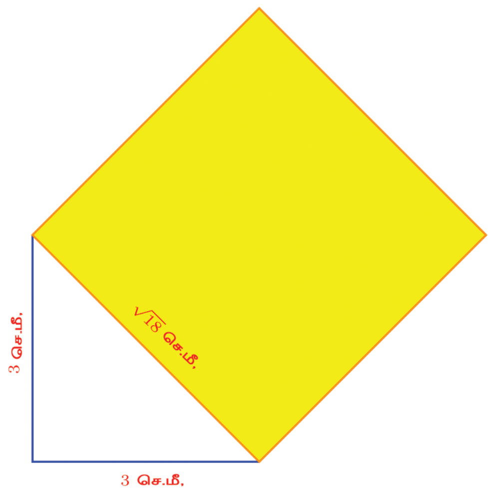
x, y என்ற எந்த இரு மிகை எண்கள் ஆனாலும் $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

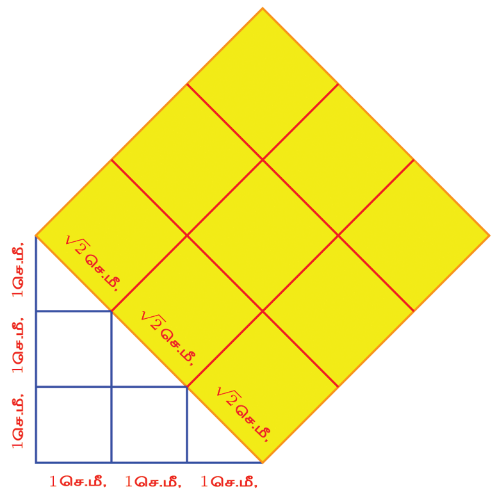
வர்க்க மூலங்களை எளிதாக்கி எழுத இதைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, செங்குத்துப் பக்கங்கள் இரண்டும் 3 சென்டிமீட்டர் உடைய செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளத்தைப் பார்க்கலாம். பைதகோரஸ் தேற்றப்படி, இந்தக் கர்ணம் பக்கம் ஆன சதுரத்தின் பரப்பளவு $3^2 + 3^2 = 18$ சதுர சென்டிமீட்டர். எனவே மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $\sqrt{18}$ சென்டிமீட்டர்.

இனி 18 ஐ 9×2 என எழுதினால் இதனை இவ்வாறு எழுதலாம்.

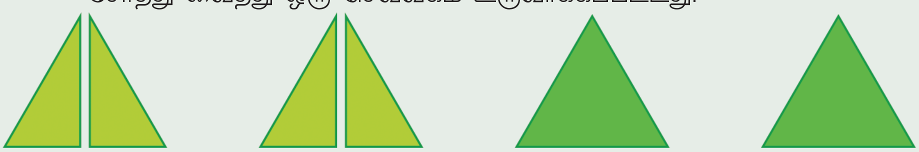
$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

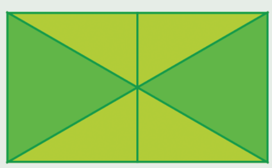
இதனை வடிவியலாகவும் காணலாம்.





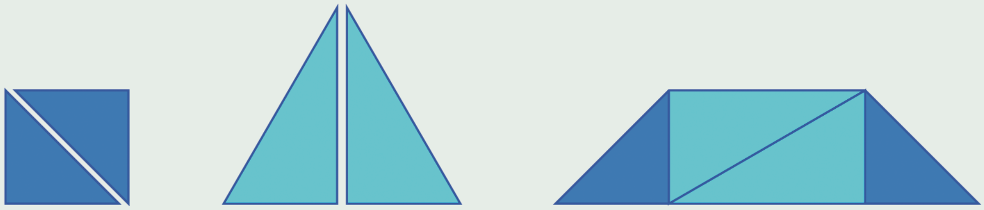
(1) ஒரே அளவு உள்ள நான்கு சமப்பக்க முக்கோணங்களில் இரண்டை நெடுக்காக வெட்டிய துண்டுகளையும் இரண்டை முழுமையாகவும் சேர்த்து வைத்து ஒரு செவ்வகம் உருவாக்கப்பட்டது.





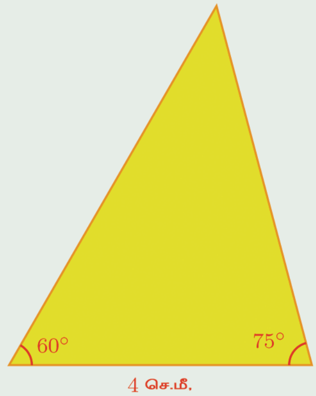
எல்லாச் சமப்பக்க முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளம் 1 மீட்டர் எனில், செவ்வகத்தின் சுற்றளவும், பரப்பளவும் எவ்வளவு?

(2) ஒரு சதுரமும் அதன் பக்கங்களின் இரு மடங்கு நீளம் உள்ள பக்கங்களுடன் கூடிய ஒரு சமப்பக்க முக்கோணமும் கீழ்க்காண்பது போல் வெட்டி மாற்றிச் சேர்த்து ஒரு சரிவகம் உருவாக்கப்படுகிறது.



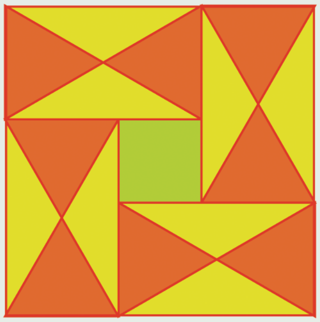
சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர் எனில், சரிவகத்தின் சுற்றளவும் பரப்பளவும் எவ்வளவாக இருக்கும்?

(3) படத்தில் காணும் முக்கோணத்தின் சுற்றளவையும் பரப்பளவையும் கணக்கிடுக.



(4) படத்தில் சிவப்பு முக்கோணங்கள் எல்லாம் சமப் பக்கங்கள் உடையவை.

வெளிச்சதுரம், உள்சதுரம் ஆகியவற்றின் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன?



(5) கீழ்க்காணும் எண் ஜோடிகளில் பெருக்கற்பலன் எண்ணல் எண்ணோ பின்ன எண்ணோ ஆனவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) $\sqrt{3}, \sqrt{12}$ ii) $\sqrt{3}, \sqrt{1.2}$ iii) $\sqrt{5}, \sqrt{8}$

iv) $\sqrt{0.5}, \sqrt{8}$ v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}, \sqrt{3\frac{1}{3}}$

வகுத்தல்

$2 \times 3 = 6$ என்ற பெருக்கலை $\frac{6}{2} = 3$ என்றோ, $\frac{6}{3} = 2$ என்றோ வகுத்தலாக எழுதலாம் அல்லவா. இதைப் போன்று $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ பெருக்கலையும் வகுத்தலாக எழுதலாம்.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

பொதுவாகக் கூறினால், எண்ணல் எண்களோ பின்ன எண்களோ ஆன எந்த x, y எடுத்தாலும் $x \times y = z$ என்ற பெருக்கலை $\frac{z}{x} = y$ என்றும் $\frac{z}{y} = x$ என்றும் வகுத்தலாக எழுதலாம்.

இதைப்போன்று,

x, y என்ற எந்த இரு மிகை எண்கள் ஆனாலும்,

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$

என்ற பெருக்கலை வகுத்தலாக

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \qquad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$ **என எழுதலாம்.**

இனி $\frac{6}{2} = 3$ உம், $\frac{6}{3} = 2$ உம் ஆனதால்

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

எனவும் காணலாம். முன்னர் கண்டது என்ன?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

இனி இரு ஜோடி சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}}$$

என்றெல்லாம் காணலாம்;

இதைப் போன்று $3 \times \frac{2}{3} = 2$ என்பதிலிருந்து

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

எனவும் தொடர்ந்து இந்தப் பெருக்கலை வகுத்தலாக

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ என்றும் எழுதலாம்.

இனி இத்தகைய வர்க்கமூலங்களைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு எனக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ கணக்கிட முதலாவதாக,

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

என எழுதலாம். தொடர்ந்து $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான ஏதேனும் தசம எண்ணால் ஒன்றை வகுத்து $\frac{1}{\sqrt{2}}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்ணின் தசம வடிவத்தைக் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$$ (கணிப்பான் பயன்படுத்தவும்)

வேறொரு எளிய முறை உள்ளது: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ஆனதால் இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

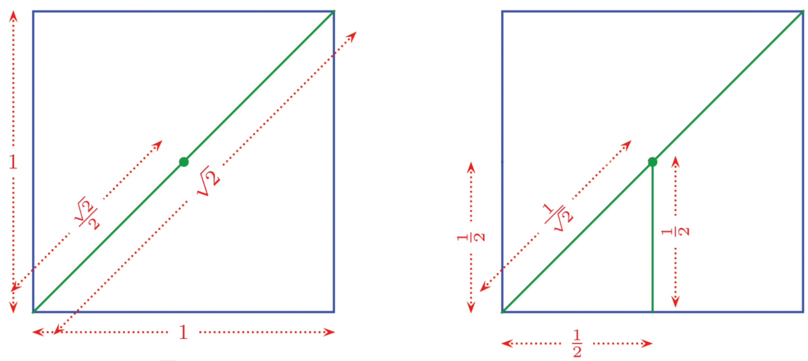
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

இனி

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$ (இதற்குக் கணிப்பான் தேவையில்லை அல்லவா)

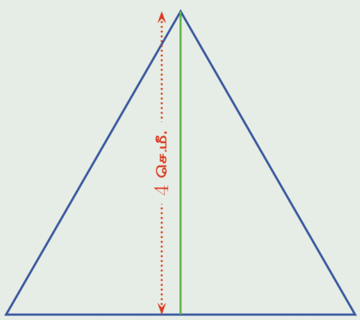
என எளிதாகக் காணலாம் அல்லவா.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ என்பதை வடிவியல் முறையிலும் காணலாம்.



இதைப்போன்று $\sqrt{\frac{1}{3}}$ உம் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

(1) படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தை மில்லி மீட்டர் வரை திருத்தமாகக் கணக்கிடுக.

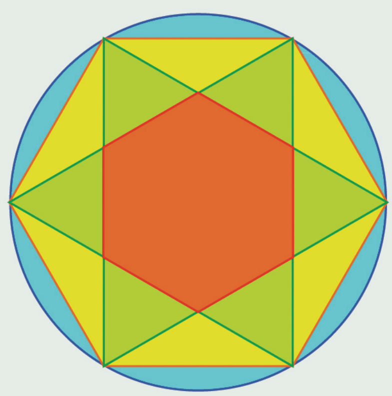


(2) ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒன்றுவிட்ட உச்சிகளை இணைத்துள்ள படம் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) உள்ளே உள்ள சிவப்பு அறுகோணம் ஒழுங்கு அறுகோணம் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(ii) பெரிய அறுகோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் எவ்வளவு பாகம் சிறிய அறுகோணத்தின் ஒரு பக்கம்?

(iii) பெரிய அறுகோணத்தின் பரப்பளவின் எத்தனை பாகம் சிறிய அறுகோணத்தின் பரப்பளவு?

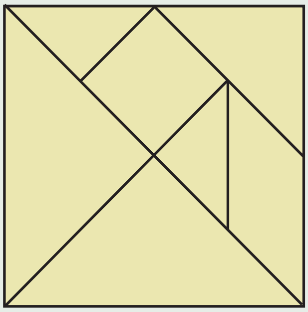


(3) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ எனத் தெளிவுபடுத்தவும். இதனைப் பயன்படுத்தி, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ இன் மதிப்பை இரு தசம இடம் வரை கணக்கிடவும்.

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ இன் மதிப்பை இரு தசம இடம் வரை கணக்கிடவும்.

(5) $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$ எனவும் $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$ எனவும் நிறுவுக. இதைப்போன்ற வேறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

(6) 4 சென்டிமீட்டர் பக்கம் உள்ள ஒரு சதுரத்தை 7 பாகங்களாகப் பிரித்த டான்கிராமின் படமே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. இதன் ஒவ்வொரு பாகத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும்.



4 செ.மீ.

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• பின்ன எண்களைப் பயன்படுத்தி எல்லா நீளங்களையும் குறிப்பிட இயலாது என நிறுவுதல். • பின்ன எண்ணாக எழுத முடியாத வர்க்க மூலங்களைத் தசம வடிவத்தில் எழுதும் முறையை விளக்குதல். • அத்தகைய எண்களைப் பயன்படுத்தியுள்ள செயல்களின் வடிவியல் சார்ந்த பொருளும் அவற்றுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்னங்களின் தசம வடிவங்களையும் கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல்.			

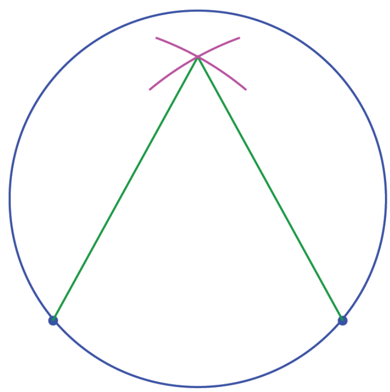
வட்டங்கள்

வட்டங்களும் கோடுகளும்

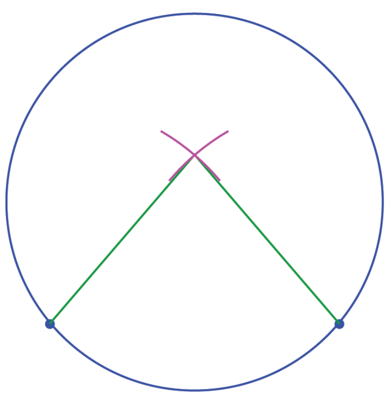
வளையல் அல்லது ஒரு வட்டப் பாத்திரத்தின் மூடியை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வைத்து ஒரு வட்டம் வரையவும். இதன் மையத்தை எவ்வாறு கண்டு பிடிக்கலாம்?

வட்டத்தின் எந்த இடத்திலிருந்தும் மையத்திற்கு உள்ள தூரம் ஒரே தூரம் ஆகும்.

அப்படியானால் இந்த வட்டத்தில் இரு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தினால் அவை இரண்டிலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் உள்ள புள்ளியே மையம். இத்தகைய ஒரு புள்ளியை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

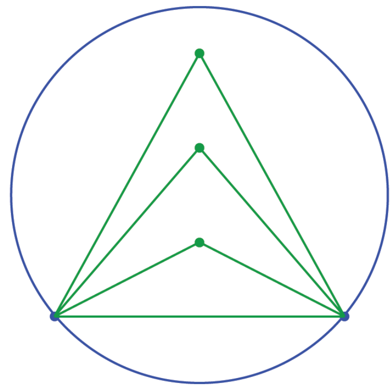


இது மையத்திற்கு மேலாக, தூரத்தைச் சற்று குறைவாக எடுத்தால்?



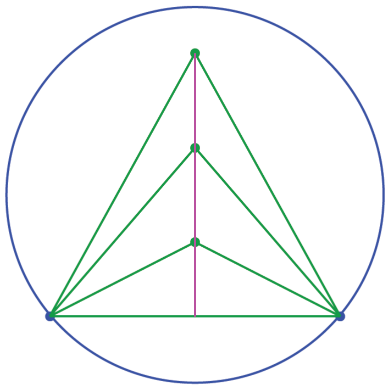
இப்போதும் அவ்வளவு சரியாகவில்லை. இவ்வாறு தவறாகவும் திருத்தியும் வரைந்து கொண்டிருப்பதற்குப் பதிலாக பிரச்சினைப் பற்றிச் சிறிது சிந்திப்போம்.

வட்டத்தில் அடையாளப்படுத்திய இரு புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் பல புள்ளிகள் உள்ளன. அவற்றில் எந்தப் புள்ளி மையம் என்று எவ்வாறு முன்னரே தீர்மானிக்க இயலும்?



இரு புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகள் எல்லாம் அந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு அடிப்பக்கமான இரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் மூன்றாவது உச்சி அல்லவா?

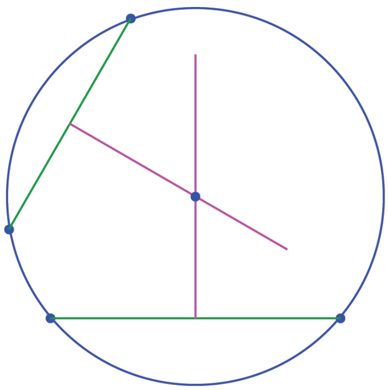
இவ்வாறு உள்ள புள்ளிகள் எல்லாம், அடிப்பக்கத்தின் செங்குத்து இருசம வெட்டியில் ஆகும் எனப் பார்த்திருக்கிறோம். (எட்டாம் வகுப்பில் **சர்வசம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடம்)



அப்படியானால் நாம் தேடுகின்ற வட்ட மையம் வட்டத்தில் அடையாளப் படுத்தப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியில் ஆகும் எனக் கிடைத்தது.

இது முழுமை பெறவில்லை அல்லவா; இந்தக் கோட்டில் மையம் எங்கே என்று அறிய வேண்டாமா?

வட்டத்தில் வேறு இரு புள்ளிகளை எடுத்தால், அவை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசம வெட்டியில் மையம் இருக்க வேண்டும். இரு கோடுகளிலும் இருக்க வேண்டு மென்பதால் அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியே மையம்:



தேடல் முடிந்தது; இனி அதிலிருந்து தெரிந்து கொண்டவற்றை நினைவில் வைப்போம்.

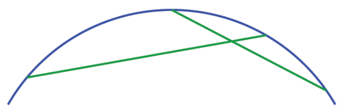
வட்டத்திலுள்ள எந்த இரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டி, வட்ட மையம் வழியாகக் கடந்து செல்லும்.

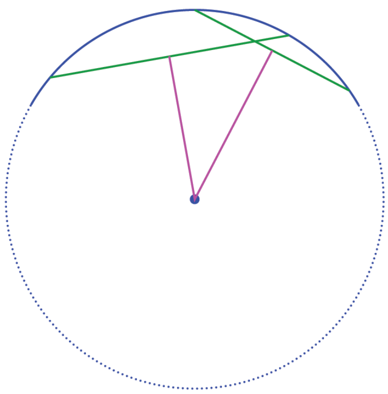
"வட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு" என்று விரிவாகச் சொல்வதற்குப் பதிலாக அத்தகைய கோடுகளுக்கு எல்லாம் ஒரே பெயர் அளிக்கப்படுவதும் உண்டு. (ஆழமாகச் சிந்திப்பதும் இறுதியில் சுருக்கிக்

கூறுவதும் அல்லவா கணிதத்தின் இயல்பு). வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டைப் பொதுவாக நாண் (chord) என்று கூறுவர். அப்படியானால் முன்னர் கூறிய கோட்பாடு இவ்வாறு ஆகும்.

வட்டத்தின் எந்த நாணினுடையவும் செங்குத்து இருசமவெட்டி, வட்ட மையம் வழியாகக் கடந்து செல்லும்.

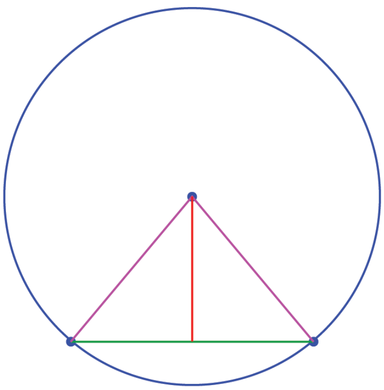
இனி வட்டத்தின் ஒரு பாகம் மட்டும் (எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வளையல் துண்டு) கிடைத்தாலும், இதுபோன்று வட்ட மையத்தையும் அதன் வழியாக முழு வட்டத்தையும் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா? இந்தத் துண்டில் இரு கோடுகள் வரைந்து அவற்றின் செங்குத்து இரு சமவெட்டிகள் வரைந்தால் போதும் அல்லவா?





நாணின் முனைகளும் வட்ட மையமும் சேர்ந்து ஓர் இரு சமப்பக்க முக்கோணம் ஆகும் என்பதிலிருந்து மேலே கூறப்பட்ட கோட்பாட்டை அடைந்தோம்.

இரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கும் மூன்றாம் உச்சிக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைப் பல வகைகளில் கூறலாம் என எட்டாம் வகுப்பில் பார்த்தோம்:



- மூன்றாம் உச்சியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடு, அடிப்பக்கத்தை இரு சமப்பாகம் செய்கிறது.
- மூன்றாம் உச்சியையும் அடிப்பக்கத்தின் மையப் புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு, அடிப் பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.
- அடிப்பக்கத்தின் செங்குத்து இரு சமவெட்டியில் தான் மூன்றாவது உச்சி.

இதில் இறுதியில் கூறியதில் அடிப்பக்கம் வட்டத்தின் நாணும், மூன்றாம் உச்சி வட்டமையமுமாக எடுத்ததே நமது வட்டக்கோட்பாடு. இதுபோன்று முதல் இரு முக்கோணக் கோட்பாடுகளையும் வட்டக் கோட்பாடுகளாக மாற்றி எழுதலாம் அல்லவா.

வட்டமையத்திலிருந்து உள்ள செங்குத்துக்கோடு, நாணை இரு சமப்பாகம் செய்கிறது.

வட்ட மையத்தையும் நாணின் மையப்புள்ளியையும் இணைக்கும்கோடு, நாணிற்குச் செங்குத்தாகும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம். ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தினுள் ஒரு சமப்பக்க முக்கோணம் வரைய வேண்டும். ஒரே நீளம் உள்ள ஏதேனும் இரு நாண்கள் வரைந்தால், மூன்றாவது பக்கம் இவற்றிற்குச் சமமாக வேண்டும் என்றில்லை அல்லவா (முயற்சி செய்யவும்!)

அப்போது முதல் பக்கம் ஆன நாணையே கணக்கீடு செய்து வரைய வேண்டும். அத்தகைய ஒரு முக்கோணத்தை வரைந்தால் எவ்வாறு இருக்கும் என்று பார்ப்போம். (அதற்கு GeoGebra பயன்படுத்தலாம் Regular polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி ஒரு சமப்பக்க முக்கோணம் வரையவும். Circle through three points பயன்படுத்தி அதன் உச்சிகள் வழி வட்டம் வரையவும்).

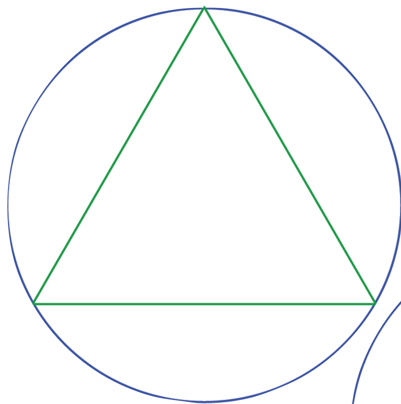
நாணும் கயிறும்

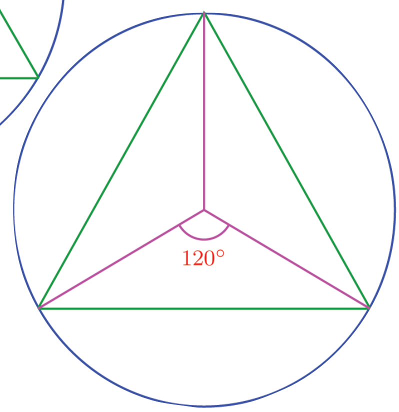
ஒரு வில்லின் முனைகளை இழுத்துக் கட்டும் கயிறைத் தான் சாதாரணமாக "நாண்" என்று கூறுவர். ஒரு வட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கின்ற வட்டப்பாகத்தையும் கோட்டையும் பார்த்தால் ஒரு வில் போன்ற தோற்றம் உருவாகும் அல்லவா.

வட்டத்தின் நாண் என்பது இந்த வில்லிலுள்ள கயிறின் இடம் ஆகும்.

வடமொழியின் 'ஜ்யா' என்ற சொல்லில் இருந்து 'நாண்' என்ற சொல் தோன்றியது. பண்டைய பாரதத்தின் கணித நூல்களில் 'ஜ்யா' என்ற வடமொழிச் சொல்லே பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது.

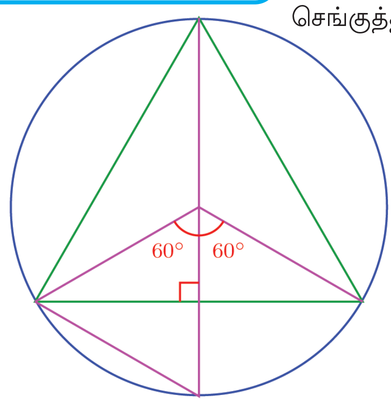
Chord என்ற சொல் இலத்தீன் மொழியில் உள்ள Chorda என்ற சொல்லில் இருந்து தோன்றியது. கயிறு என்பதே இதன் பொருள். கயிறு என்பதற்கு இப்போது ஆங்கிலத்தில் Cord என்ற சொல்லே பயன்பாட்டில் உள்ளது.

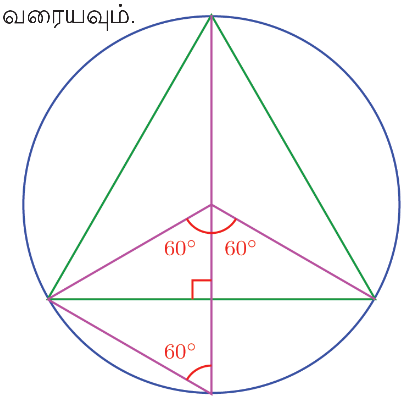




முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளையும் வட்டமையத்துடன் இணைக்கும் போது கிடைக்கின்ற மூன்று முக்கோணங்களும் சமமாகும். (காரணம்?) அதனால் இந்தக் கோடுகளின் இடையில் உள்ள கோணங்கள் எல்லாம் 120° வீதம் ஆகும்.

இனி வட்டமையத்திலிருந்து ஏதேனும் பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாக ஆரம் வரையவும்.





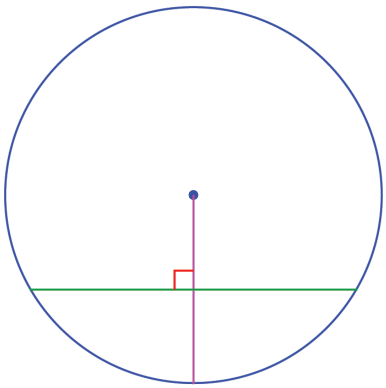
இடப்பக்கப் படத்திலும், தொடர்ந்து வலப்பக்கப் படத்திலும் அடையாளப் படுத்தியுள்ள கோணங்கள் 60° என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது எவ்வாறு என சிந்தித்துப் பார்க்கவும்.

எவ்வாறாயினும் இந்தச் சிறு (பிங்க்) சமப்பக்க முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியிலிருந்து எதிர்ப்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடே பெரிய (பச்சை) சமப்பக்க முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம். எனவே அது சிறிய முக்கோணத்தின் இந்தப் பக்கத்தைச் சமப்பாகம் செய்ய வேண்டும்.

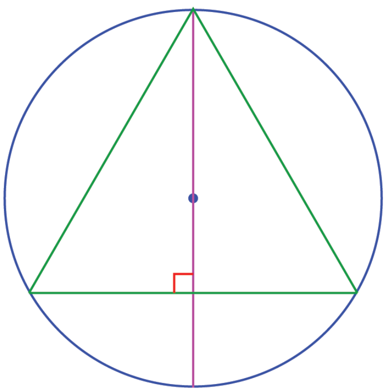
அதாவது, வட்டத்தில் வரையப்படும் சமப்பக்க முக்கோணத்தின் பக்கம், அதற்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஆரத்தை இரு சமப்பாகம் செய்கிறது.

அப்போது மாறான ஒரு வினா: வட்டத்தின் ஏதேனும் ஆரத்தின் செங்குத்துச் சமவெட்டியான நாண், வட்டத்தினுள் வரையக்கூடிய சமப்பக்க முக்கோணத்தின் பக்கம் தானா?

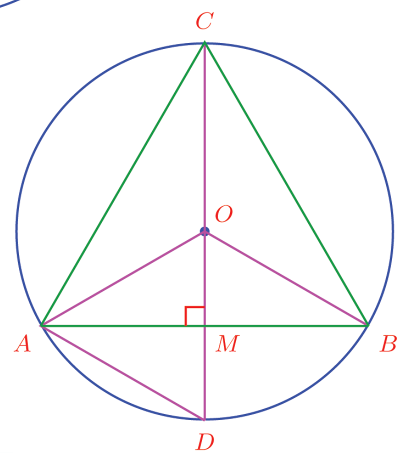
வரைந்து பார்ப்போம். முதலில் ஓர் ஆரம் வரைந்து, அதன் செங்குத்து இரு சமவெட்டி வரையவும்.



இனி இந்த ஆரத்தை நீட்டி விட்டம் உருவாக்கவும். அதன் முனையையும் நாணின் முனையையும் இணைக்கவும்.

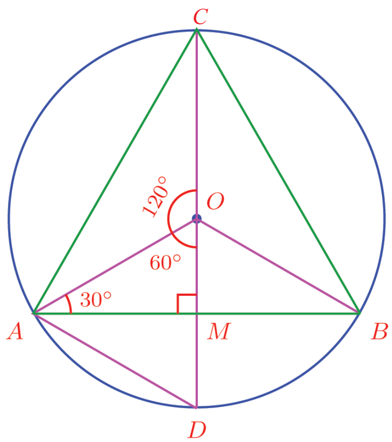


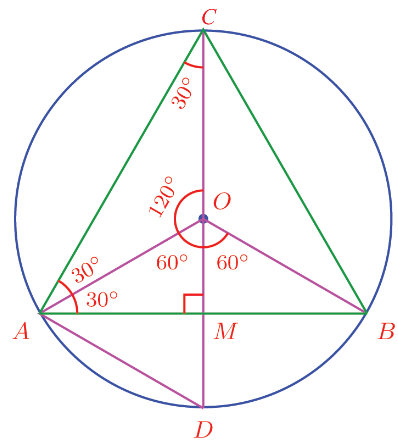
இது சமப்பக்க முக்கோணம் என நிறுவுவதற்கு, படத்தில் காண்பது போன்று கோடுகள் வரையவும்.



ABC சமப்பக்க முக்கோணம் எனத் தெளிவுபடுத்துவதற்கு, AB, AC, ஆகிய பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளம் என்றும், இவை இணையும் கோணம் CAB இன் அளவு 60° என்றும் கண்டுபிடித்தால் போதும்.

முதலில் OAD என்ற முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்: OA, OD என்பவை வட்டத்தின் ஆரங்கள் என்பதால் அவை சமம்; A என்ற புள்ளி, OD என்ற கோட்டின் செங்குத்து இரு சமவெட்டியிலானதால் OA, DA என்பனவும் சமம்; அப்போது OAD ஒரு சமப்பக்க முக்கோணம் ஆகும். இதற்கு ஏற்ப சில கோணங்களைக் கீழே இடப்பக்கம் உள்ள படத்தில் காண்பது போன்று கணக்கிடலாம்; தொடர்ந்து வலப்பக்கத்திலுள்ள படத்தில் காண்பது போன்றும்;



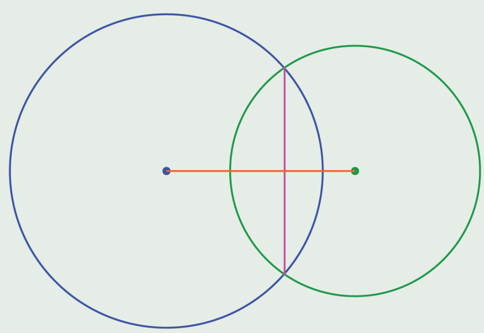


அவ்வாறு ABC என்ற முக்கோணத்தில் A இன் கோணம் 60° எனக் கிடைத்தது.

AB உம் AC உம் சமம் எனக் காண்பதற்கு, OAB, OAC ஆகிய முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும். இரண்டிலும் ஒரு பக்கம் OA ஆகும். OB, OC ஆகிய பக்கங்கள் சமமாகும். OAB என்ற முக்கோணத்தில் OA, OB என்பன இணையும் கோணமும், OAC என்ற முக்கோணத்தில் OA, OC என்பன இணையும் கோணமும் 120° ஆகும். அப்போது AB, AC ஆகியன சமமாகும்.

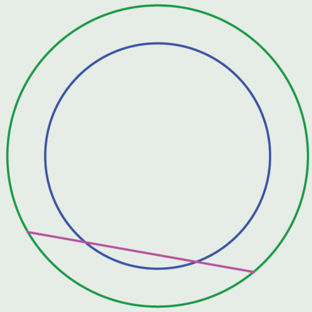
அவ்வாறு ஒரு கோணம் 60° உடைய இரு சமப்பக்க முக்கோணமே ABC; அதாவது, சமப்பக்க முக்கோணம், வட்டத்தினுள்ளே சமப்பக்க முக்கோணம் வரைவதற்கு ஓர் எளிய வழிமுறை கிடைத்தது அல்லவா?

(1) இரு வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு, அவ்வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டி என நிறுவுக.

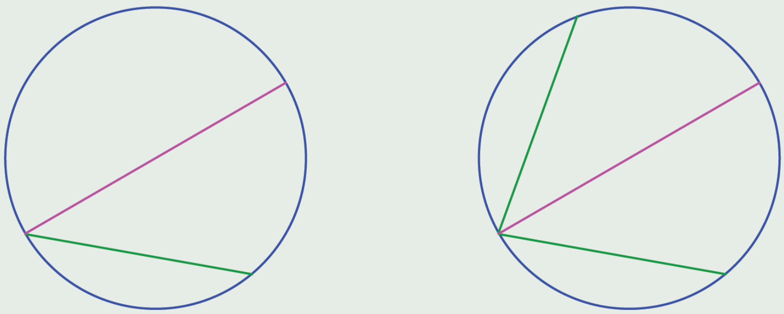


(2) ஒரே மையத்தைக் கொண்ட இரு வட்டங்களும், ஒரு கோடும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன;

கோட்டின் இரு பக்கங்களிலும் வட்டங்களுக்கு இடையிலுள்ள பகுதிகளுக்கு ஒரே நீளம் என நிறுவுக.



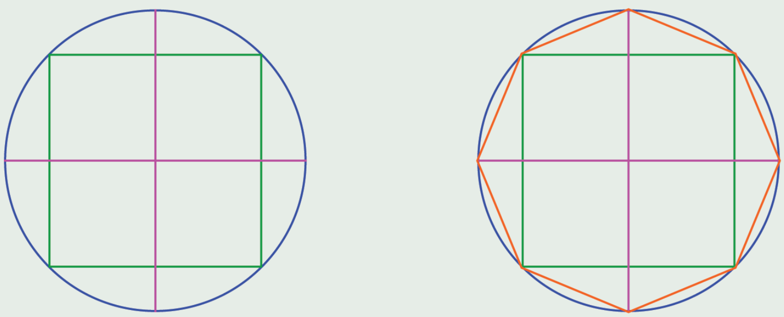
(3) வட்டத்தில் ஒரு நாணும், அதன் ஒரு முனை வழியாக ஒரு விட்டமும் வரையப்படுகின்றன. விட்டத்தின் மறுபக்கத்தில் இதே சாய்வில் வேறொரு நாண் வரையப்படுகிறது.



நாண்கள் ஒரே நீளம் உடையவை என நிறுவுக.

(4) வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரைகின்ற ஒரே நீளம் உள்ள நாண்கள் இணையும் கோணத்தை, அந்தப் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் விட்டம் இரு சமப்பாகம் செய்கிறது என நிறுவுக.

(5) ஒரு சதுரமும், அதன் நான்கு உச்சிகள் வழியாக வட்டமும் வரையவும். சதுரத்தின் பக்கங்களுக்கு, இணையான விட்டங்கள் வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியையும் சதுரத்தின் உச்சிகளையும் இணைத்து வேறொரு பலகோணம் வரையவும்.

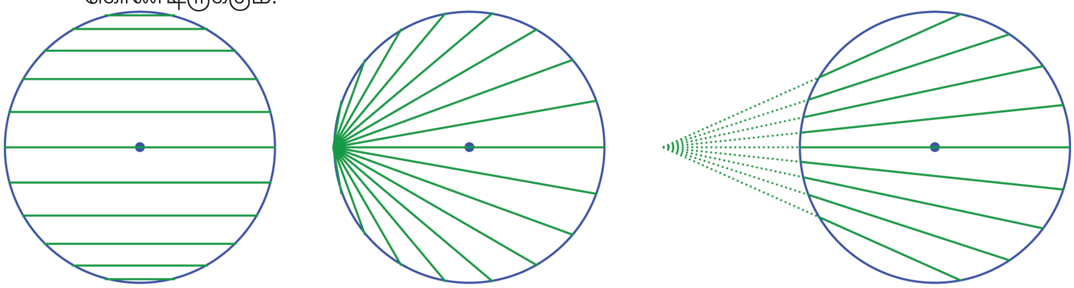


இது ஓர் ஒழுங்கு எண்கோணம் என நிறுவுக.

சம நாண்கள்

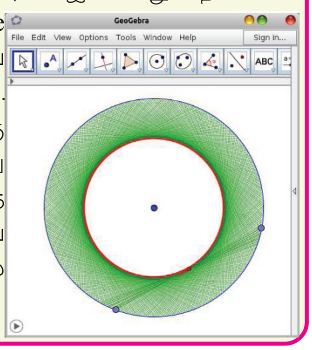
வட்டமையம் வழியாகக் கடந்து செல்லும் நாண்களே விட்டங்கள். ஒரு வட்டத்தில் மிக நீளம் கூடிய நாண்களும் விட்டங்கள் தான்.

மையத்திலிருந்து அகன்று செல்லும் போது நாணின் நீளம் குறைந்து கொண்டிருக்கும்.

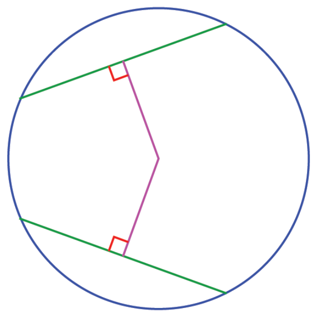


ஊர்ந்து நீங்கினாலும் சுழன்று நீங்கினாலும் மையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள நாண்களுக்கு ஒரே நீளம் ஆகும் என்று காண்கிறோம் அல்லவா.

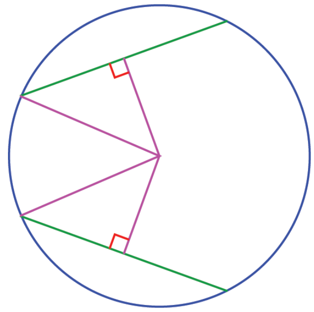
ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் இரு புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகளை இணைத்துக் கொண்டு ஒரு நாண் வரைக. இந்த நாணின் மையப்புள்ளியை அடையாளப் படுத்தி Trace அளிக்கவும். நாணின் முனைப்புள்ளிகளுக்கு Animation அளித்துப் பார்க்கவும். நாணின் மையப் புள்ளியின் பயணப் பாதை எது? ஏன் இவ்வாறு? நாணின் Trace அளித்துப் பார்க்கவும். நாணிற்கு நிறம் அளித்து படத்தை அழகுப்படுத்தவும் செய்யலாம்.



இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



வட்ட மையத்திலிருந்து ஒரே செங்குத்துத் தூரத்தில் உள்ள இரு நாண்கள். இவற்றிற்கு ஒரே நீளம் எனக் காட்டுவதற்கு ஒவ்வொன்றின் ஒரு முனையை வட்ட மையத்துடன் இணைக்கவும்.



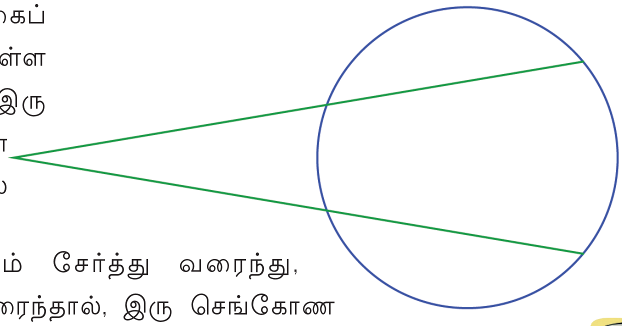
இப்போது கிடைத்த இரு செங்கோண முக்கோணங்களின் கர்ணங்கள், வட்டத்தின் ஆரங்களானதால் அவை சமம். ஒரு ஜோடி செங்குத்துப் பக்கங்கள் சமம் என்றும் கூறப்பட்டுள்ளது. அப்போது பைதகோரஸ் கோட்பாட்டின் படி, மூன்றாவது பக்கங்களும் சமம்.

மையத்திலிருந்து உள்ள செங்குத்துக்கோடு வெட்டிய துண்டுகளானதால், இந்த மூன்றாவது பக்கங்கள் நாண்களின் பாதியாகும். அவ்வாறு நாண்களின் பாதிகள் சமம் எனக் காணலாம். நாண்களும் சமம் ஆகும்.

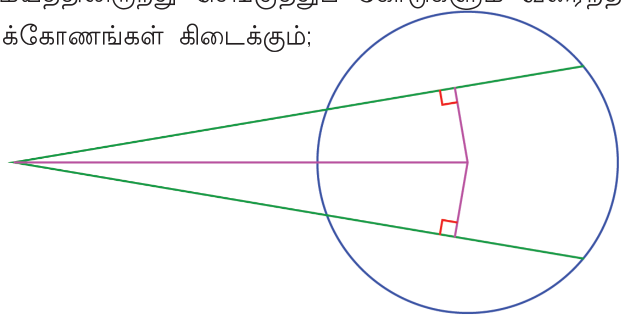
வட்டமையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள நாண்கள் ஒரே நீளம் உடையவை.

மாறாக, நாண்கள் சமம் என எடுத்துத் தொடங்கினால், மையத்திலிருந்துள்ள தூரங்களும் சமம் என நிறுவலாமா? முயற்சி செய்யவும்.

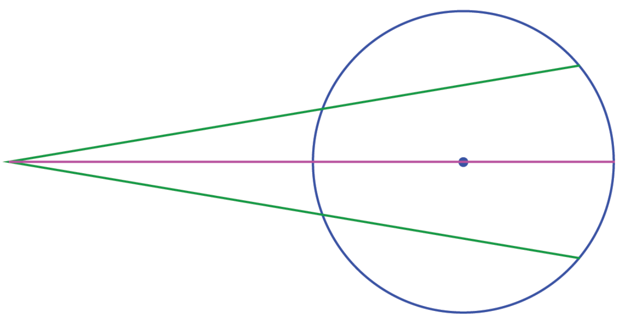
இதைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம். வலப்பக்கம் தரப்பட்டுள்ள படத்தில், ஒரே நீளம் உள்ள இரு நாண்களை நீட்டி, அவை வட்டத்தின் வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.



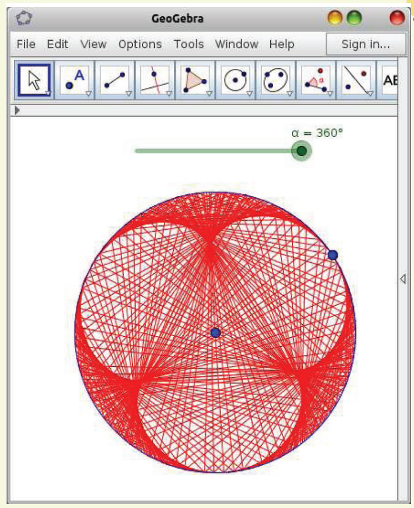
இந்தப் புள்ளியையும், வட்ட மையத்தையும் சேர்த்து வரைந்து, மையத்திலிருந்து செங்குத்துப் கோடுகளும் வரைந்தால், இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்;



இரு செங்கோண முக்கோணங்களின் கர்ணம் ஒரே கோடாகும். நாண்கள் சமமானபடியால், மையத்திலிருந்து உள்ள தூரங்களும் சமம். அவ்வாறு முக்கோணங்களின் ஒரு ஜோடி செங்கோணப் பக்கங்களும் சமம். அப்போது வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள இவற்றின் கோணங்களும் சமம். அதாவது, வட்ட மையத்தையும், நாண்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு, நீட்டி வரைந்த நாண்களுக்கிடையில் கோணத்தின் இரு சமவெட்டி ஆகும். இந்தக் கோடு வட்டத்தின் ஒரு விட்டம் நீட்டியது அல்லவா?



வட்டத்திலேயே வெட்டிக் கொள்ளும் ஒரே நீளம் உடைய நாண்கள் இணையும் கோணத்தை, அந்தப் புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டம் இரு சமபாகம் செய்யும் என்று முன்னர் ஒரு கணக்கில் பார்த்தோம் அல்லவா. இணைவது வட்டத்திற்கு வெளியே எனினும் இது சரி என இப்போது பார்த்தோம்.

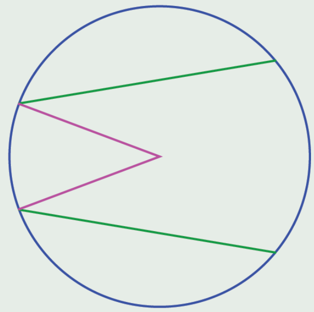


இத்தகைய படங்கள் ஜியோஜிப்ராவில் வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். A ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் B என்ற ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். ஒரு Angle slider α உருவாக்கவும். Angle with given size பயன்படுத்தி B, A எனும் புள்ளிகளில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கின்ற சாளரத்தில் α என அளிக்கவும். புதிய ஒரு புள்ளி B' கிடைக்கும். இதுபோல் $\angle B'AB'' = \alpha$ வரும்படி வேறொரு புள்ளி B''ஐ வட்டத்தில் உருவாக்கவும். B', B'' ஆகியவற்றை இணைக்கும் நாண் வரைந்து Trace அளிக்கவும். சிலைடரின் Animation அளித்துப் பார்க்கவும். $\angle B'AB'' = \alpha$ என்பதற்குப் பதில் 2α, 3α, 4α, ... என அளித்துப் பார்க்கவும். 3α என அளிக்கும்போது கிடைக்கும் படமே மேலே தரப்பட்டுள்ளது.

(1) வட்டத்தில் ஒரே நீளம் உள்ள நாண்கள் எல்லாம் மையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ளன என நிறுவுக

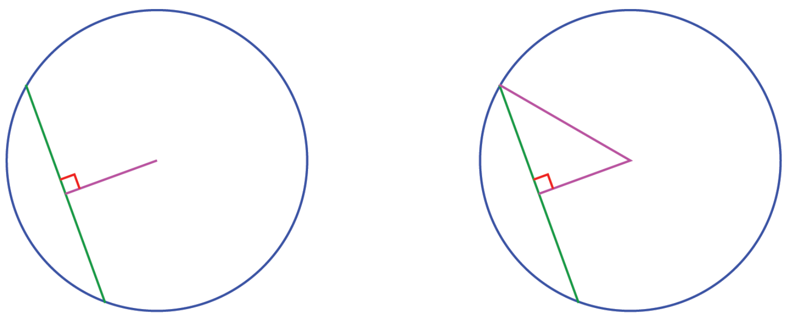
(2) வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியில் வெட்டும் இரு நாண்களின் இடையில் உள்ள கோணத்தை அந்தப் புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டம் இரு சமப்பாகம் செய்யும் நாண்கள் ஒரே நீளம் உடையவை என நிறுவுக.

(3) படத்தில் ஆரங்களுக்கும் நாண்களுக்கும் இடையில் உள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகும். நாண்கள் ஒரே நீளம் உடையவை என நிறுவுக.



நாண்களின் நீளம்

மையத்திலிருந்து உள்ள தூரமே நாண்களின் நீளத்தை உறுதிப்படுத்துகிறது எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. அதன் கணக்கு என்ன என்று பார்ப்போம்.



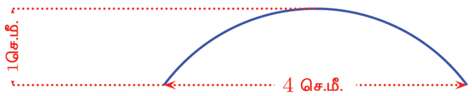
மேலே இடப்பக்கப் படத்தில், வட்டத்தில் ஒரு நாணும், அதற்கு வட்ட மையத்திலிருந்து செங்குத்துக்கோடும் தரப்பட்டுள்ளன. வலப்பக்கப் படத்தில், நாணின் ஒரு முனை வட்ட மையத்துடன் இணைக்கப்பட்டு ஒரு செங்கோண முக்கோணம் உருவாக்கியதுமாகும்.

இந்தச் செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் வட்டத்தின் ஆரமும், ஒரு செங்கோணப் பக்கம் வட்ட மையத்திலிருந்து செங்குத்துக்கோடும், மூன்றாவது பக்கம் நாணின் பாதியும் அல்லவா. அப்போது பைதகோரஸ் கோட்பாடு பயன்படுத்தி நாணின் பாதியின் வர்க்கம் கணக்கிடலாம்;

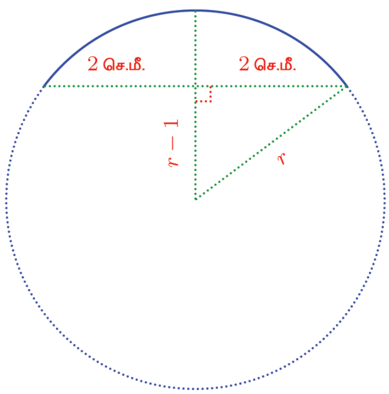
வட்டத்தின் எந்த நாணினுடையவும் பாதியின் வர்க்கம், ஆரம், மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள செங்குத்துத்தூரம் என்பன வற்றின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஆரம் 4 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தில், மையத்திலிருந்து (செங்குத்தாக) 3 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலுள்ள நாணின் பாதியின் வர்க்கம் $4^2 - 3^2 = 7$; அப்போது நாணின் நீளம் $2\sqrt{7}$ சென்டிமீட்டர்.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும். ஒரு வளையல் துண்டின் முனைகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் 4 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 1 சென்டிமீட்டரும் ஆகும்.



முழு வளையலின் ஆரத்தைக் கணக்கீடு செய்ய வேண்டும். கீழே வரைந்து இருப்பதுபோன்று முழு வளையலைக் கற்பனை செய்யலாம்;



வட்டத்தின் ஆரம் r சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், படத்தில் செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து,

$$r^2 - (r-1)^2 = 4$$

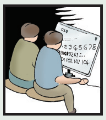
எனக் காணலாம். இதை எளிதாக்கினால், $2r - 1 = 4$ என்றும், அதிலிருந்து $r = 2\frac{1}{2}$ என்றும் கிடைக்கும். அதாவது வளையலின் ஆரம் 2.5 சென்டிமீட்டர்.

தாமரைக் கணக்கு

பாஸ்கராச்சாரியரின் **லீலாவதி** என்ற கணிதப் புத்தகத்தைப் பற்றி அறிந்திருக்கிறோம் அல்லவா. அதில் உள்ள ஒரு செய்யுளின் மொழிபெயர்ப்பானது இவ்வாறாகும்:

“சக்கரவாகப் பறவைகளும் கிரௌஞ்சப் பறவைகளும் விளையாடுகின்ற பொய்கையில், அரை கை உயரத்தில் ஒரு தாமரை மொட்டு உயர்ந்து நிற்கிறது. காற்றில் அது மெதுவாக அசைந்தது. இரு கை அகலத்தில் நீரில் மூழ்கியது. கணிதச் சிந்தனையாளரே! பொய்கையின் ஆழம் எவ்வளவு என்று விரைவில் கூறுவாய்?”

சக்ரகிரௌஞ்சாகுலிதஸலிலே
குவாபித்ருஷ்டம் தடாகே
தோயாமூர்த்வம் கமலகலிகாக்ரம்
விதஸ்ததிப்ரமாணம்
மந்தம் மந்தம் சலிதமனிலேனாஹதம்
ஹஸ்தயுக்மம்
தஸ்மிந்மக்னம் கணக, கத-
ய க்சிப்ரமம்ப: ப்ரமாணம்

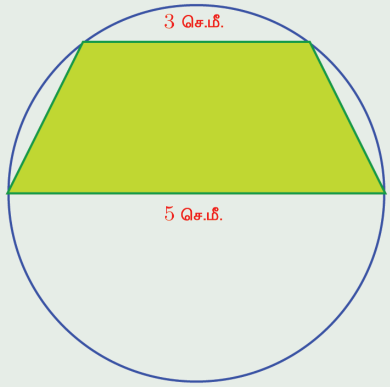


(1) ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் உள்ள நாணின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டராகும். மையத்திலிருந்து 2 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலுள்ள நாணின் நீளம் எவ்வளவு?

(2) ஆரம் 5 சென்டிமீட்டர் உடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் இரு பக்கங்களிலும் முறையே 6, 8 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள இணையான நாண்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் இடையே உள்ள தூரம் எவ்வளவு? இதே நீளம் உள்ள இணையான நாண்களை விட்டத்தின் ஒரு பக்கத்தில் வரைந்தால், அவற்றின் இடையே உள்ள தூரம் எவ்வளவாக இருக்கும்?

(3) ஒரு வட்டத்தில், 4 சென்டிமீட்டரும், 6 சென்டிமீட்டரும் நீளங்கள் உள்ள இணையான இரு நாண்களின் இடையே உள்ள தூரம் 5 சென்டிமீட்டராகும். வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

(4) படத்தில் நாற்கரத்தின் கீழ்ப்பக்கம் வட்டத்தின் விட்டமும், மேல்பக்கம் அதற்கு இணையான நாணும் ஆகும். இந்த நாற்கரத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.



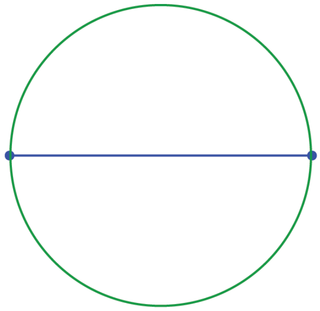
புள்ளிகளும் வட்டங்களும்

வட்டத்தில் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளைப் பற்றியே இவ்வளவு நேரம் கற்றுக்கொண்டிருந்தோம்; இனி மாறாக ஒரு வினா, ஒரு கோட்டின் இரு முனைகள் வழியாக வட்டம் வரைவது எவ்வாறு?

எந்த இரு புள்ளிகளை எடுத்தாலும் அவற்றை இணைத்து ஒரு கோடு வரையலாம் அல்லவா. அப்போது வினா இவ்வாறாகும். எந்த இரு புள்ளிகள் வழியாகவும் ஒரு வட்டம் வரைய இயலுமா?

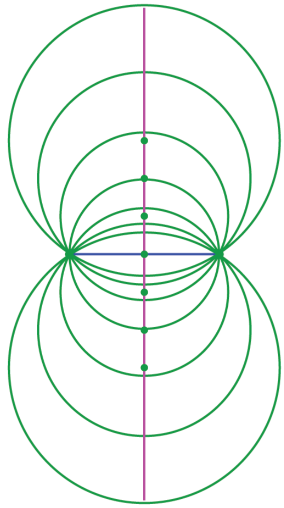
நோட்டுப்புத்தகத்தில் இரு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். இவற்றின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு வட்டம் வரையலாமா?

மிக எளிதாகச் செய்யலாம். இவற்றை இணைக்கும் கோடு விட்டமாக வரும்படி வட்டம் வரையலாம்; வேறொரு வட்டம் வரையலாமா?



அவ்வாறு ஒரு வட்டம் வரைந்தால், இந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு, அதன் நாண் ஆகும். அப்போது வட்ட மையம், இந்தக் கோட்டின் செங்குத்து இரு சமவெட்டியில் ஆகும்.

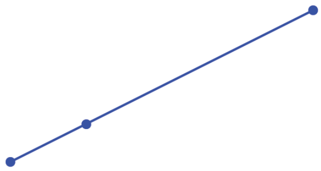
செங்குத்து இருசமவெட்டியில் எந்தப் புள்ளியையும் மையமாகக் கொண்டு முதல் இரு புள்ளிகள் வழியாக வட்டம் வரையலாம் அல்லவா.



ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு கோடும் அதன் செங்குத்து இரு சமவெட்டியும் வரையவும். செங்குத்து இரு சமவெட்டியில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு, கோட்டின் முனைப்புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு வட்டம் வரையவும். வட்ட மையத்திற்கு Animation அளித்துப் பார்க்கவும். வட்டத்தின் Trace அளிக்கலாம்.

அப்போது புதிய வினா; ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகள் வழியாக ஒரு வட்டம் வரைய இயலுமா?

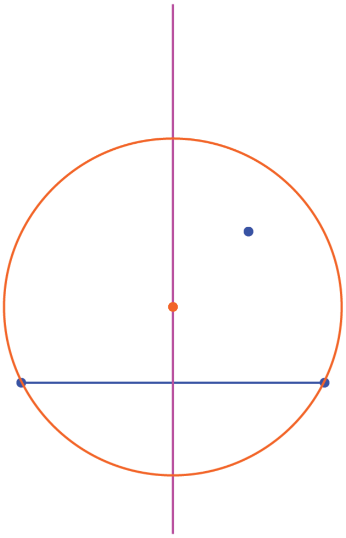
புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் எனில் வரைய இயலாது.



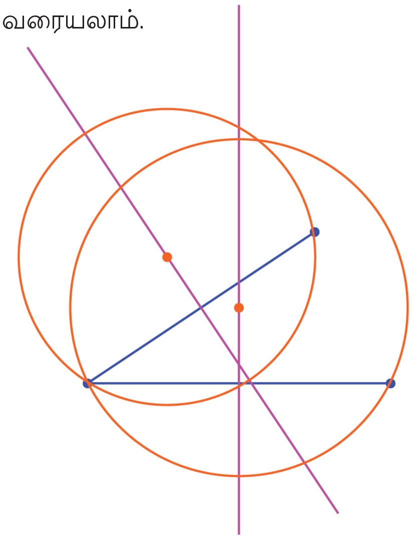
ஒரே கோட்டில் இல்லை எனில்?

வரைவதற்கு முன்னர் சிறிது சிந்திப்போம்.

இதில் ஏதேனும் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இரு சமவெட்டியில் எந்தப் புள்ளியை மையமாக எடுத்தாலும், இந்தப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் வரையலாம்.



இதுபோன்று வேறொரு ஜோடி புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியில் எந்தப் புள்ளியை மையமாக எடுத்தாலும் அவை வழியாகச் செல்லும் வட்டம் வரையலாம்.



அவ்வாறு இரண்டு ஜோடி புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் இரண்டு வட்டங்கள் வரையலாம்.

ஆனால் நமக்கு வேண்டியது, மூன்று புள்ளிகள் வழியாகவும் கடந்து செல்லும் ஒரு வட்டம் அல்லவா?

முதலில் எடுத்த ஒரு ஜோடி புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் கிடைப்பதற்கு மையம் முதல் இரு சமவெட்டியில் இருக்க வேண்டும். இரண்டாவது ஜோடி வழியாகச் செல்லும் வட்டம் கிடைப்பதற்கு, மையம் இரண்டாவது இரு சமவெட்டியில் இருக்க வேண்டும்.

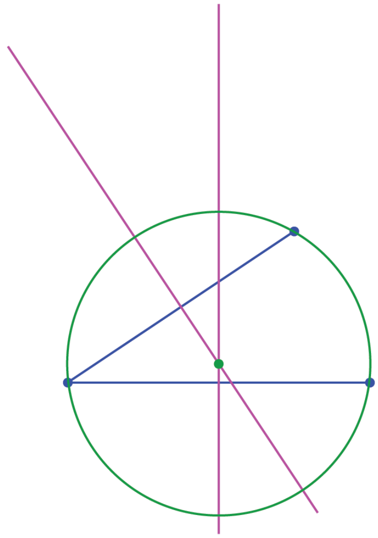
கோடும் வட்டமும்

ஒரு புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற எத்தனை கோடுகள் வேண்டுமானாலும் வரையலாம். அதுபோன்று வட்டங்களும். இரு புள்ளிகள் வழியாக ஒரு கோடு மட்டுமல்லவா வரைய இயலும்? ஆனால் வட்டங்கள் எத்தனை வேண்டுமானாலும் வரையலாம்.

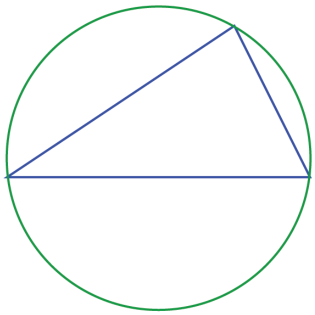
எந்த மூன்று புள்ளிகள் வழியாகவும் கோடு வரைய இயலவேண்டும் என்றில்லை. அவ்வாறு கோடு வரைய இயலும் எனில் அவற்றின் வழியே ஒரு வட்டம் வரைய இயலாது. கோடு வரைய இயலாத மூன்று புள்ளிகள் ஆனாலோ, அவற்றின் வழியாக ஒரு வட்டம் வரையலாம்.

ஏதேனும் நான்கு புள்ளிகள் வழியாகக் கோடு வரைய இயலுமா? வட்டம்?

இரண்டு சமவெட்டிகளிலும் உள்ள புள்ளியை எடுத்தாலோ, அதாவது அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி?



மீதியாக உள்ள ஒரு ஜோடி புள்ளிகளையும் இணைத்தால் ஒரு முக்கோணம் ஆகும். வட்டம் அதன் மூன்று உச்சிகள் வழியாகவும் கடந்து செல்லும்;

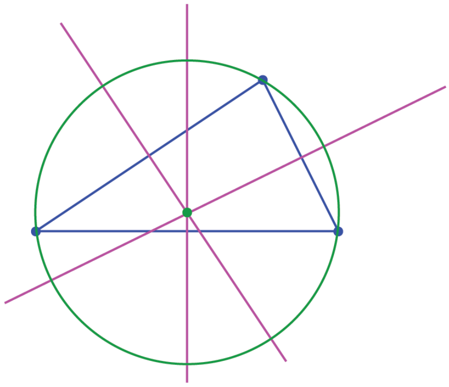


இவ்வாறு ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டத்தை முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் (circumcircle) எனக் கூறுவர்.

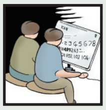
இப்போது செய்தது போன்று, எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் இரு பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு, மூன்று உச்சிகள் வழியாக வட்டம் வரையலாம்.

மூன்று புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரைய ஜியோஜிப்ராவில் Circle through 3 points பயன்படுத்தலாம். இதைப் பயன்படுத்திப் புள்ளிகளில் கிளிக் செய்தால் போதும்.
ஒரு Angle Slider α உருவாக்கி ஒரு கோண அளவு α வரும்படி ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் சுற்றுவட்டம் வரையவும். Midpoint or Centre பயன்படுத்தி வட்டமையம் அடையாளப்படுத்தலாம். முக்கோணத்தின் கோணங்களை மாற்றி சுற்றுவட்ட மையத்தின் இடம் மாறுவதைப் பார்க்கவும். சுற்றுவட்டமையம் முக்கோணத்தின் உள்ளே வருவது எப்போது? வெளியில் வருவது? இது எப்போதாவது முக்கோணத்தின் ஏதேனும் பக்கத்தில் வருமா?

இங்கு வேறொரு காரியமும் காணலாம். முக்கோணத்தின் அடிப் பக்கத்தினுடையவும், இடப்பக்கத்தினுடையவும் செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் வரைந்தே சுற்றுவட்டமையம் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. வலப்பக்கம் சுற்றுவட்டத்தின் நாண் ஆனபடியால், அதன் செங்குத்து இருசமவெட்டியும் சுற்றுவட்ட மையம் வழியாகக் கடந்து செல்லும்.



எந்த முக்கோணத்திலும் மூன்று பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும்.



(1) இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் 4, 5 சென்டிமீட்டரும், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணம் 60°, 90°, 120° என இவற்றில் ஒன்று வீதம் உள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணம் வரைந்து அவற்றிற்கெல்லாம் சுற்றுவட்டம் வரைக. (சுற்றுவட்டத்தின் இடம் மாறுவதைக் கவனிக்கவும்)

(2) ஓர் இரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் சமப்பக்கங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டரும், சுற்றுவட்டத்தின் ஆரம் 5 சென்டிமீட்டரும் ஆகும்; அதன் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் கணக்கிடவும்.

(3) ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளத்திற்கும் சுற்றுவட்டத்தின் ஆரத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

மீள்பார்வை

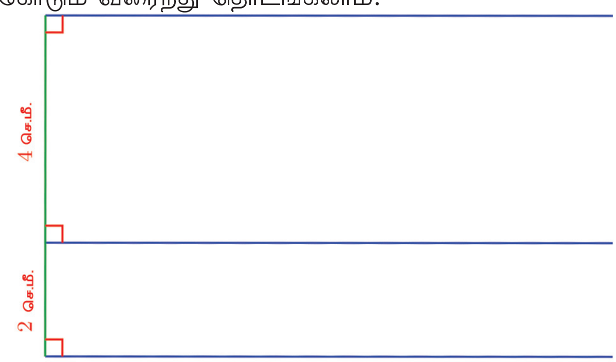
கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன்	மேலும் மேம்பட
• வட்டத்தில் ஒரு நாணுக்கும் மையத்திலிருந்து செங்குத்துக்கோட்டிற்கும் உள்ள தொடர்பைப் பல முறைகளில் விளக்குதல். • வட்டப் பகுதியிலிருந்து முழுவட்டம் வரைதல். • சம நாண்களின் இடையிலுள்ள தொடர்பை மையத்திலிருந்து தூரத்தைப் பயன்படுத்தியும் அவை வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் விட்டத்துடன் உருவாக்கும் கோணங்களைப் பயன்படுத்தியும் விளக்குதல். • நாண்களின் நீளத்திற்கும் மையத்திலிருந்து தூரத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக்			

6 இணைகோடுகள்

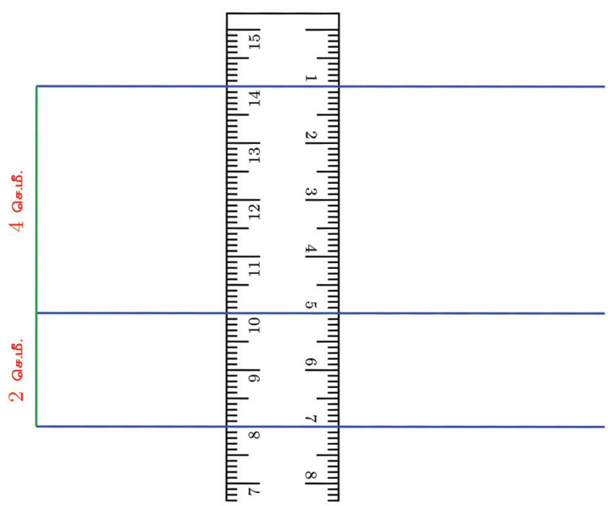
இணையான பாகம்

இணைகோடுகளைப் பற்றிப் பல கருத்தாக்கங்களைக் கற்றிருக்கிறோம். அவற்றைப் பயன்படுத்தி, பலவற்றை வரைந்திருக்கிறோம். இணைகோடுகளின் சிறப்புத் தன்மைகள் மேலும் பல உள்ளன.

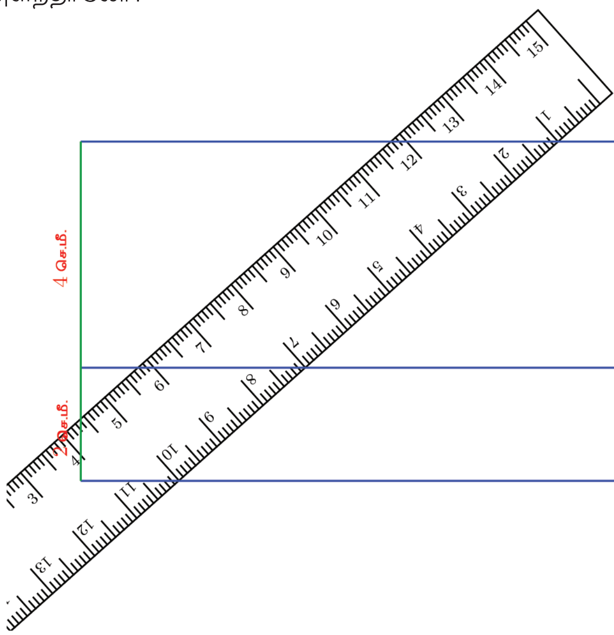
கீழே காண்பது போல் ஒரு கோடும், அதற்கு இணையாக 2 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் ஒரு கோடும், அதற்கு இணையாக 4 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் வேறொரு கோடும் வரைந்து தொடங்கலாம்:



இனி கீழ்க்கோட்டில் எங்கிருந்தும் செங்குத்தாக அளந்தால் கோடுகளின் இடையே உள்ள தூரம் 2 சென்டிமீட்டரும், 4 சென்டிமீட்டருமே:



சாய்வாக அளந்தாலோ?

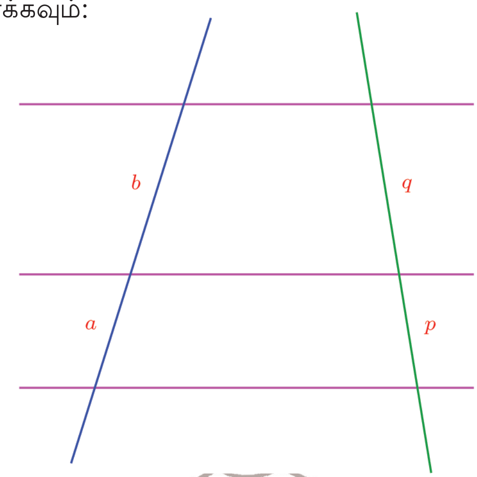


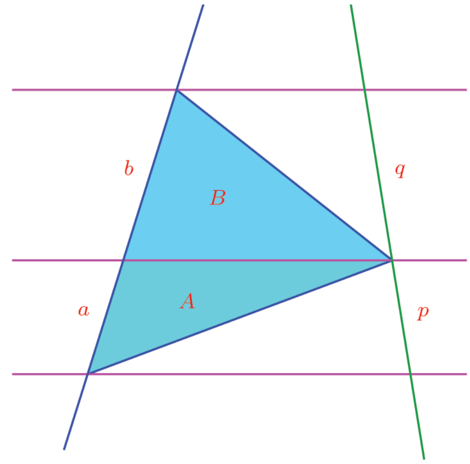
அளவுகோலின் வலது விளிம்பைப் பார்க்கவும். இந்தச் சாய்வில் கோடுகளின் இடையே உள்ள தூரம் எவ்வளவு?

மேலும் பல முறைகளில் சாய்வாக வைத்துப் பார்க்கவும். காண்பது என்ன? எவ்வாறு அளந்தாலும் மிகக் கீழாக உள்ள கோட்டுக்கும் நடுவிலுள்ள கோட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தின் இருமடங்கு அல்லவா, நடுவிலுள்ள கோட்டுக்கும் மேலே உள்ள கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள தூரம்?

வேறொரு முறையில் கூறினால் செங்குத்தாக உள்ள தூரங்களின் விகிதம் தானா எந்தச் சாய்விலுள்ள தூரங்களிலும் உள்ளது?

எவ்வாறு மூன்று இணைகோடுகள் வரைந்தாலும் இது சரியாகுமா எனக் காண்போம். முதலில் நமது ஊகம் என்ன என்று மேலும் விளக்கலாம். இப்படத்தைப் பார்க்கவும்:





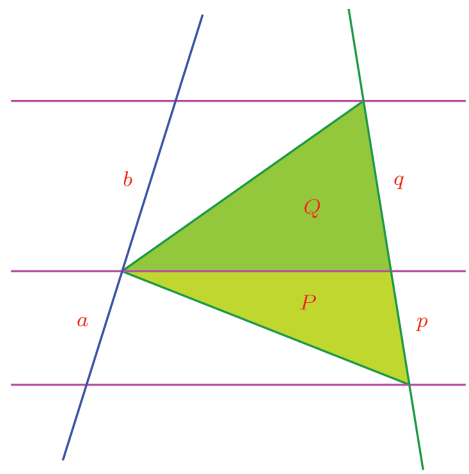
கிடையாக மூன்று இணைகோடுகள்; அவற்றை வெட்டிச் செல்லும் இரு சாய்வுக் கோடுகள். இடது கோட்டினை இணைகோடுகள் வெட்டும்போது கிடைக்கும் துண்டுகளின் நீளம் a, b எனவும் வலது கோட்டினை இணைகோடுகள் வெட்டும்போது கிடைக்கும் துண்டுகளின் நீளம் p, q எனவும் கொள்ளலாம். $a : b$ என்ற விகிதமும், $p : q$ என்ற விகிதமும் ஒரே போல் உள்ளதா என்பதை அறிய வேண்டும்.

அதற்கு முதலாவது நீளங்களின் விகிதமான $a : b$ யினை இரு பரப்பளவுகளின் விகிதமாக மாற்றலாம்:

இப்போது $a : b$ எனும் விகிதம் கீழேயும், மேலேயும் உள்ள முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம்தான் அல்லவா (**பரப்பளவு** என்ற பாடத்தில் **முக்கோணப்பகுதி**)

இப்பரப்பளவுகளை A, B என எடுத்தால்,

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

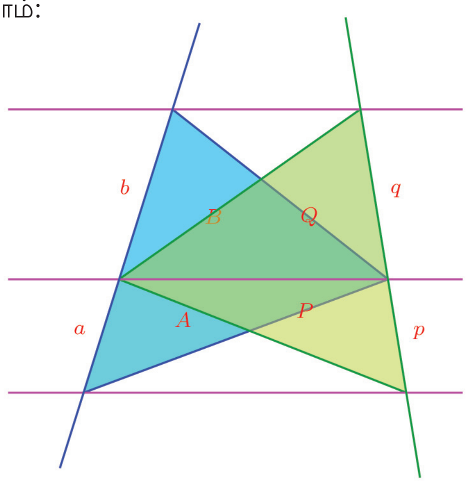


இதைப்போன்று p, q என்ற நீளங்களின் விகிதத்தையும் பரப்பளவுகளின் விகிதம் ஆக்கலாம்:

படத்தில் காண்பதைப்போன்று, பச்சை முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளை P, Q என எடுத்தால்,

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

இனி எல்லா முக்கோணங்களையும் ஒன்றாக வைத்துப் பார்க்கலாம்:



இப்போது கீழே உள்ள நீல முக்கோணம் பச்சை முக்கோணம், ஆகியவற்றின் ஒரு பக்கம் ஒரே கோடுதான். அவற்றின் மூன்றாவது உச்சிகள் இப்பக்கத்துக்கு இணையான ஒரு கோட்டிலும் ஆகும். ஆகவே அவற்றிற்கு ஒரே பரப்பளவு ஆகும்:

$$A = P$$

இதுதானே மேலே நீலமும் பச்சையும் ஆன முக்கோணங்களின் நிலையிலும்?

$$B = Q$$

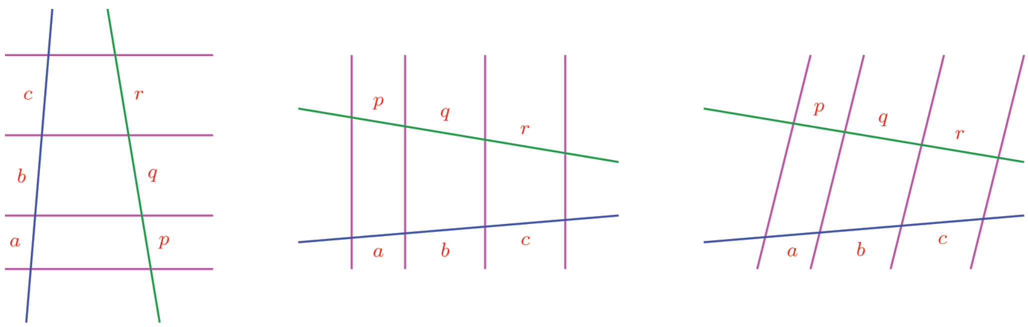
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ எனவும், $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ எனவும் முன்னரே கண்டோம் அல்லவா. இப்போது இதில் $A = P$ உம் $B = Q$ உம் எனக் கிடைத்தது. அவ்வாறு

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

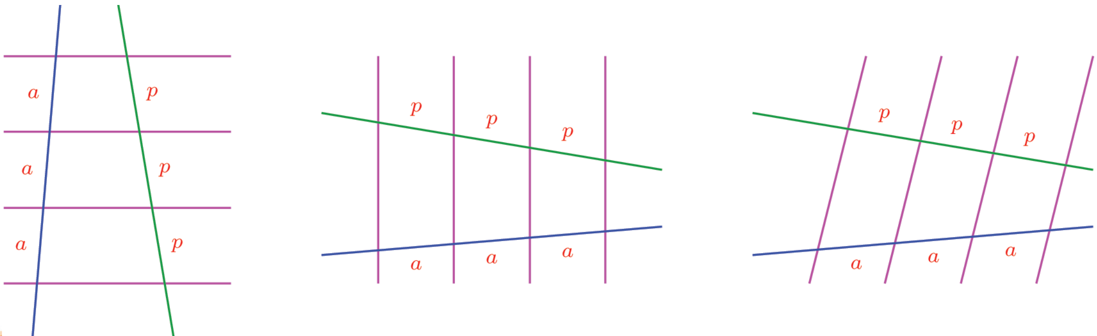
அதாவது, மூன்று இணைகோடுகள் எந்த இரு கோடுகளையும் வெட்டுவது ஒரே விகிதத்தில் ஆகும். மூன்றில் கூடுதலான இணை கோடுகளாயினும் இதுபோன்றே தொடரலாம் அல்லவா:

மூன்றோ அதற்குக் கூடுதலோ இணை கோடுகள் எந்த இரு கோடுகளையும் வெட்டுவது ஒரே விகிதத்தில் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, கீழே உள்ள மூன்று படங்களிலும் a, b, c என்ற நீளங்களின் இடையே உள்ள விகிதமும் p, q, r என்ற நீளங்களின் இடையே உள்ள விகிதமும் ஒரே போல் உள்ளவை ஆகும்.



அப்படியானால் சில இணைகோடுகள் ஒரு கோட்டினைச் சமப்பாகங்கள் ஆக்குகின்றன என்றாலோ? இப்போது கூறப்பட்டதற்கு ஏற்ப இவை எந்தக் கோட்டினையும் சமப்பாகங்கள் ஆக்கும்.



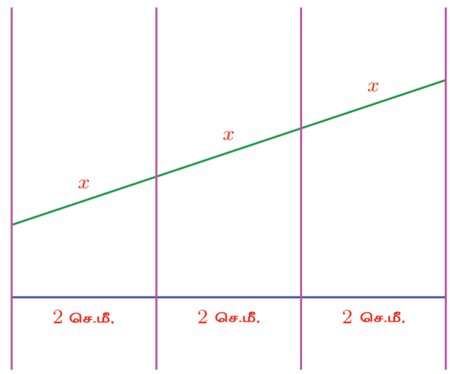
மூன்று அல்லது அதற்குக் கூடுதலான இணைகோடுகள் ஒரு கோட்டினைச் சமப்பாகங்களாக வெட்டினால், எந்தக் கோட்டினையும் சமப்பாகங்களாகவே வெட்டும்.

இனி இக் கருத்துகளின் சில பயன்பாடுகளைப் பார்க்கலாம்.

7 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கோட்டினை இரு சமப்பாகங்கள் ஆக்குவதற்கு, செங்குத்துச் சமவெட்டி வரைய வேண்டும்; ஒரு முனையிலிருந்து 3.5 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளி வைத்தாலும் போதும். மூன்று சமப்பாகங்கள் ஆக்குவது எவ்வாறு?

6 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டில் இது எளிதானது..

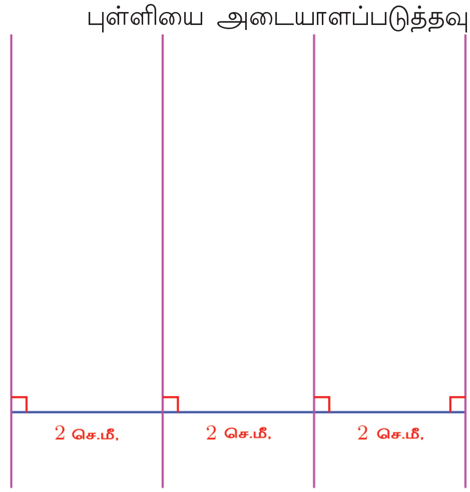
6 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டினை மூன்று சமப்பாகங்கள் ஆக்குகின்ற நான்கு இணைகோடுகள் எந்தக் கோட்டினையும் மூன்று சமப்பாகங்கள் ஆக்கும் அல்லவா:

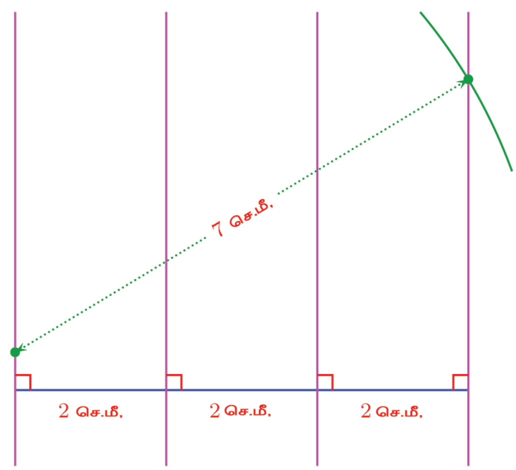


இரண்டாவது கோட்டின் நீளத்தை 7 சென்டிமீட்டர் ஆக்கினாலோ?

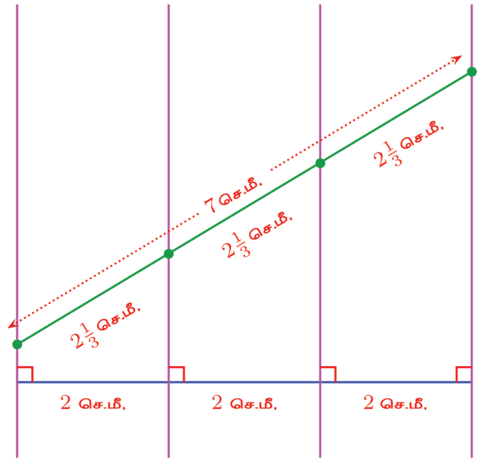
ஆகவே நமது பிரச்சினையைத் தீர்க்கும் வழிமுறை தெரிந்தது அல்லவா?

6 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து, அதில் 2 சென்டிமீட்டர் இடைவெளி விட்டு செங்குத்துக்கோடுகள் வரையவும்; முதலாவது செங்குத்துக்கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து 7 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள வட்டப்பகுதி வரைந்து இது கடைசி செங்குத்துக்கோட்டை வெட்டும் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும்.



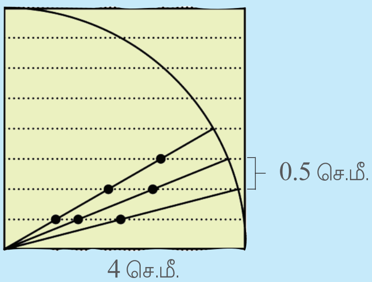


இந்த இரு புள்ளிகளை இணைத்தால், 7 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோடும் அதன் மூன்று சமப்பாகங்களும் ஆயிற்று:



வட்டப்பங்கீடு

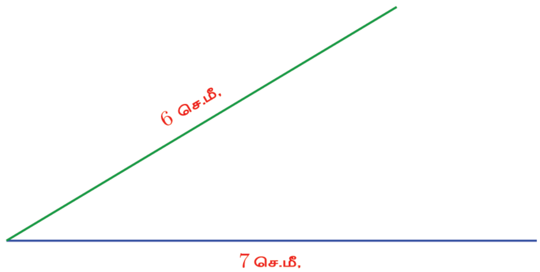
படத்தைப் பார்க்கவும்:



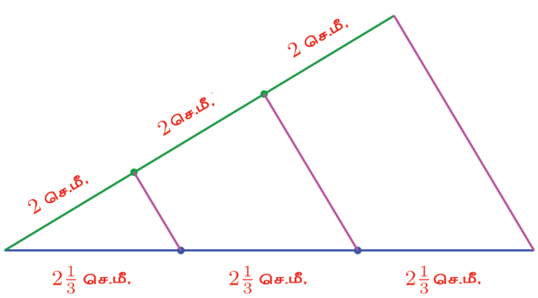
4 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டினை, இரண்டும், மூன்றும் நான்கும் சமப்பாகங்கள் ஆக்கியிருப்பதைக் கண்டோம் அல்லவா? இதைப் போன்று எட்டுச் சமப்பாகங்கள் வரை இப்படம் உபயோகித்தே வரைய இயலும் அல்லவா, இதைப் போன்று கோடிட்ட நோட்டுப் புத்தகத்தில் ஒரு வட்டப்பகுதி வரைந்து, 6 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டினை 7 சமப்பாகங்கள் ஆக்கலாமா?

வேறொரு முறையிலும் வரையலாம்:

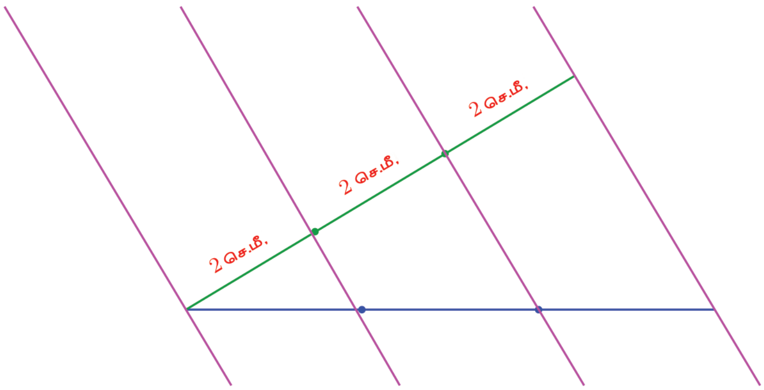
முதலில் 7 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து, அதன் ஒரு முனையிலிருந்து, 6 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோட்டினைச் சாய்த்து வரையவும்:



கோடுகளின் முனைகளை இணைத்து ஒரு கோடு வரையவும். இனி கீழே உள்ள கோட்டினை மூன்று சமப்பாகங்கள் ஆக்குவதற்கு மேலே உள்ள கோட்டினை மூன்று சமப்பாகங்கள் ஆக்கி, அப்புள்ளிகள் வழியாக இணைகோடுகள் வரைந்தால் போதுமே?



இது எதனால் எனப் புரியவில்லை எனில் சிறிது நீட்டிய இணைகோடுகளையும் நான்காவது ஓர் இணை கோட்டினையும் நினைத்துக் கொள்ளவும்.



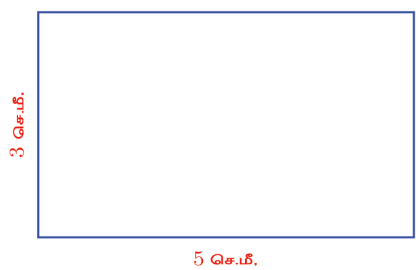
நிழல் கணக்கு

ஒரு மரத்தின் மிகக் கீழே உள்ள கிளை வரை உயரம் 1 மீட்டரும் அதுவரை நிழலின் நீளம் 2 மீட்டரும் ஆகும். மரத்தின் நிழலின் மொத்த நீளம் 8 மீட்டர்.

மரத்தின் உயரம் எவ்வளவு?

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

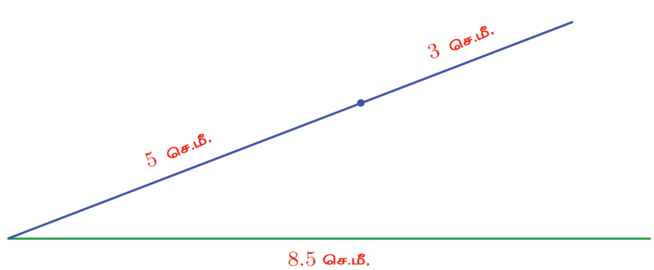
இங்கு வரையப்பட்டுள்ள செவ்வகத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு?



நீளத்திற்கும் அகலத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் இதே ஆகுமாறு, 17 சென்டிமீட்டர் சுற்றளவில் செவ்வகம் எவ்வாறு வரையலாம்?

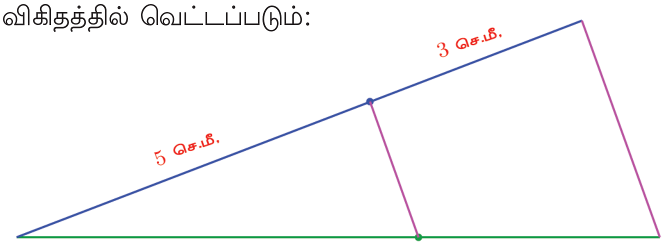
சுற்றளவு 17 சென்டிமீட்டர் எனில், நீளத்துக்கும் அகலத்துக்கும் உள்ள தொகை 8.5 சென்டிமீட்டர், இந்த நீளம் உள்ள கோட்டினை 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரித்துக் கிடைக்கும் துண்டுகளை நீளமும் அகலமும் ஆகக் கொண்டு செவ்வகம் வரைந்தால் போதும் அல்லவா.

எனவே முதலில் 8.5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் கோடு வரையவும். இதனை 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதற்கு, முதல் கணக்கின் இரண்டாவது வழிமுறையில் செய்ததைப் போன்று ஒரு முனையிலிருந்து 8 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் வேறொரு கோடும் வரைந்து, அதனை 5 சென்டிமீட்டரும் 3 சென்டிமீட்டருமாகப் பிரிக்கலாம்:

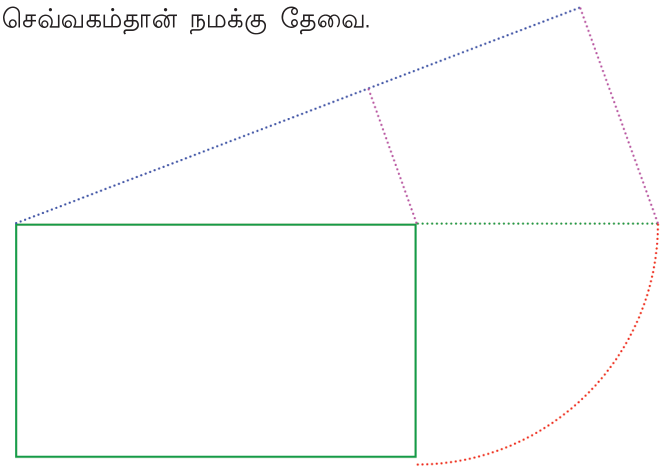


ஜியோஜிப்ராவில் A என்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி 4 அலகு நீளத்தில் AB என்ற கோடும் 6 அலகு நீளத்தில் AC என்ற கோடும் வரையவும். Min = 0, Max = 1 ஆகுமாறு ஒரு சிலைடர் c உருவாக்கவும். A மையமாகவும் ஆரம் AB இன் c பாகம் வரும் படியாகவும் ஒரு வட்டம் வரையவும். (இதற்கு வட்டத்தின் ஆரம் கொடுக்க வேண்டிய சாளரத்தில் c * AB எனவோ ca எனவோ கொடுத்தால் போதும். a என்பது AB இன் பெயர் ஆகும்). இவ்வட்டம் AB ஐ வெட்டும் புள்ளியை D என அடையாளப்படுத்தவும். இதைப் போன்று A மையமாகவும் ஆரம் AC இன் c பாகமாக வரும்படியாக ஒரு வட்டம் வரைந்து, இது AC உடன் வெட்டும் புள்ளியை E என அடையாளப்படுத்தவும். AD, AE கோடுகள் வரைந்து அவற்றின் நீளங்களை அடையாளப்படுத்தவும். இந்த நீளங்களுக்கு இடையிலுள்ள தொடர்பு என்ன? எதனால்? ஸ்லைடரின் மதிப்பை மாற்றி D, E என்பவற்றின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். BC, DE என்ற கோடுகளை வரைந்து பார்க்கவும். அவற்றின் சிறப்புத்தன்மை என்ன?

இனி கோடுகளின் முனைகளை இணைத்து அதற்கு ஓர் இணைகோடும் வரைந்தால் கீழே உள்ள கோடும் 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் வெட்டப்படும்:



இந்தத் துண்டுகள் நீளமும் அகலமும் ஆகின்ற செவ்வகம்தான் நமக்கு தேவை.

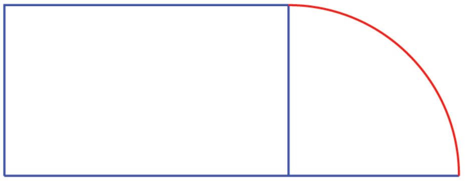


சிறிது வேறுபட்ட வேறொரு கணக்கு:

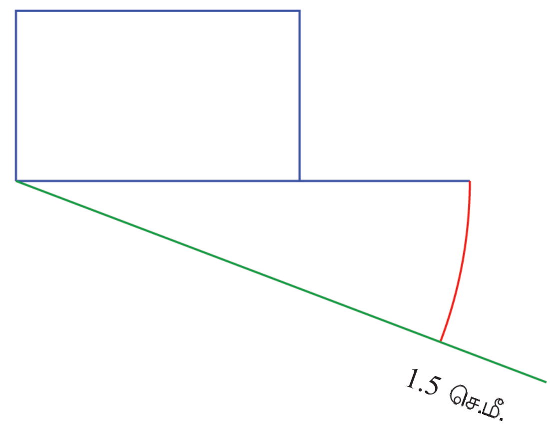
இங்கு ஒரு செவ்வகம் வரையப்பட்டுள்ளது:

இதன் நீளமும் அகலமும் கூறப்படவில்லை. பக்கங்களின் விகிதம் மாறாமல், சுற்றளவில் 3 சென்டிமீட்டர் கூட்டி வரைய வேண்டும்.

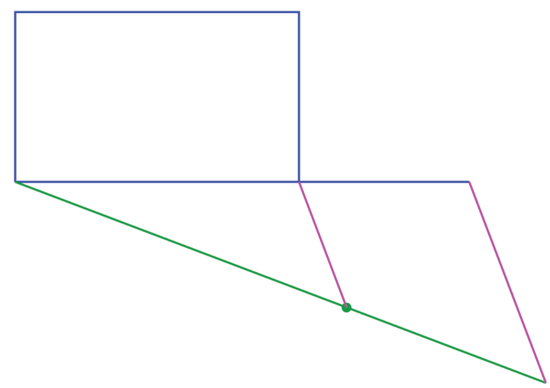
அதற்கு நீளத்தையும் அகலத்தையும் ஒரே கோட்டில் ஆக்கலாம் :



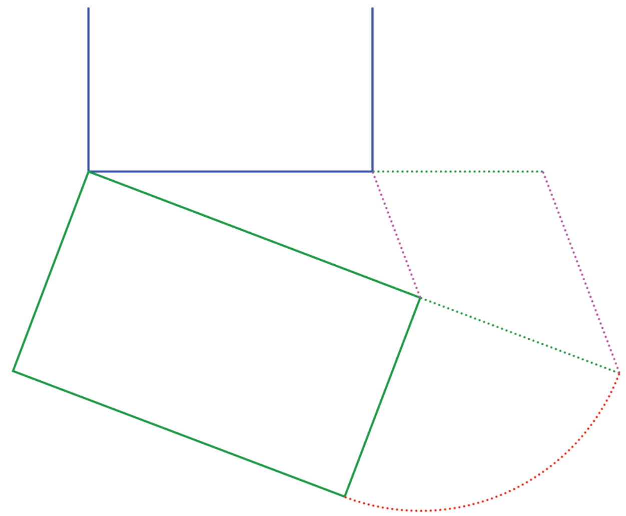
இனி இதற்குக் கீழே, இதே நீளம் உள்ள கோட்டினைச் சிறிது சாய்வாக வரைந்து, அதை மேலும் 1.5 சென்டிமீட்டர் நீட்டலாம்: (எதனால்?)



இனி முன்னர் செய்ததைப் போன்று கோடுகளின் முனைகளைச் சேர்த்து, இணை கோடு வரைந்து, கீழ்க்கோட்டினைப் பிரிக்கலாம்:



இனி இந்த இரு பாகங்களையும் நீளமும் அகலமுமாகக் கொண்டு செவ்வகம் வரைந்தால் போதும்:



(1) 8 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கோடு வரைந்து அதை 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கவும்.

(2) 15 சென்டிமீட்டர் சுற்றளவும், 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் அகலமும் நீளமும் உள்ள செவ்வகம் வரையவும்.

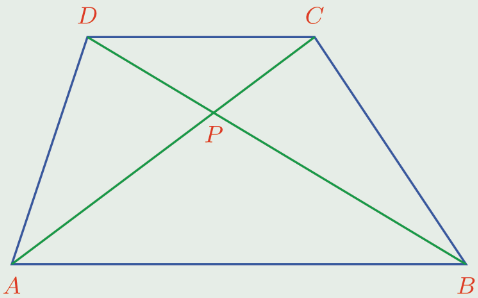
(3) கீழே கூறப்படும் ஒவ்வொரு விதத்தில் உள்ள முக்கோணம், சுற்றளவு 10 சென்டிமீட்டர் ஆகுமாறு வரையவும்.

i) சமபக்க முக்கோணம்.

ii) பக்கங்களின் இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 4 : 5

iii) பக்கங்களின் இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 3 : 4

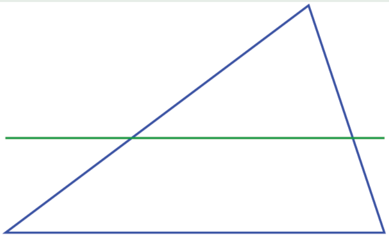
(4) கீழ்க்காணும் படத்தில் $ABCD$ என்ற சரிவகத்தின் மூலை விட்டங்கள் P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன:



$PA \times PD = PB \times PC$ என நிறுவுக.

முக்கோணப் பாகம்

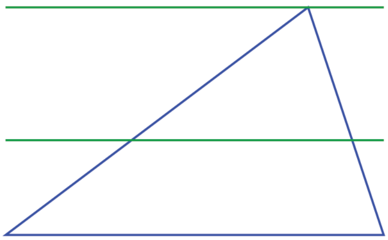
ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, அதனுள்ளே ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக:



ஜியோஜிப்ராவில் ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும். AB என்ற பக்கத்தில் ஒரு புள்ளி D ஐ அடையாளப்படுத்தி, அதன் வழியாக BC க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரையவும். இக்கோட்டை AC உடன் வெட்டும் புள்ளி E ஐ அடையாளப்படுத்தவும். D, E என்னும் புள்ளிகள் AB, AC என்ற கோடுகளை ஒரே விகிதத்தில் வெட்டுகிறதா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும். நீளங்களை அடையாளப்படுத்திப் பார்க்கலாம்.

இக்கோடு முக்கோணத்தின் பிற இரு பக்கங்களையும் வெட்டும் பாகங்களுக்கு இடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா?

முக்கோணத்தின் மேல் உச்சி வழியாக மேலும் ஒரு கோட்டைக் கீழ்க்கோட்டிற்கு இணையாக வரைந்தாலோ?



இப்போது மூன்று இணைகோடுகள், முக்கோணத்தின் இடதும் வலதும் பக்கங்களை வெட்டுகின்றன. வெட்டிக் கிடைக்கும் பாகங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் ஒரே விகிதமாக இருக்க வேண்டும். இப்பாகங்கள் முதலில் வரைந்த கோடு பக்கங்களை வெட்டும் பாகங்களே.

ஆகவே இங்குக் கண்டது என்ன?

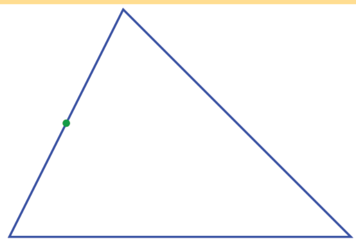
எந்த முக்கோணத்திலும் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக வரையும் கோடு, பிற இரு பக்கங்களையும் ஒரே விகிதத்தில் வெட்டும்.

இவ்வாறு இணையாக வரையும் கோடு ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாக எனிலோ?

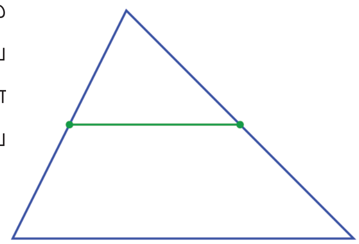
அப்பக்கத்தை வெட்டும் பாகங்கள் சமமாகும்; இப்போது கூறிய கருத்துப்படி பிற பக்கங்களை வெட்டும் பாகங்களும் சமமாக வேண்டும். இதுவும் எடுத்துரைக்க வேண்டிய ஓர் உண்மையாகும்:

எந்த முக்கோணத்திலும் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக வேறொரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியே வரையும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்தை வெட்டுவதும் அதன் மையப்புள்ளியிலாகும்.

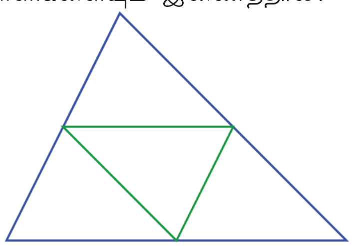
இனி இப்படத்தைப் பார்க்கவும்:

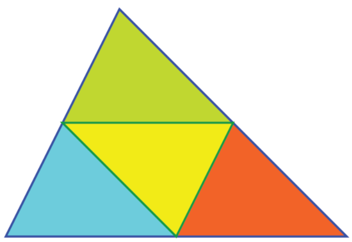


முக்கோணத்தின் இடப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியே கீழே உள்ள கோட்டுக்கு இணைகோடு வரையவும். இக்கோடு வலப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாகவும் கடந்து செல்லும் என்று கண்டோம் அல்லவா. ஆகவே வலப்பக்கத்தின் மையப் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி, இடப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியுடன் இணைத்தால், கீழ்ப் பக்கத்துக்கு இணையான கோடாகும்:



முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளையும் இணைத்தால்?





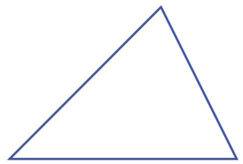
இந்த நான்கு சிறிய முக்கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூறலாம்? நடுவிலுள்ள மஞ்சள் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் அனைத்தும் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையாகும்.

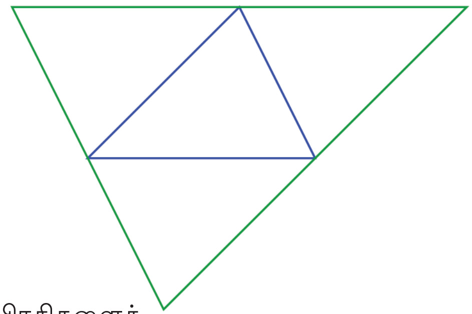
இந்த நான்கு முக்கோணங்களும் சமமாகத் தோன்றுகின்றன அல்லவா? அது சரிதானா எனப் பார்க்கலாம். முதலாவதாக நீல முக்கோணத்தையும் மஞ்சள் முக்கோணத்தையும் எடுத்துக்கொள்வோம். நீல முக்கோணத்தின் வலப்பக்கமும், மஞ்சள் முக்கோணத்தின் இடப்பக்கமும் ஒரே கோடாகும். நீல முக்கோணத்தில் இடப்பக்கத்தின் மேலுள்ள கோணமும், மஞ்சள் முக்கோணத்தில் இப்பக்கத்தின் கீழே உள்ள கோணமும் சமமாகும்; மாறாக (எதனால்?) அப்படியானால் இந்த இரு முக்கோணங்களும் சமமாகும். இதைப் போன்று பச்சை முக்கோணமும், சிவப்பு முக்கோணமும் எல்லாம் மஞ்சள் முக்கோணத்துக்குச் சமமாகும் எனக் காணலாம். அதாவது இந்த நான்கு முக்கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

இதிலிருந்து மற்றொரு கருத்தும் கிடைக்கிறது. இந்த நான்கு முக்கோணங் களுடைய பக்கங்களின் நீளம் சமமானதால், ஒவ்வொரு பக்கமும் பெரிய முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் பாதியாகும். அதாவது,

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நீளம், மூன்றாவது கோட்டின் நீளத்தின் பாதி ஆகும்.

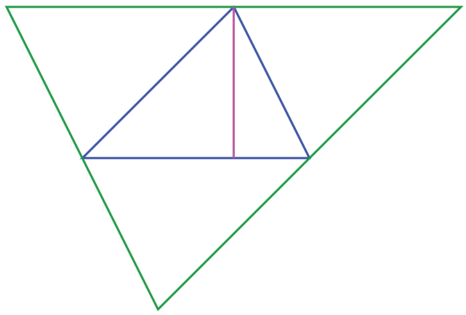
இனி ஒரு சிறிய முக்கோணத்திலிருந்து தொடங்கி ஒவ்வொரு உச்சி வழியாகவும் எதிர்ப்பக்கத்திற்கு இணைகோடு வரைந்தாலோ?





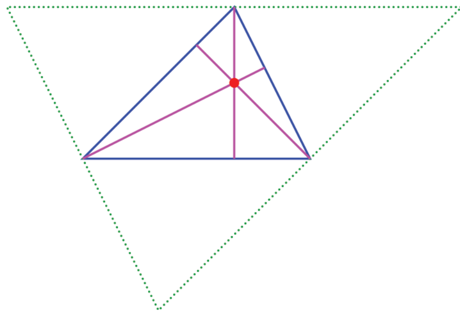
சிறிய முக்கோணத்தின் மூன்று பிரதிகளைச் சேர்த்து வைத்தபோது பெரிய முக்கோணம் ஆனது அல்லவா?

இதில் சிறிய முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியிலிருந்து எதிர்ப்பக்கத்திற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடு பெரிய முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் செங்குத்து இரு சமவெட்டி ஆகும்.



ஆகவே சிறிய முக்கோணத்தின் எல்லா உச்சிகளிலிருந்தும் எதிர்பக்கங்களுக்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால்? பெரிய முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் செங்குத்து இரு சமவெட்டிகள் ஆயின. எந்த முக்கோணத்தினுடைய

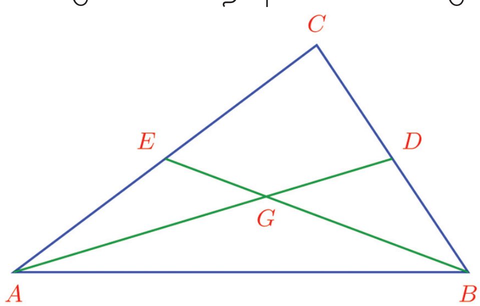
பக்கங்களின் செங்குத்து இரு சமவெட்டிகள் எல்லாம் ஒரே புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் என **வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் கண்டோம் அல்லவா:



எந்த முக்கோணத்திலும் ஒவ்வொரு உச்சியிலிருந்தும் எதிர்ப்பக்கத்துக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியே செல்லும்.

இதே கருத்தினைப் பயன்படுத்தியே, ஒரு முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியையும் எதிர்ப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியே கடந்து செல்லும் எனவும் நிறுவலாம். இது போன்ற ஒரு கோட்டினை முக்கோணத்தின் மையக்கோடு (median) எனக் கூறுகிறோம்.

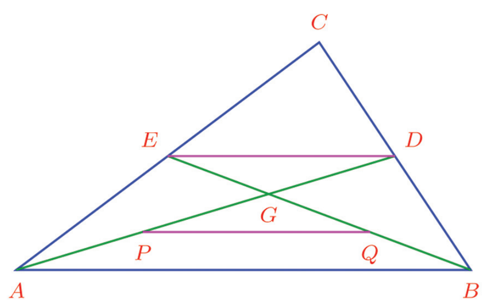
படத்தில் ஒரு முக்கோணத்தின் கீழ், இரு உச்சிகளிலிருந்தும் உள்ள மையக்கோடுகள் G என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது.



இடப்பக்கமும் வலப்பக்கமும் உள்ள பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் கீழ்ப்பக்கத்திற்கு இணையாகவும் அதன் பாதியும் ஆகும். அதாவது,

$$ED = \frac{1}{2} AB$$

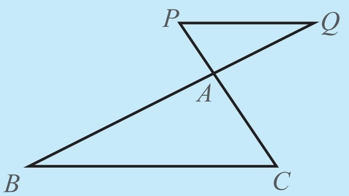
இனி கீழே உள்ள பக்கத்தின் மேலே GAB என்ற வேறொரு சிறிய முக்கோணம் உள்ளது அல்லவா; அதன் இடப்பக்கமும் வலப்பக்கமும் உள்ள பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளையும் இணைத்தால்?



$$PQ = \frac{1}{2} AB$$

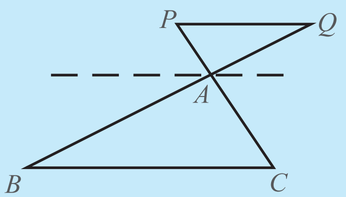
முக்கோணப் பங்கு

முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக முக்கோணத்திற்கு வெளியே வரைந்தாலும், அந்தக் கோடு, பிற இரு பக்கங்களை ஒரேவிகிதத்தில் (பங்காக) வெட்டுவதைக் காணலாம் படத்தைப் பார்க்கவும்.



BC க்கு இணையாகும் PQ

A வழியே BC க்கு இணையாக வேறொரு கோடும் வரைக.



அதாவது,

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AQ}$$

இதுவும் அல்லாமல், படத்திலிருந்து,

$$\frac{PC}{AP} = \frac{AP + AC}{AP} = 1 + \frac{AC}{AP}$$

$$\frac{QB}{AQ} = \frac{AQ + AB}{AQ} = 1 + \frac{AB}{AQ}$$

என்றும் காணலாம்.

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$$

என்றும் காணலாம்.

எனவே

$$PQ = ED$$

$PQDE$ என்ற நாற்கரத்தின், PQ, ED என்ற பக்கங்கள் சமமும் இணையும் ஆனதால், இந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும். ஆகவே அவற்றின் மூலைவிட்டங்களான PD, QE ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று சமப்பாகம் செய்யும்: அதாவது,

$$PG = GD$$

AG இன் மையப்புள்ளி அல்லவா, P; எனவே

$$AP = PG = GD$$

இதுபோன்று

$$BQ = QG = GE$$

எனவும் காணலாம். அதாவது மையக்கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி அவற்றை $2 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

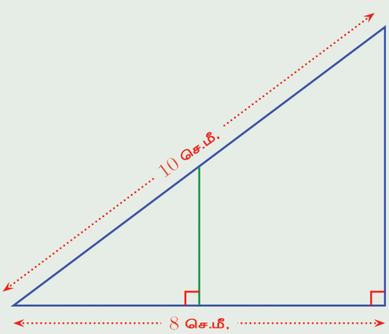
இனி A, B, என்பன வழியாக மையக்கோடுகளுக்குப் பதிலாக, B, C என்ற உச்சி வழியே உள்ள மையக்கோடுகளே வரையப் படுகின்றன எனிலோ?

அவை வெட்டிச் செல்கின்ற புள்ளி BE ஐ $2 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது: அதாவது வெட்டும் புள்ளி G இல் ஆகும்.

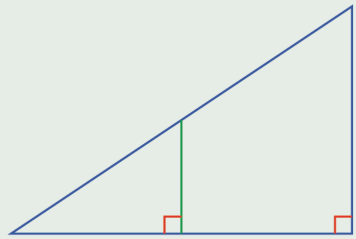
எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் மையக்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியாகவே கடந்துசெல்லும், அப்புள்ளி எல்லா மையக்கோடுகளையும் உச்சியிலிருந்து 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

மையக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை முக்கோணத்தின் முக்கோண மையம் (centroid) எனக் கூறுகிறோம்.

(1) படத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து அடிப் பக்கத்துக்குச் செங்குத்துக்கோடு வரையப் பட்டுள்ளது.
பெரிய செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளத்தையும், சிறிய செங்கோண முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களின் நீளங்களையும் கணக்கிடுக.



(2) ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து கர்ணத்தின் மையப் புள்ளியிலிருந்து அடிப் பக்கத்துக்குச் செங்குத்துக்கோடு வரையவும்:

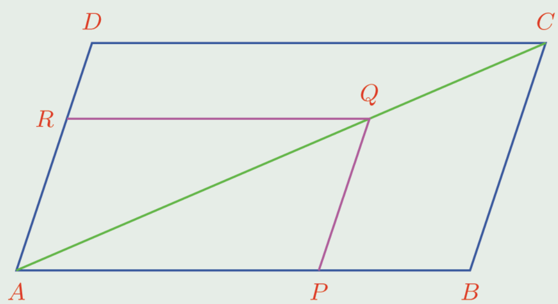


i) இந்தச் செங்குத்துக்கோடு பெரிய முக்கோணத்தின் செங்குத்துக் கோட்டில் பாதியாகும் என நிறுவுக.

ii) பெரிய முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து மூன்று உச்சிகளுக்கும் உள்ள தூரம் சமமாகும் எனத் தெளிவுபடுத்துக.

iii) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம், கர்ணத்தின் மையப்புள்ளியாகும் என நிறுவுக.

(3) $ABCD$ என்ற இணைகரத்தில் AB இல் உள்ள ஒரு புள்ளி P வழியாக BC க்கு இணையாக வரையும் கோடு AC ஐ Q இல் வெட்டுகிறது. Q வழியாக AB க்கு இணையாக வரையும் கோடு, AD ஐ R இல் வெட்டுகிறது:

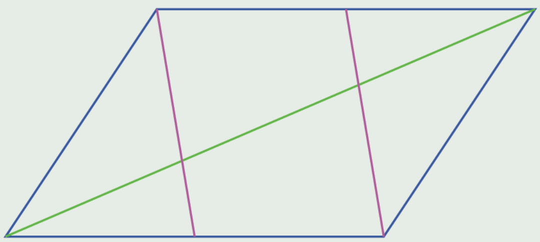


i) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AR}{RD}$ எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

ii) $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AR}{AD}$ எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

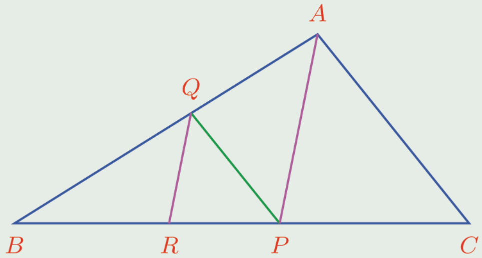
(4) கீழ்க்காணும் படத்தில் ஓர் இணைகரத்தின் இரு உச்சிகள் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

இக்கோடுகள் படத்தில் உள்ள மூலைவிட்டத்தை மூன்று சமப்பாகங்கள் ஆக்கும் என நிறுவுக.



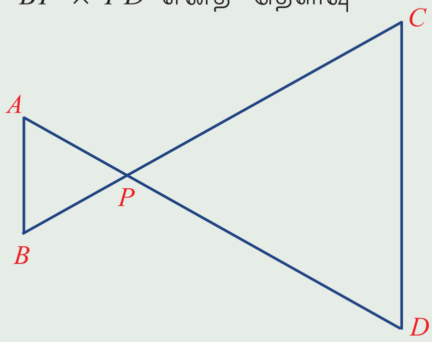
(5) ABC என்ற முக்கோணத்தில், BC இல் P என்ற புள்ளிவழியே AC க்கு இணையாக வரையும் கோடு, AB ஐ Q இல் வெட்டுகிறது. Q இல் இருந்து AP க்கு இணையாக வரையும் கோடு, BC ஐ R இல் வெட்டுகிறது:

$\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BR}{RP}$ என நிறுவுக.



(6) படத்தில் AB, CD இணையாகும்.

$AP \times PC = BP \times PD$ எனத் தெளிவு படுத்தவும்.



மீள்பார்வை

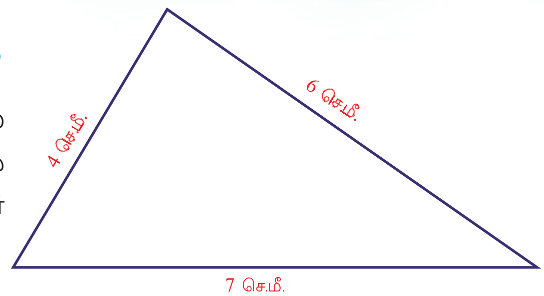
கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• இணைகோடுகள் பிற கோடுகளை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனப் புரிந்து கொள்ளுதல். • இதை உபயோகித்து எந்தக் கோட்டினையும் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்க இயலுதல். • சுற்றளவு மாறாமல் செவ்வகத்தின் பக்கங்களைக் கூட்டியும் குறைத்தும் வரைதல். • முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக வரையும் கோடு மற்ற இரு பக்கங்களை வெட்டும் கணக்கைப் புரிந்து கொள்ளுதல். • முக்கோணமையம் என்ற கருத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.			

7

முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை

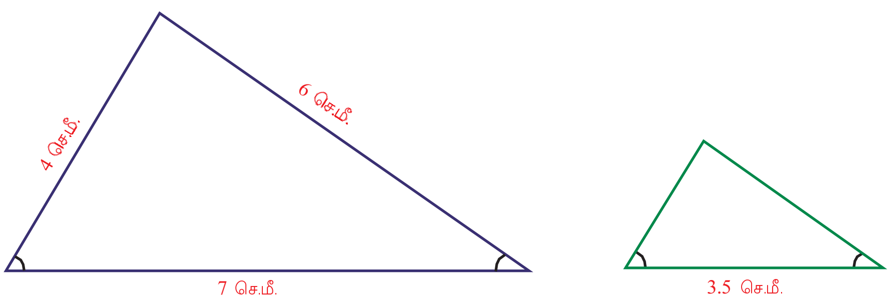
கோணங்களும் பக்கங்களும்

பக்கங்களின் நீளத்தைக் கூறினால் முக்கோணம் வரைவதற்குத் தெரியும் அல்லவா. பக்கங்கள் 4, 6, 7 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைக.

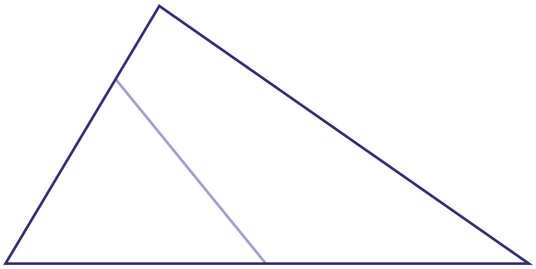


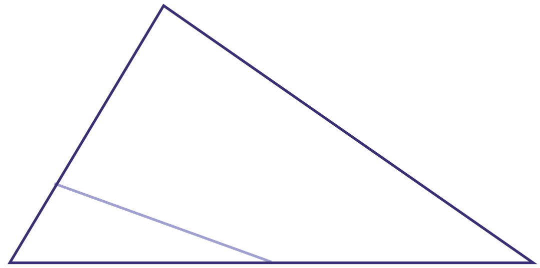
இனி இதைச் சற்று சிறியதாக வரைய வேண்டும். மிகப் பெரிய பக்கத்தின் பாதி நீளம் போதும். அதாவது 3.5 சென்டிமீட்டர். மேலும் ஒன்றைக் கவனிக்கவும். கோணங்கள் ஒன்றும் மாறக்கூடாது. எவ்வாறு வரையலாம்?

முக்கோணத்தின் கோணங்களை எல்லாம் அளக்கவும். 3.5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து, அதன் இரு முனைகளிலும் பெரிய முக்கோணத்தின் கீழே உள்ள கோணங்களை வரையவும்:



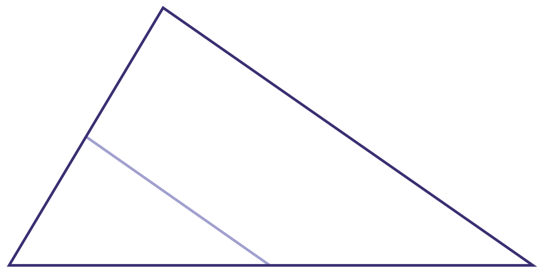
கோணங்களை அளக்காமல் சற்று எளிதாக வரைய ஏதேனும் வழிமுறை உள்ளதா? பெரிய முக்கோணத்திலேயே மிகப்பெரிய பக்கத்தைப் பாதியாக்கி வரைய இயலுமா எனப் பார்ப்போம். கீழே உள்ள கோட்டின் மையப்புள்ளி வழியாக எந்தக்கோடு வரைந்தாலும், ஒரு பக்கம் 3.5 சென்டிமீட்டரும், ஒரு கோணம் இந்த முக்கோணத்தினுடையதும் ஆன சிறிய முக்கோணம் கிடைக்கும்:





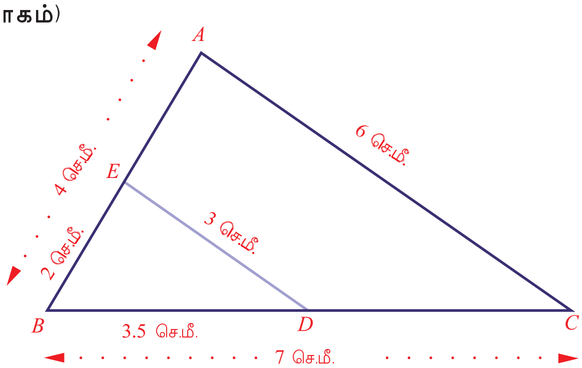
ஆனால் முதல் படத்தில் சிறிய முக்கோணத்தின் வலப் பக்கக் கோணம் பெரியதும், மேலே உள்ள கோணம் சிறியதும் ஆயின. இரண்டாவது படத்தில் மாறாகவும், கோணங்களைச் சமமாக வரைவதற்கு உரிய வழிமுறை என்ன?

வலப்பக்கத்திற்கு இணையாக வரைந்தால்?



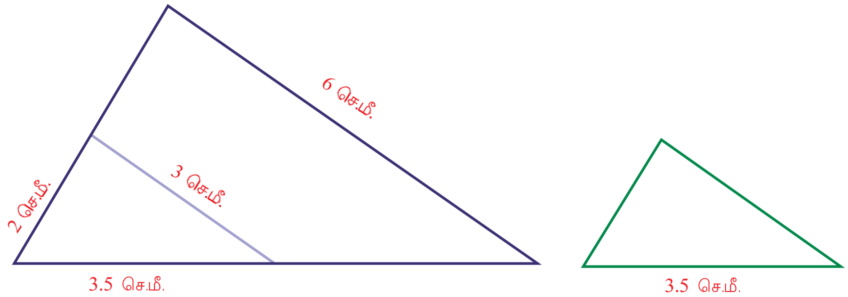
இப்போது கோணங்கள் எல்லாம் சரியாக உள்ளன அல்லவா? (எவ்வாறு?)

இங்கு வேறொன்றையும் காணலாம். முக்கோணத்தின் உள்ளே உள்ள கோடு, முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாக வலப்பக்கத்திற்கு இணையாக வரைந்தது ஆகும். எனவே இக்கோடு இடப்பக்கத்தை இரு சமப்பாகம் செய்யும். மட்டுமல்ல, இதன் நீளம் பெரிய முக்கோணத்தின் வலப்பக்கத்தின் நீளத்தின் பாதியும் ஆகும். (**இணைகோடுகள்** என்ற பாடத்தில் **முக்கோணப் பாகம்**)

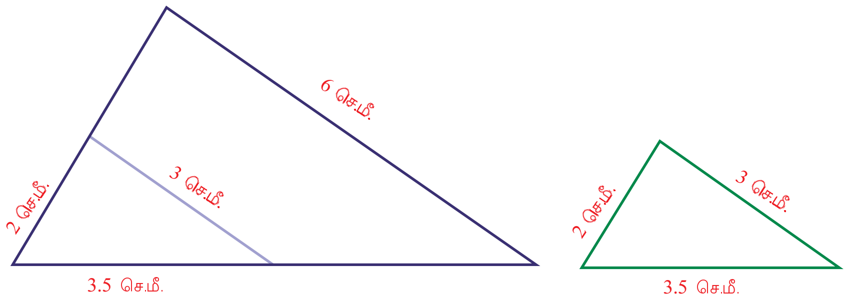


அதாவது, கோணங்களை மாற்றாமல் பெரிய பக்கத்தை மட்டும் பாதியாக ஆக்கி இவ்வாறு வரைந்த போது, மற்ற இரு பக்கங்களும் பாதி ஆனது.

முன்னர் கோணம் அளந்து வரைந்த முக்கோணத்திற்கும் இது சரியாகுமா?



இடப்பக்கப் படத்தின் சிறிய முக்கோணத்திலும் வலப்பக்கப் படத்தின் முக்கோணத்திலும் அடிப்பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம்; அவற்றின் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களுக்கும் ஒரே அளவு. எனவே இந்த முக்கோணங்களின் மற்ற இரண்டு பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம்தான். (எட்டாம் வகுப்பில் **சர்வசம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடம்)



முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எதுவாயினும் இது சரியாகும் அல்லவா. அப்படியானால் ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களை மாற்றாமல் மிகப் பெரிய பக்கத்தைப் பாதியாக ஆக்கினால், பிற பக்கங்களும் பாதியாக ஆகும்.

இங்கே சில வினாக்கள் உள்ளன:

- பாதிக்குப் பதிலாக வேறு மடங்கு அல்லது பாகம் எடுத்தால் இது சரியாகுமா?
- மிகப் பெரிய பக்கத்திற்குப் பதிலாக மிகச்சிறிய பக்கத்தையோ இடைப்பட்ட பக்கத்தையோ மாற்றினால் இது சரியாகுமா?

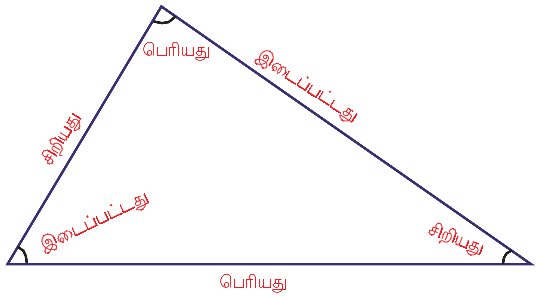
விகிதம் பயன்படுத்தி, இரு வினாக்களையும் சேர்த்து ஒன்றாக்கலாம்:

> ஒரே கோணங்கள் உள்ள இரு முக்கோணங்களில் மிகச் சிறிய பக்கங்களின் இடையிலும் இடைப் பட்ட பக்கங்களின் இடையிலும் மிகப்பெரிய பக்கங்களின் இடையிலும் ஒரே விகிதம் தானா?

இதில் முக்கோணங்களின் பக்கங்களை வேறுபடுத்திக் கூறுவதற்குச் சிறியது, இடைப்பட்டது, பெரியது என இவ்வாறு கூறுவதற்குப் பதிலாக வேறொருமுறையும் உண்டு.

ஜியோஜிப்ராவில் ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும். முக்கோணத்தின் எல்லாக் கோணங்களையும் அடையாளப்படுத்தவும். Min = 0 உடைய ஒரு ஸ்லைடர் d உருவாக்கவும். Segment with Given Length ஐப் பயன்படுத்தி நீளம் AB இன் d மடங்கு வரும்படி ஒரு கோடு வரையவும். இதற்காகக் கோட்டின் நீளம் d AB என்று கொடுத்தால் போதும். இனி $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ ஆகும்படி முக்கோணம் DEF வரைய வேண்டும். இதற்காக Angle with Given Size ஐப் பயன்படுத்தி E, D ஆகிய புள்ளிகளை வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோண அளவாக α ($\angle A$ இன் அளவு) அளிக்கவும். அதுபோல D, E என்பனவற்றில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் β என்று clockwise ஆக அளிக்கவும். DE′, ED′ ஆகிய கோடுகள் வரைந்து அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியை F என அடையாளப் படுத்தவும். இரு முக்கோணங்களின் பக்கங்களை அடையாளப்படுத்தவும், இவை ஒரே விகிதத்தில் தானா? கோணங்களை ஸ்லைடர் பயன்படுத்தி மாற்றிப் பார்க்கவும்.

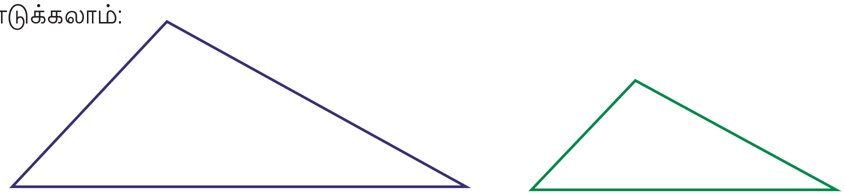
எந்த முக்கோணத்திலும் பக்கங்களின் அளவுகள் அவற்றின் எதிரேயுள்ள கோணங்களுக்கு ஏற்ப அல்லவா.



அப்படியானால் நமது வினா இவ்வாறு ஆகும்:

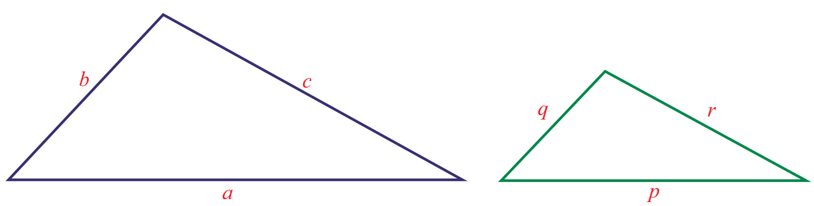
> ஒரே கோணங்கள் உள்ள இரு முக்கோணங்களில், சமமான இரு கோணங்களின் எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் ஜோடிகள் எல்லாம் ஒரே விகிதத்திலா?

இதைச் சோதித்துப் பார்க்க ஒரே கோணங்கள் உள்ள இரு முக்கோணங்களை எடுக்கலாம்:

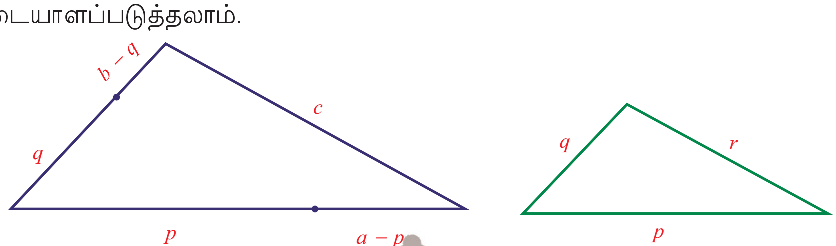


படத்தில் இரு முக்கோணங்களிலும் இடப்பக்கக் கோணங்களும், வலப்பக்கக் கோணங்களும் மேல் கோணங்களும் ஒரே அளவு உடையன. இவற்றின் அடிப்பக்கங்களின், இடப்பக்கங்களின், வலப்பக்கங்களின் விகிதம் ஒன்றுபோல் தானா என்பதையே சோதித்துப் பார்க்க வேண்டும்.

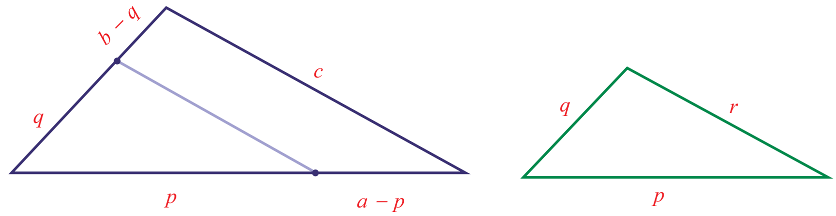
பெரிய முக்கோணத்தில் பக்கங்களின் நீளங்களை a, b, c என்றும் சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை p, q, r என்றும் கீழ்க் காண்பதுபோல எடுக்கலாம் :



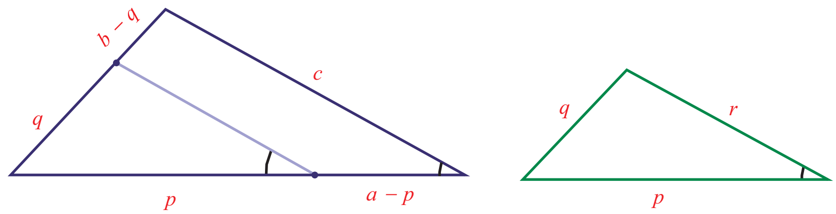
முதலில் அடிப்பக்கங்களின் நீளங்களையும், இடப்பக்கங்களின் நீளங்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம். அதற்காகச் சிறிய நீளங்களைப் பெரிய நீளங்களிலேயே அடையாளப்படுத்தலாம்.



இந்த இடங்களை இணைத்து வரைந்தாலோ?



இப்போது பெரிய முக்கோணத்தின் உள்ளேயும் வெளியேயும் உள்ள சிறிய முக்கோணங்களில் அடிப்பக்கங்களும் இடப்பக்கங்களும் சமம்; இவை இணைகின்ற கோணங்களும் சமம்; எனவே இவற்றின் பிற கோணங்களும் சமம் ஆகும். (எட்டாம் வகுப்பில் **சர்வசம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடம்). மட்டுமல்ல, முதலில் கூறியபடி, வெளியே உள்ள முக்கோணத்தின் கோணங்கள், பெரிய முக்கோணத்தின் கோணங்கள் தான். அப்போது கீழே உள்ள படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணங்கள் எல்லாம் சமம் ஆகும்.



பெரிய முக்கோணத்தின் வலப்பக்கமும் முக்கோணத்தின் உள்ளே உள்ள கோடும் அடிப்பக்கத்துடன் ஒரே சாய்வில் ஆனபடியால் அவை இணையானவை; எனவே உள்ளே உள்ள கோடு மற்ற இரு கோடுகளையும் பிரிப்பது ஒரே விகிதத்திலாகும். அதாவது,

$$\frac{a-p}{p} = \frac{b-q}{q}$$

இதை எளிதாக்கினால்,

$$\frac{a}{p} - 1 = \frac{b}{q} - 1$$

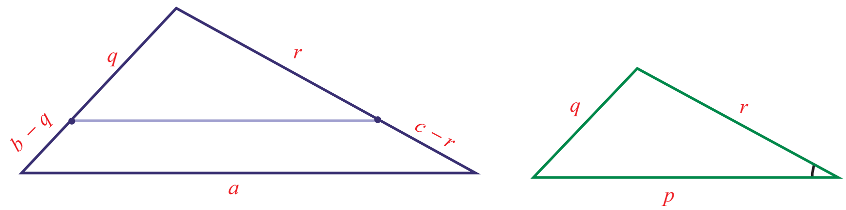
என்றும் தொடர்ந்து,

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$$

இதுபோன்று வெளியில் உள்ள முக்கோணத்தின் இடதும் வலதும் உள்ள பக்கங்களின் நீளங்களைப் பெரிய முக்கோணத்தின் இடதும் வலதும் பக்கங்களில் அடையாளப்படுத்தினால்,

$$\frac{b-q}{q} = \frac{c-r}{r}$$

என்று கிடைக்கும்:



இதிலிருந்து

$$\frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

என்றும் காணலாம்.

இப்போது பார்த்த இரண்டினையும் சேர்த்து $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ என எழுதலாம்.

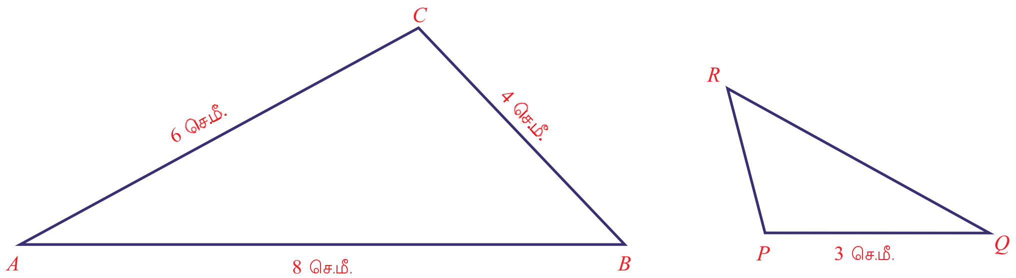
இதில் முக்கோணத்தின் கோணங்களைப் பற்றி அல்லது பக்கங்களைப் பற்றிக் குறிப்பாக ஒன்றும் கூறாத படியால் இது எல்லா முக்கோணங்களுக்கும் சரியாகும்.

ஒரே கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களில் இரு சம கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் ஜோடிகள் எல்லாம் ஒரே விகிதத்தில் ஆகும்.

இதை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். ஒரே கோணங்கள் உள்ள இரு முக்கோணங்களை எடுத்தால், அவற்றில் ஒன்றின் மிகச்சிறிய பக்கம் மற்றதன் மிகச் சிறிய பக்கத்தின் எத்தனை மடங்கோ அல்லது பாகமோ அத்தனை மடங்கு அல்லது பாகமாகத் தான் இடைப்பட்ட பக்கங்களும் மிகப் பெரிய பக்கங்களும். இந்த மடங்கை அல்லது பாகத்தை, மாற்றத்தின் அளவு வீதம் (scale) எனக் கூறுவர். அப்போது

ஒரே கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களில் பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆகும்.

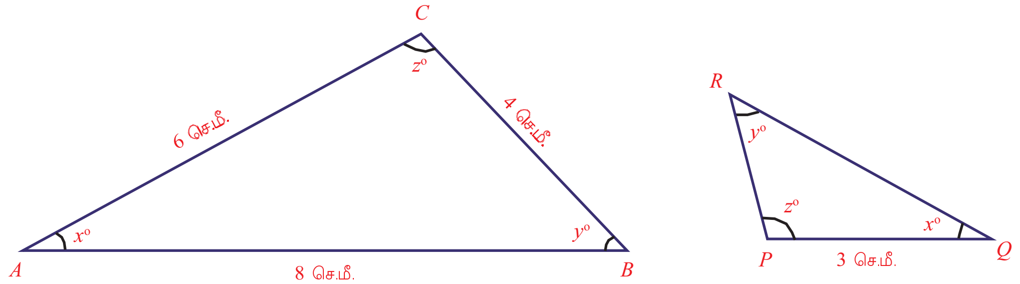
இதைப் பயன்படுத்தும் சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம். இரு முக்கோணங்களின் அளவுகள் பின்வருமாறு:



$$\angle P = \angle C \quad \angle Q = \angle A \quad \angle R = \angle B$$

PQR என்ற முக்கோணத்தில் பிற இரு பக்கங்களின் நீளங்களை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

முதலில் கோணங்களின் அளவுகள் x°, y°, z° என எடுத்து, படத்தில் சமமான கோணங்களை அடையாளப்படுத்தலாம்.



இனி சமமான கோணங்களின் எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் ஜோடிகளை எழுதலாம்.

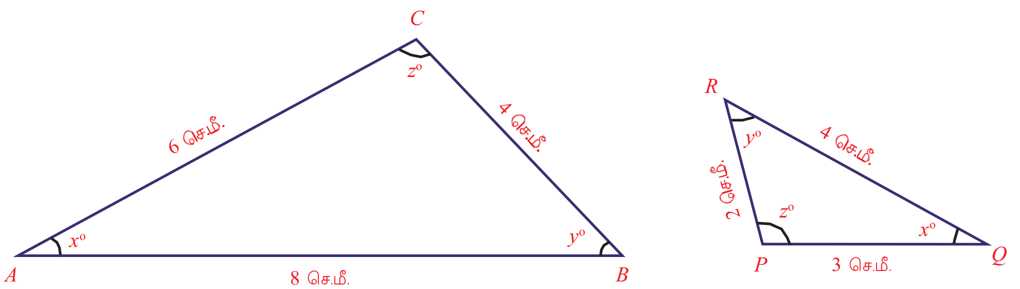
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

இதில் பெரிய முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களின் நீளங்களும், சிறிய முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் தெரியும் அல்லவா.

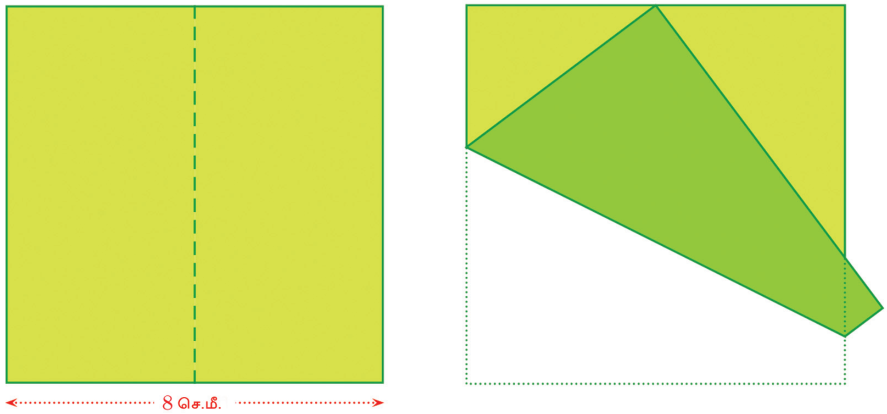
x	$BC = 4$	PR
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	QR

இதில் y° கோணத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களில், பெரியதன் பாதியே சிறியது. அப்போது பிற கோணங்களின் எதிர்ப்பக்கங்கள் இவ்வாறு தான் ஆக வேண்டும்.

x	$BC = 4$	$PR = 2$
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	$QR = 4$

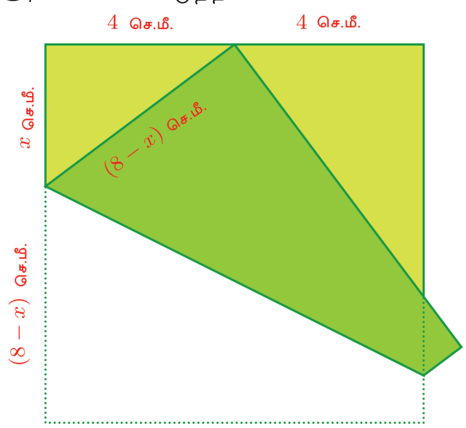


வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்; பக்கங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு சதுரக் காகிதத்தின் கீழே உள்ள ஒரு முனை, மேல் பக்கத்தின் சரியான மையப்பகுதியில் மடித்து வைக்கப்படுகிறது.



இப்போது மேலே இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் கிடைத்தன அல்லவா? இவற்றின் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு என்று பார்ப்போம்.

இடது முக்கோணத்தில் செங்குத்தாக உள்ள பக்கத்தின் நீளம் x சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், பக்கங்களின் நீளங்களை இவ்வாறு அடையாளப்படுத்தலாம்:



அப்போது இடது செங்கோண முக்கோணத்தில் பக்கங்களின் இடையே உள்ள தொடர்பை, பைதகோரஸ் தேற்றம் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$(8-x)^2 - x^2 = 4^2$$

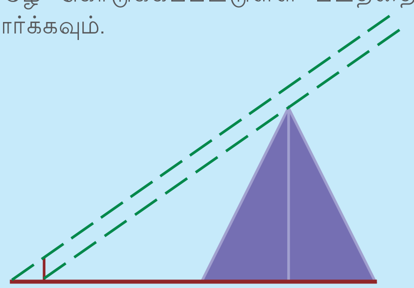
இதை எளிதாக்கி இவ்வாறு எழுதலாம்.

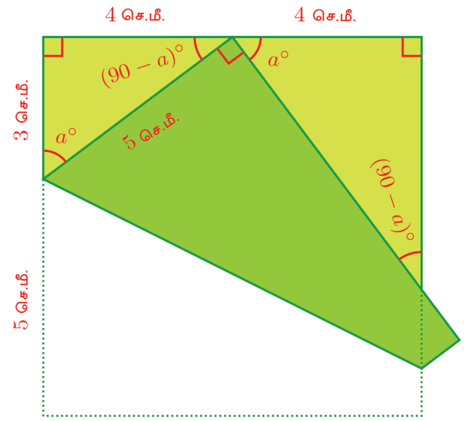
$$8(8-2x) = 16$$

இதிலிருந்து $x = 3$ எனக் காணலாம் அல்லவா. அப்போது இந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம்3, 4, 5 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

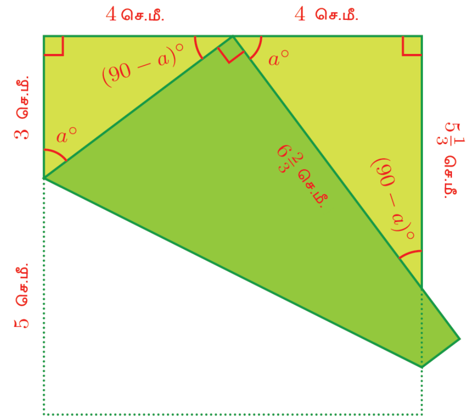
பண்டைய நிழல் கணக்கு

கிரேக்கக் கணித அறிஞரான தேலீஸ், முக்கோணங்களின் சர்வசமம் என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்தி, கடலில் நிற்கும் கப்பலுக்கு உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிட்ட கதையைக் கேட்டி ருக்கிறீர்கள் அல்லவா. தேலீஸைப் பற்றி வேறொரு கதை உள்ளது. எகிப்து அரசர், ஒரு பிரமிடின் உயரத்தைக் கணக்கிடுமாறு தேலீஸிடம் கேட்டுக்கொண்டார். தேலீஸ் கையாண்ட முறை இவ்வாறு குறிக்கப் பட்டுள்ளது. ''பிரமிடின் நிழலின் முடிவில், தனது ஊன்றுகோலை நிறுத்தி, சூரிய கதிர்கள் உருவாக்கிய இரு முக்கோணங் களில் நிழல்களின் விகிதம், பிரமிடு ஊன்றுகோல் என்பனவற்றின் விகி தத்திற்குச் சமம் எனக் காட்டினார்.''
கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.





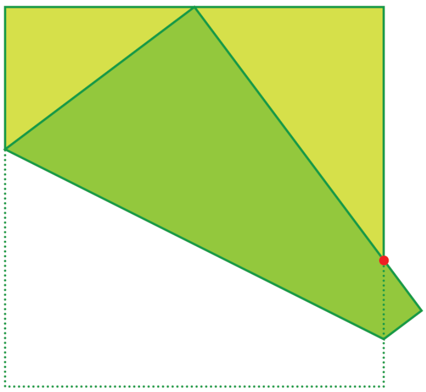
வலது முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் கணக்கிட, இரு முக்கோணங்களின் கோணங்களைப் பார்ப்போம். இடது முக்கோணத்தின் கீழே உள்ள கோணம் a° என எடுத்தால், பிற கோணங்களை இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

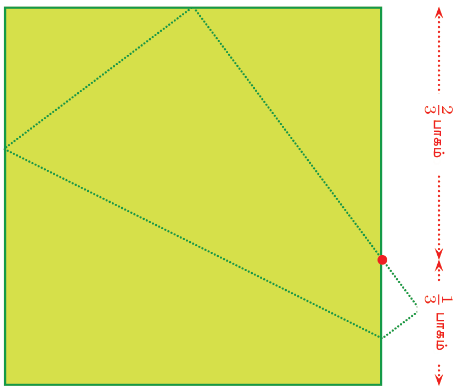


இரு முக்கோணங்களிலும் ஒரே கோணங்கள் ஆனபடியால், சம கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் விகிதமும் சமம். இடது முக்கோணத்தில் $(90 - a)^\circ$ கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் 3 சென்டிமீட்டரும், வலது முக்கோணத்தில் 4 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். அப்போது வலது முக்கோணத்தின் இரண்டாவது செங்குத்துப் பக்கமும், கர்ணமும், சிறிய முக்கோணத்தின் இந்தப் பக்கங்களின் $\frac{4}{3}$ மடங்காகும். அதாவது பக்கங்களின் நீளங்கள் படத்தில் காண்பது போல் ஆகும்.

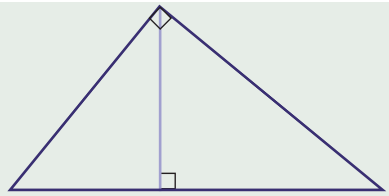
எந்த அளவில் உள்ள சதுரக் காகிதத்தையும் இவ்வாறு மடித்தால் கிடைக்கும் இரு செங்கோண முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் விகிதம் 3 : 4 : 5 என ஆகுமா?

வேறொன்றும் உண்டு; மடித்த பக்கம் வலப்பக்கத்தை வெட்டும் இடத்தை அடையாளப்படுத்தி, காகிதத்தை மீண்டும் நிமிர்த்தினால், வலப்பக்கத்தின் மூன்றில் ஒரு பாகம் கிடைக்கும் :





(1) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண உச்சியிலிருந்து கர்ணத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு கர்ணத்தை 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் நீளம் உள்ள பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது.



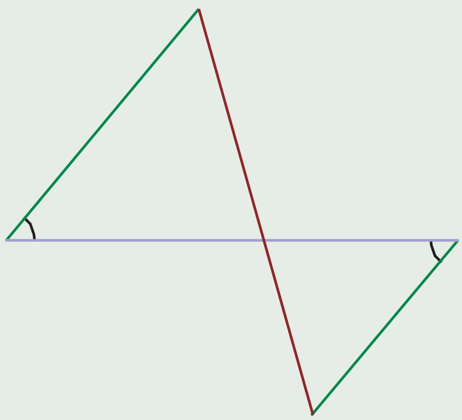
i) செங்குத்துக்கோடு வெட்டி உருவாக்கும் இரு சிறிய செங்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள் என நிறுவுக.

ii) செங்குத்துக்கோட்டின் உயரம் h என எடுத்தால் $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ என நிறுவுக.

iii) பெரிய செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

iv) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண உச்சியிலிருந்து கர்ணத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் h என்றும், அது கர்ணத்தை வெட்டும் பாகங்களின் நீளங்கள் a, b, என்றும் எடுத்தால் $h^2 = ab$ என நிறுவுக.

(2) கிடைமட்டமாக உள்ள ஒரு கோட்டின் இரு முனைகளிலும் ஒரே அளவு உள்ள கோணங்களை. மேலேயும் கீழேயும் வரைந்து, சாய்ந்த கோடுகளில் உள்ள இரு புள்ளிகள் இணைக்கப்படுகின்றன.

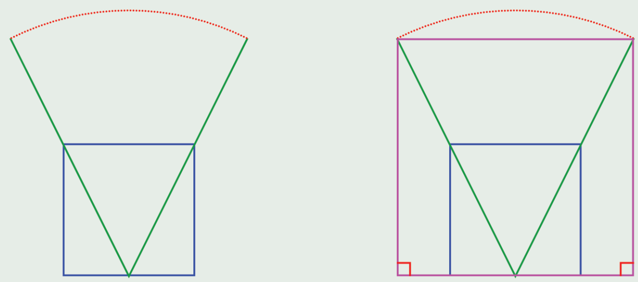


i) கிடைமட்டமான கோட்டின் பாகங்களும், சாய்ந்த கோட்டின் பாகங்களும் ஒரே விகிதத்தில் ஆகும் என நிறுவுக.

ii) கிடைமட்டமான கோட்டின் இரு முனைகளிலும் உள்ள சாய்ந்த கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதமும் இதுவே என நிறுவுக.

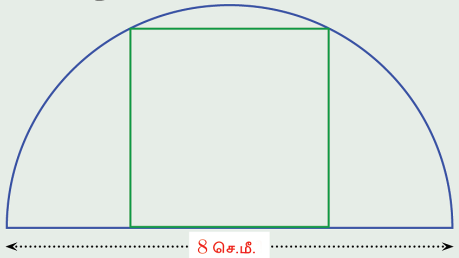
iii) இதைப் பயன்படுத்தி, 6 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டை 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் முறையை விளக்குக.

(3) ஒரு சதுரத்தின் அடிப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் எதிர்ப்பக்கத்தின் முனைகளையும் இணைத்து, ஒரே நீளத்தில் நீட்டப்படுகிறது. இந்தக் கோடுகளை இணைப்பதுடன் அவற்றின் முனைகளிலிருந்து சதுரத்தின் அடிப்பக்கத்தை நீட்டிய கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடுகளும் வரையப்படுகின்றன.

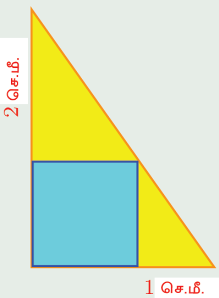


i) இவ்வாறு கிடைக்கும் செவ்வகமும் சதுரம் ஆகும் என நிறுவுக.

ii) தரப்பட்டுள்ள படத்தில் காண்பது போன்று, ஓர் அரை வட்டத்தில் இரு உச்சிகளும், அதன் விட்டத்தில் மற்ற இரு உச்சிகளும் வருமாறு ஒரு சதுரம் வரைவது எவ்வாறு என விளக்கவும்.



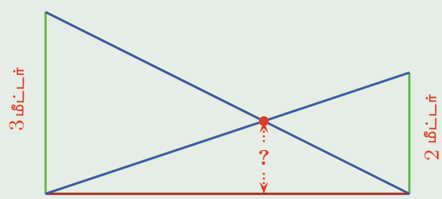
(4) படத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண உச்சியையும், மூன்று பக்கங்களின் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் உச்சிகளாகக் கொண்டு ஒரு சதுரம் வரையப்பட்டுள்ளது.



i) சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும்.

ii) பக்கங்களின் நீளம் 3, 4, 5 சென்டிமீட்டர் ஆன செங்கோண முக்கோணத்தில் இவ்வாறு வரைகின்ற சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எத்தனை சென்டிமீட்டர்?

(5) 3 மீட்டர், 2 மீட்டர் உயரம் உள்ள இரு கம்புகள் தரையில் செங்குத்தாக நடப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு கம்பின் மேல் உச்சியிலிருந்து அடுத்தக் கம்பின் அடிப்பக்கத்திற்குக் கயிறு இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது.



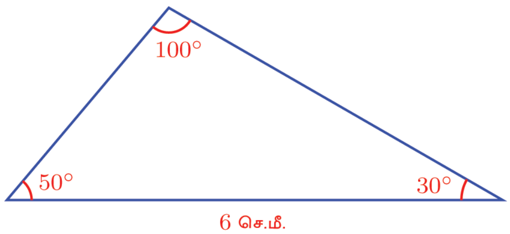
i) கயிறுகள் ஒன்றுக்கொன்று சந்திப்பது தரையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில்?

ii) கம்புகளுக்கு இடையில் உள்ள தூரம் எவ்வளவாக இருந்தாலும் இந்த உயரம் மாறுவதில்லை என நிறுவுக.

iii) கம்புகளின் நீளங்கள் a, b என்றும் கயிறுகள் சந்திக்கும் இடத்தின் உயரம் h என்றும் எடுத்து a, b, h என்பவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

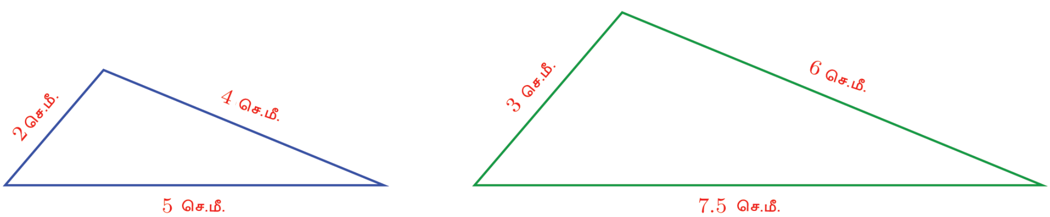
பக்கங்களும் கோணங்களும்

இரு முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் எனில், அவற்றின் பக்கங்கள் ஒரே அளவு வீதத்தில் மாறுகிறது எனப் பார்த்தோம். எடுத்துக்காட்டாக இந்த முக்கோணங்களைப் பார்ப்போம்.



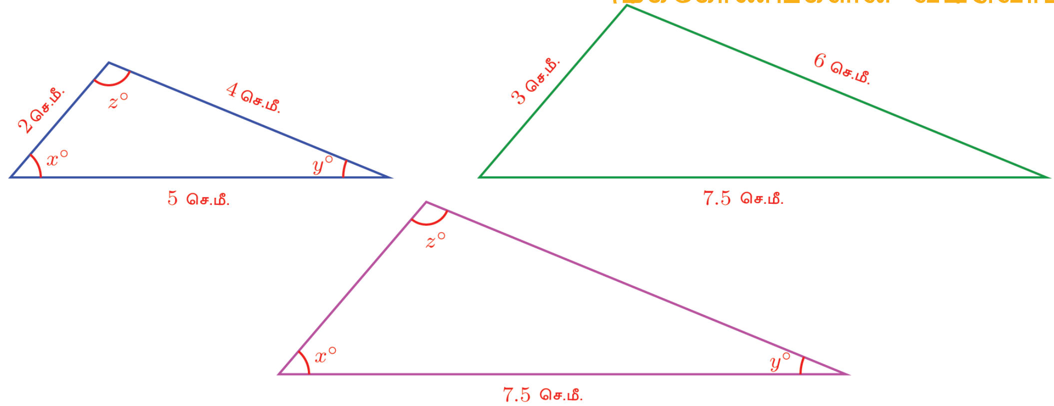
இரு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள், சிறிய முக்கோணத்தின் மிகப் பெரிய பக்கம், பெரிய முக்கோணத்தின் மிகப்பெரிய பக்கத்தின் $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ பாகமாகும். அப்போது சிறிய முக்கோணத்தின் மிகச்சிறிய பக்கமும், பெரிய முக்கோணத்தின் மிகச்சிறிய பக்கத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகமே ஆகும். இடைப்பட்ட பக்கங்களும் இவ்வாறே உள்ளன.

அப்படியானால் ஒரு எதிர் வினா உண்டு; ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களை ஒரே அளவு வீதத்தில் சிறியது ஆக்கவோ அல்லது பெரியது ஆக்கவோ செய்தால் கோணங்கள் மாறாமல் இருக்குமா?

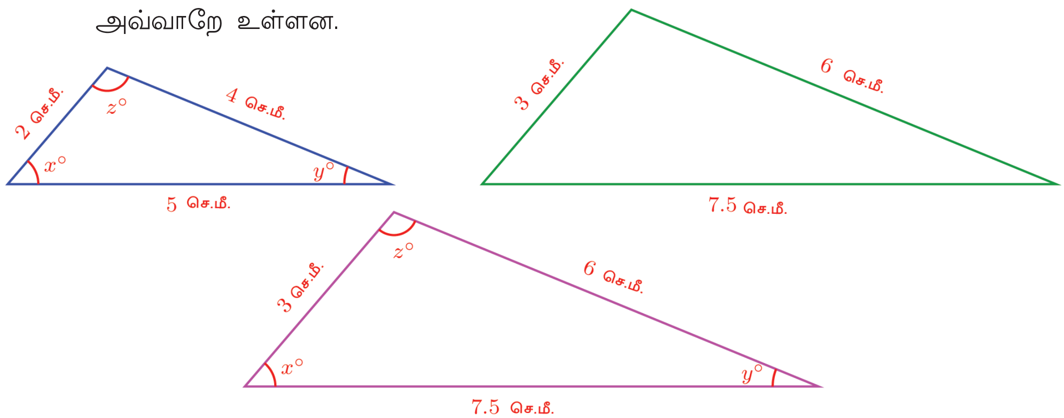


படத்தில் சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் ஒன்றரை மடங்கே பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள். இரு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்களா?

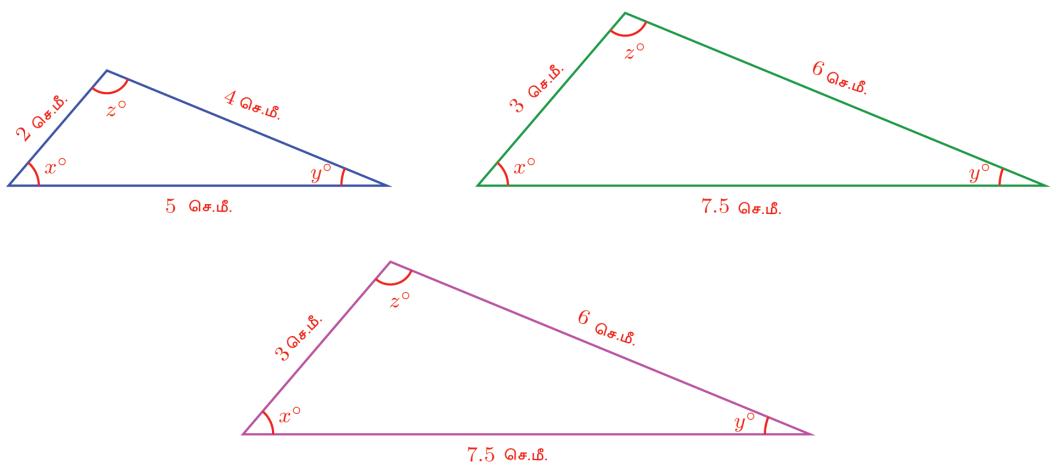
அதை உறுதிப்படுத்த, மூன்றாவது ஒரு முக்கோணம் வரையலாம். அதன் மிகப்பெரிய பக்கம், பெரிய முக்கோணத்திற்கு உரியது; அதன் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்கள் சிறிய முக்கோணத்தின் மிகப்பெரிய பக்கத்தின் முனைகளில் உள்ளவை.



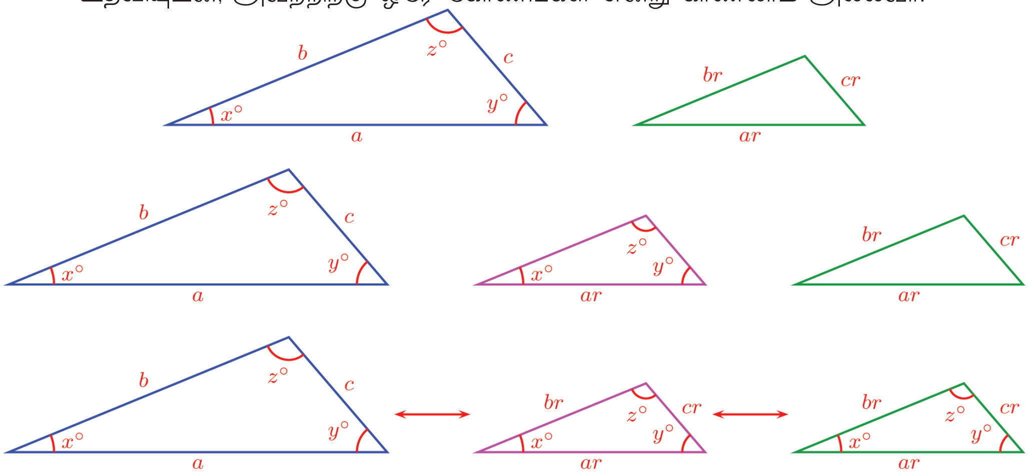
இந்தப் புதிய முக்கோணத்தின் கோணங்கள், பழைய சிறிய முக்கோணத்தின் கோணங்களே என்பதால், முன்னர் கண்டது போன்று இந்த இரு முக்கோணங்களில் பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்திலே இருக்க வேண்டும்; மிகப்பெரிய பக்கம் ஒன்றரை மடங்கு என்பதால், பிற பக்கங்களும் அவ்வாறே உள்ளன.



அதாவது புதிய முக்கோணத்திலும், பழைய பெரிய முக்கோணத்திலும் பக்கங்கள் எல்லாம் சமம்; அப்போது இவற்றின் கோணங்களும் சமம். (எட்டாம் வகுப்பில் **சர்வசம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடம்).

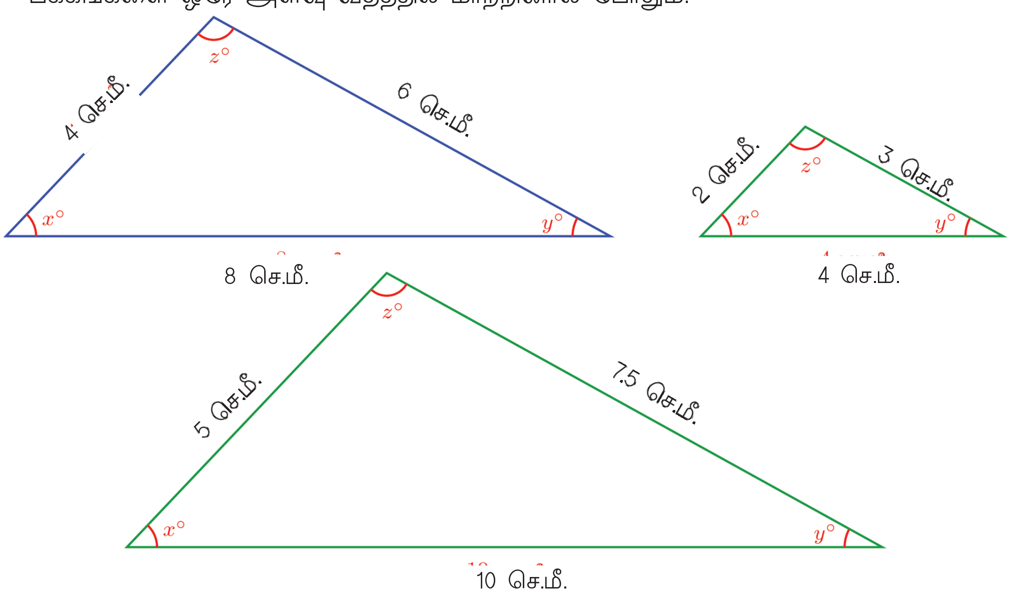


இப்போது முதல் இரு முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் என்று கிடைத்தன அல்லவா? பக்கங்களை ஒரே அளவு வீதத்தில் சிறியதாக ஆக்கவோ அல்லது பெரியதாக ஆக்கவோ செய்த எந்த இரு முக்கோணங்களை எடுத்தாலும் இதுபோன்ற ஓர் இடைப்பட்ட முக்கோணத்தின் உதவியுடன், அவற்றிற்கு ஒரே கோணங்கள் என்று காணலாம் அல்லவா.



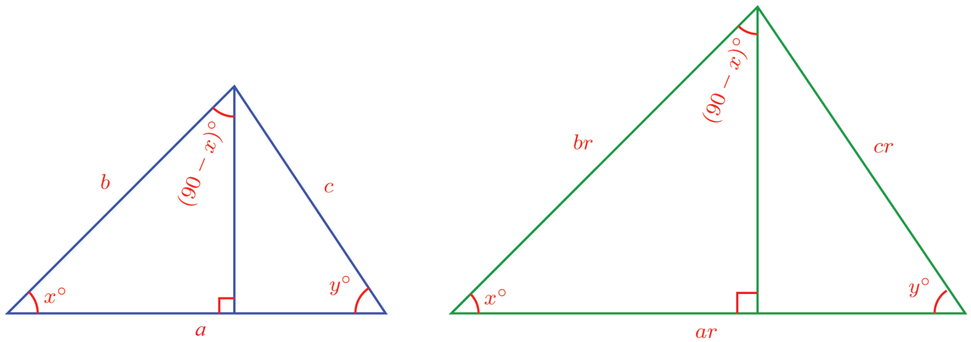
பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆன முக்கோணங்கள் அனைத்திற்கும் ஒரே கோணங்களாகும்.

அப்போது கோணங்கள் மாறாமல் ஒரு கோணத்தைச் சிறியதாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ மாற்றுவதற்கு கோணங்களை அளக்க வேண்டும் என்றில்லை. பக்கங்களை ஒரே அளவு வீதத்தில் மாற்றினால் போதும்:

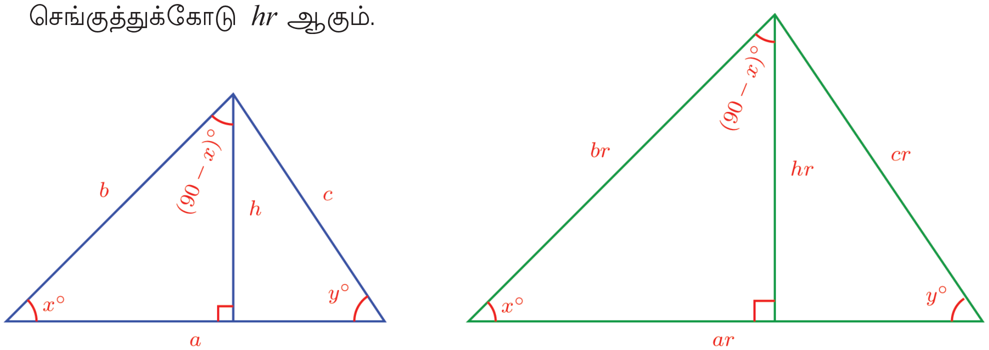


இதைப் பயன்படுத்தியுள்ள ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம். ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் ஒரே அளவு வீதத்தில் பெரியதாக ஆக்கவோ அல்லது சிறியதாக ஆக்கவோ செய்தால், சுற்றளவுகளும் அதே அளவு வீதத்தில் மாறுகிறது என்றும் கண்டுபிடிப்பது கடினமல்ல. (செய்து பார்க்கவும்)

பரப்பளவுகள் மாறுவது எப்படி? அதைத் தெரிந்துகொள்ள, இத்தகைய இரு முக்கோணங்களை வரைந்து பார்ப்போம். இப்போது கூறியதற்கு ஏற்ப, இரண்டிற்கும் ஒரே கோணங்களாகும். பரப்பளவை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க, ஒரே கோணம் உள்ள உச்சிகளிலிருந்து செங்குத்துக் கோடுகளும் வரையலாம்:



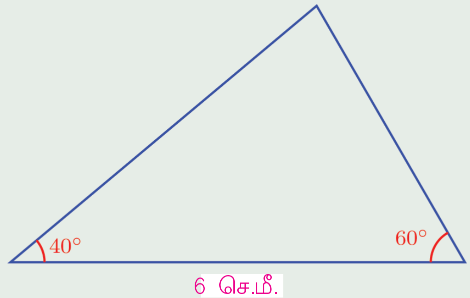
இரு முக்கோணங்களிலும் இடப்பக்கம் உள்ள செங்கோண முக்கோணங்களை மட்டும் பார்க்கவும். இரண்டிலும் கோணங்கள் x°, 90°, $(90-x)^\circ$ ஆகும். ஒரே கோணங்கள் என்பதால் பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆகும். நீல செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் b உம் பச்சை செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் br உம் ஆகும். அப்போது நீல முக்கோணத்தின் செங்குத்துக்கோட்டை h என எடுத்தால் பச்சை முக்கோணத்தின் செங்குத்துக்கோடு hr ஆகும்.



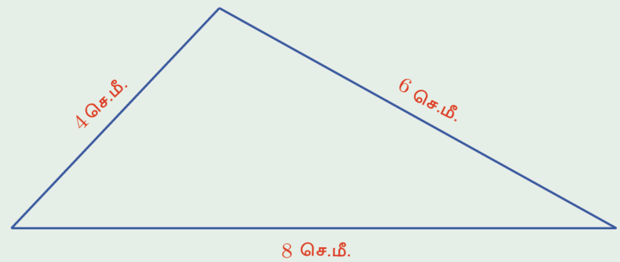
இனி முழு முக்கோணங்கள் இரண்டிலும் பரப்பளவைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா. நீல முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}ah$; பச்சை முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}ahr^2$

எனவே பரப்பளவு மாறுகின்ற அளவு வீதம், பக்கங்கள் மாறுகின்ற அளவு வீதத்தின் வர்க்கம் ஆகும்.

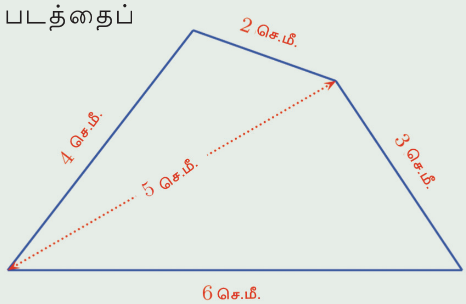
(1) படத்தில் உள்ள முக்கோணத்தின் கோணங்களும், பக்கங்களின் நீளம் $\frac{3}{4}$ பாகமும் ஆன முக்கோணம் வரையவும்.



(2) படத்தில் உள்ள முக்கோணத்தின் அதே கோணங்களும் பக்கங்களின் நீளம் $1\frac{1}{4}$ மடங்கும் ஆன முக்கோணம் வரையவும்.



(3) ஒரு நாற்கரத்தின் படத்தைப் பார்க்கவும்.



i) இதே கோணங்களும், பக்கங்களின் நீளமும் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு உள்ள நாற்கரம் வரையவும்.

ii) கோணங்கள் வித்தியாசமானதும், பக்கங்களின் நீளம் இதில் உள்ள பக்கங்களின் $1\frac{1}{2}$ மடங்கும் ஆன ஒரு நாற்கரம் வரையவும்.

முக்கோணச் சிறப்பு

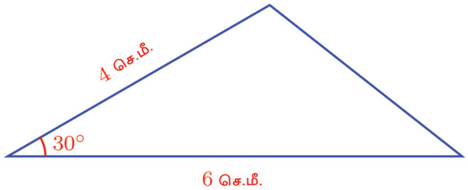
ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் வேறொரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்குச் சமம் எனில், இவற்றின் பக்கங்கள் விகித சமத்தில் ஆகும். மாறாக, இரு முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் விகித சமமெனில், ஒன்றின் கோணங்களே இரண்டாவது முக்கோணத்திற்கும் உடையது. இது பலகோணங்களில் முக்கோணங்களுக்கு மட்டும் உள்ள சிறப்புத் தன்மையாகும்.

மூன்றாம் வழிமுறை

முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமும் அதன் இரு முனைகளில் உள்ள கோணங்களும் தெரியும் எனில் கோணங்கள் மாறாமல், பக்கங்களை ஒரே அளவு வீதத்தில் சிறியதாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ மாற்றி வரைவது எவ்வாறு என்று முதல் பாகத்தில் பார்த்தோம். தெரிந்த பக்கத்தை வேண்டிய அளவு வீதத்தில் மாற்றி வரைந்து, அதன் இரு முனைகளிலும் அதே கோணங்கள் வரைந்தால் போதும்; பிற இரு பக்கங்களும் அதே அளவு வீதத்தில் மாறும்.

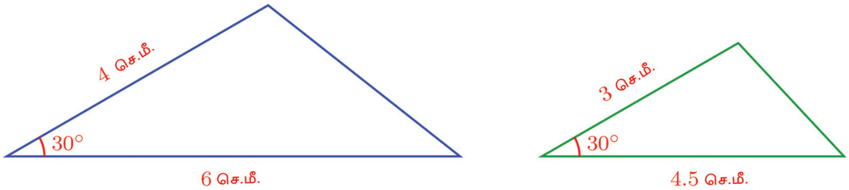
மூன்று பக்கங்களும் தெரியும் எனில் இவ்வாறு மாற்றி வரைக்கும் வழிமுறையை இரண்டாம் பாகத்திலும் பார்த்தோம். எல்லாப் பக்கங்களிலும் வேண்டிய அளவு வீதத்தில் மாற்றி வரைந்தால் போதும்; கோணங்கள் முதல் முக்கோணத்தின் கோணங்களே ஆகும்.

இனி மாற்ற வேண்டிய முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும், அவை இணையும் கோணமும் தெரியும் எனில்? எடுத்துக்காட்டாக, இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



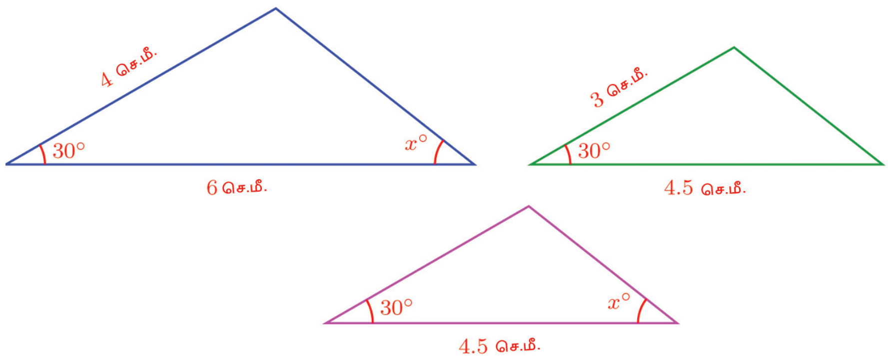
கோணங்கள் மாறாமல் இதன் பக்கங்களை எல்லாம் $\frac{3}{4}$ பாகமாக மாற்ற வேண்டும்.

பக்கங்களின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர் என்பவற்றின் $\frac{3}{4}$ பாகம், அவை இணைகின்ற கோணம் 30° என முக்கோணம் வரையலாம்.

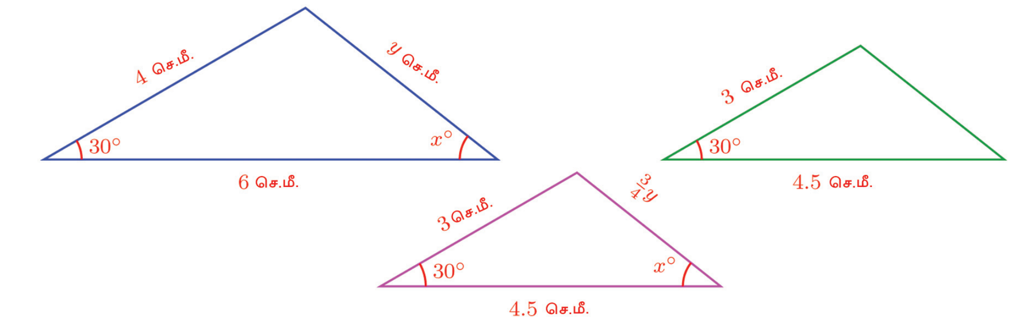


ஆனால் இந்த முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கமும் முதல் முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகம் என்று தெரியாது அல்லவா.

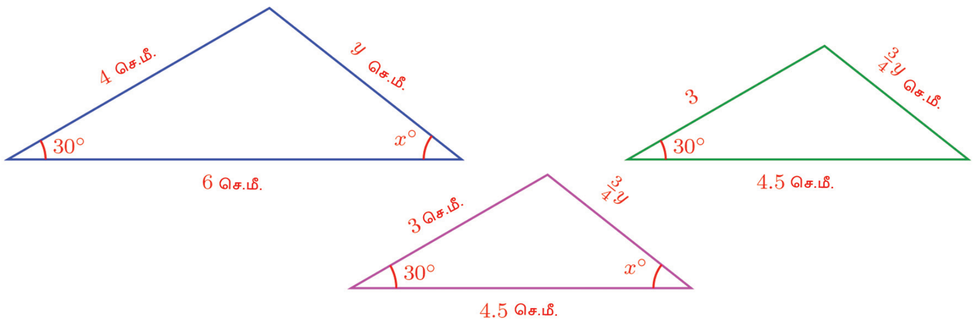
அதற்கு முன்னர் செய்தது போன்று, இடையில் ஒரு முக்கோணம் வரையலாம். அடிப்பக்கம் 4.5 சென்டிமீட்டர்; அதன் இரு முனைகளிலும், பெரிய முக்கோணத்தின் கீழே உள்ள கோணங்கள்.



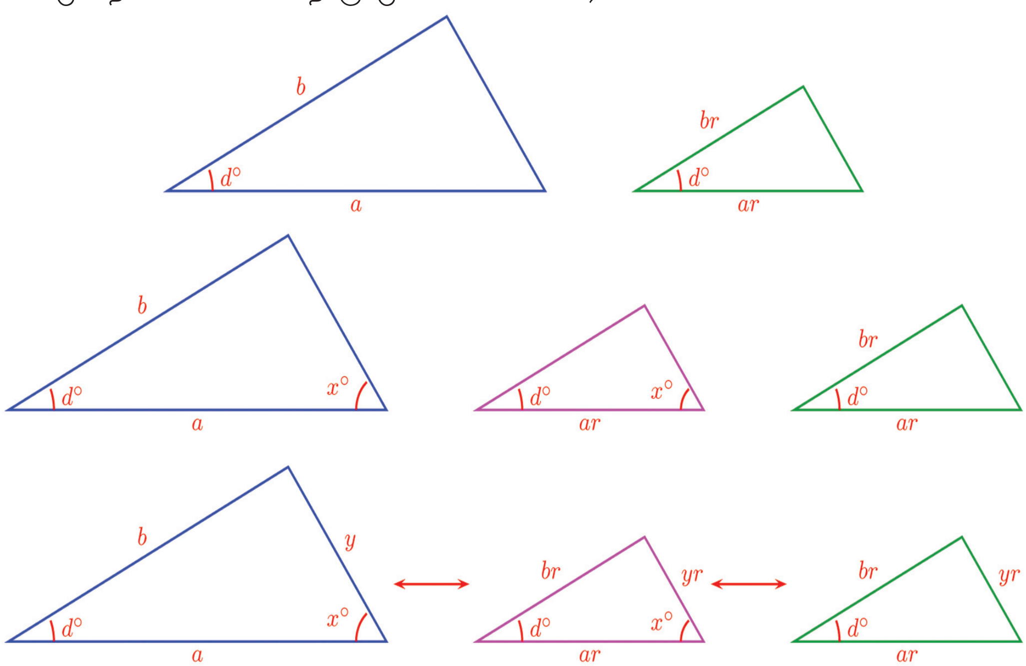
இந்தப் புதிய முக்கோணத்திலும் முதல் பெரிய முக்கோணத்திலும் ஒரே கோணங்கள் என்பதால் அவற்றின் பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்திலாகும்:
புதிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் $\frac{3}{4}$ பாகம் ஆகும். அப்படியானால் பிற பக்கங்களும் அவ்வாறுதான். பெரிய முக்கோணத்தின் அறியாத பக்கத்தின் நீளம் y சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், புதிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களை இவ்வாறு எழுதலாம்.



இனி புதிய முக்கோணத்தையும், பழைய சிறிய முக்கோணத்தையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம். இவற்றில் இரு பக்கங்களும், அவை இணையும் கோணமும் சமம். எனவே மூன்றாவது பக்கங்களும் சமம்.

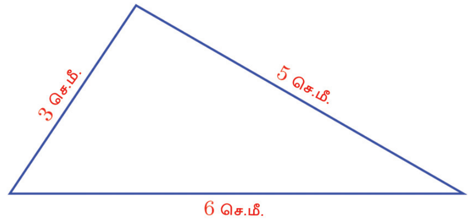


அவ்வாறு முதல் சிறிய முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமும், பெரிய முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகம் தான் எனக் காணலாம். முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்களும் கோணங்களும் எவ்வாறாயினும் இதே முறையிலேயே வேறொரு முக்கோணம் வரையலாம்.

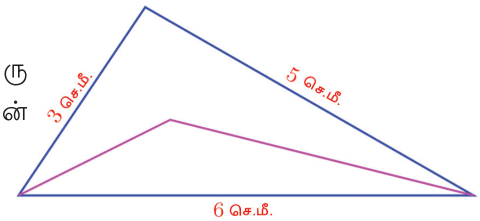


இரு பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்திலும், அவை இணைவது ஒரே கோணத்திலும் ஆன முக்கோணங்களில் மூன்றாவது பக்கங்களின் மாற்றம் அதே அளவு வீதத்தில் ஆகும்.

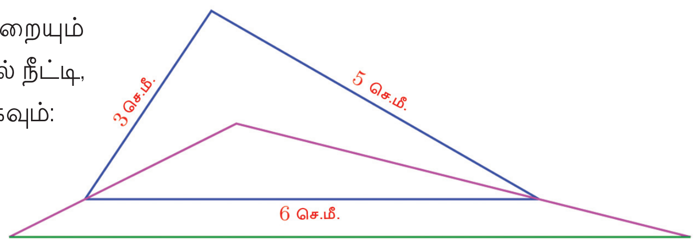
இந்தக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்திப் பக்கங்களோ கோணங்களோ அளக்காமலே ஒரு முக்கோணத்தை வேண்டிய அளவு வீதத்தில் மாற்றி வரையலாம். எடுத்துக்காட்டாக, படத்தில் காண்பது போன்று, ஒரு முக்கோணம் வரையலாம்.



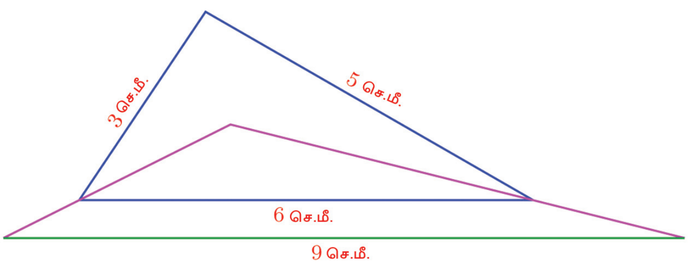
முக்கோணத்தின் உள்ளே ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி, அடிப்பக்கத்தின் முனைப்புள்ளிகளுடன் இணைக்கவும்:



இந்தக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றையும் மேலும் அவற்றின் பாதிஅளவில் நீட்டி, முனைப்புள்ளிகளை இணைக்கவும்:

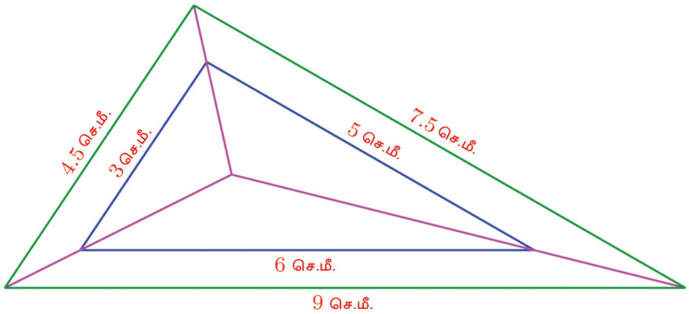


இப்போது புதிய ஒரு முக்கோணமும் அதன் உள்ளே சிறிய முக்கோணமும் உள்ளன. வரைந்ததன் கணக்குக்கு ஏற்ப சிறிய முக்கோணத்தின் இடது, வலது பாகங்களின் ஒன்றரை மடங்கே பெரிய முக்கோணத்தின் இடதும் வலதும் பாகங்கள். இந்தப் பக்கங்கள் இணைவது இரு முக்கோணங்களிலும் ஒரே கோணத்தில் என்பதால் பெரிய முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமும், சிறிய முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கத்தின் ஒன்றரை மடங்காகும்.



ஜியோஜிப்ராவில் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் வரைய ஒருவழிமுறை உள்ளது. ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும். D என்ற ஒரு புள்ளியை முக்கோணத்தின் உள்ளேயோ அல்லது வெளியேயோ அடையாளப் படுத்தவும். Ray பயன்படுத்தி D இல் இருந்து முக்கோணத்தின் உச்சிகளுக்குக் கோடுகள் வரையவும். Min = 0 ஆகும்படி ஒரு சிலைடர் g உருவாக்கவும். D மையமாக ஆரம் g ∗ AD வரும்படி ஒரு வட்டம் வரைந்து அது AD வெட்டும் புள்ளியை E என அடையாளப் படுத்தவும். அதைப் போன்று D மையமாக ஆரம் g ∗ BD ஆக வட்டம் வரைந்து BD உடன் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி F உம் ஆரம் g ∗ CD வரும் வட்டம் வரைந்து CD உடன் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி G உம் அடையாளப்படுத்தவும். இனி வட்டங்களை மறைத்து வைக்கலாம். EFG என்ற முக்கோணம் வரையவும். இது ABC க்கு வடிவொத்ததா? இரு முக்கோணங்களின் பக்கங்களும் கோணங் களும் அடையாளப்படுத்திப் பார்க்கவும். g = 1 ஆகும் போது என்ன நடக்கிறது? g ஆக 0.5, 2 என எடுக்கும் போது? D இன் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

முக்கோணத்தின் உள்ளே உள்ள புள்ளியை, மற்ற இரு உச்சிகளுடன் இதேபோல் இணைத்து நீட்டினால்?



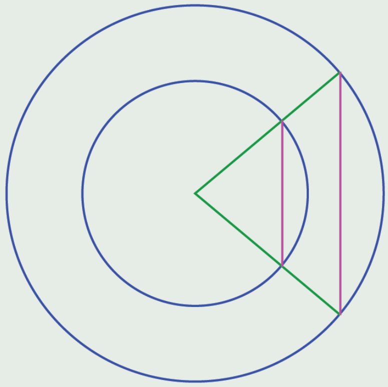
வடிவொத்த முக்கோணங்கள் வரைய ஜியோஜிப்ராவில் Dilate from Point ஐப் பயன் படுத்தலாம். Min = 0 வரும்படி ஸ்லைடர் a உருவாக்கவும். ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் உள்ளேயோ அல்லது வெளியேயோ ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Dilate from Point ஐப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்திலும் தொடர்ந்து புள்ளியிலும் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் Scale Factor ஆக a என்று அளிக்கவும். முக்கோணத்தின் வடிவொத்த வேறொரு முக்கோணம் கிடைக்கும். a உம் புள்ளியின் இடத்தையும் மாற்றிப் பார்க்கவும். முக்கோணத்திற்குப் பதிலாக எந்த வடிவத்தினுடையவும் வடிவொப்புமைகளை இதைப் போன்று உருவாக்கலாம்.

பக்கங்கள் எல்லாம் ஒன்றரை மடங்கு ஆனது அல்லவா? பக்கங்களின் நீளங்கள் அறியாவிட்டாலும் இவ்வாறு மாற்றி வரையலாம்.

இரு முக்கோணங்களில் ஒரே கோணங்கள் எனில், அவை வடிவொத்தவை (similar) என்று கூறுவர். இதுவரை பார்த்த கோட்பாடுகளுக்கேற்ப இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக உருவாகுவதற்குக் கீழே கூறப்படும் ஏதேனும் முறையில் தொடர்பு இருந்தால் போதும்.

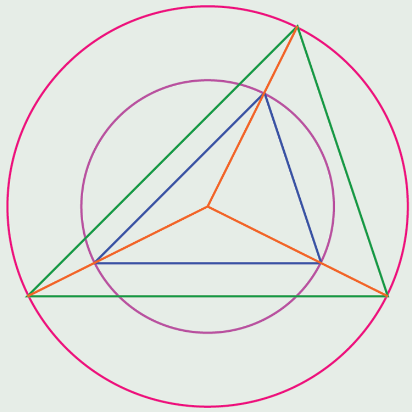
- ஒரே கோணங்களாக வேண்டும்
- அனைத்துப் பக்கங்களிலும் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்திலாக வேண்டும்.
- இரு பக்கங்களில் உள்ள மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆவதுடன், அவை ஒரே கோணத்தில் இணையவும் வேண்டும்.

(1) படத்தில் ஒரே புள்ளி மையமாக உள்ள இரு வட்டங்களை பெரிய வட்டத்தின் இரு ஆரங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளை இணைத்து, இரு முக்கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.



இந்த முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என நிறுவுக.

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளை சுற்றுவட்ட மையத்துடன் இணைக்கும் கோடுகளை நீட்டி அதே மையம் உள்ள வேறொரு வட்டத்தில் வெட்டும் புள்ளிகளை இணைத்து வேறொரு முக்கோணம் உருவாக்கப்படுகிறது.



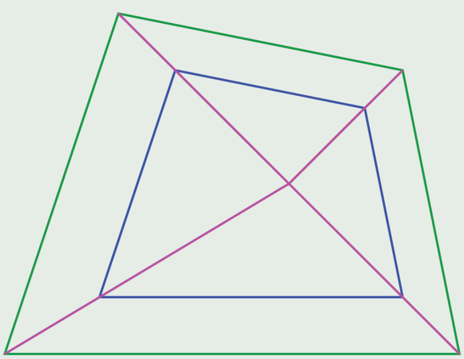
i) இந்த முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என நிறுவுக.

ii) முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் மாறிய அளவு வீதம், வட்டங்களின் ஆரங்கள் மாறிய அளவுவீதத்தில் தான் என நிறுவுக.

(3) ஒரு நாற்கரத்தின் உள்ளே ஒரு புள்ளியும் நாற்கரத்தின் உச்சிகளை இணைக்கும் கோடுகளும் ஒரே அளவு வீதத்தில் வெளியே நீட்டப்படுகின்றன. இந்தக் கோடுகளின் முனைகளை இணைத்து வேறொரு நாற்கரம் உருவாக்கப்படுகிறது.

i) பெரிய நாற்கரத்தின் பக்கங்கள், சிறிய நாற்கரத்தின் பக்கங்களை ஒரே அளவு வீதத்தில் பெரியது ஆக்கியவை என நிறுவுக.

ii) இரு நாற்கரங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள் என நிறுவுக.



ஆய்வு

- வடிவொத்த முக்கோணங்களின் கோணத்தின் இருசமவெட்டிகள், நடுக்கோடுகள், சுற்றுவட்ட ஆரங்கள் ஆகியவற்றின் இடையில் உள்ள சிறப்புத்தன்மைகள் யாவை?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• ஒரே கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களில், பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்தில் எனப் புரிந்து கொள்ளுதல். • ஒரு பக்கமும் அதன் இரு முனைகளில் உள்ள கோணங்களும் தெரிந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் ஒரே அளவு வீதத்தில் சிறியதாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ மாற்றி வரைதல். • பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆன முக்கோணத்தின் கோணங்கள் சமம் என அறிதல். • மூன்று பக்கங்களும் தெரிந்த முக்கோணங்களின் கோணங்கள் மாறாமல் சிறியதாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ மாற்றி வரைதல். • இரு பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்திலும், அவை இணைவது ஒரே கோணத்திலும் ஆன முக்கோணங்களில் மூன்றாவது பக்கங்களின் மாற்றமும் இதே அளவு வீதத்தில் எனப் புரிந்து கொள்ளுதல். • பக்கங்களையோ கோணங்களையோ அளக்காமல், ஒரு முக்கோணத்தை வேண்டிய அளவு வீதத்தில் மாற்றி வரைதல். • பக்கங்களையோ கோணங்களையோ அளக்காமல், எந்தப் பலகோணத்தையும் தேவையான அளவு வீதத்தில் மாற்றி வரைதல்.			

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes