സ്റ്റാൻഡേർഡ് IX

ഗണിതം

ഭാഗം – 1

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2016

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

അളവുകളുടെയും അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെയും പഠനമായാണ് ഗണിതം തുടങ്ങുന്നത്. അളവുകളെ കേവലസംഖ്യകളായും, വസ്തുക്കളെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായും കണ്ടു തുടങ്ങുമ്പോൾ, ഗണിതത്തിന്റെ ആശയതലം രൂപപ്പെടുന്നു. സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതസമവാക്യങ്ങളാകുന്നു. പുതിയ സാഹചര്യങ്ങളെ ഗണിതപരമായി വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളും സങ്കേതങ്ങളും ആവശ്യമായി വരുന്നു. വസ്തുതകളുടെ കാര്യകാരണബന്ധം, ആശയങ്ങളുടെ യുക്തിയുക്തതയായി വളരുന്നു. ഗണിതശാസ്ത്രം വളരുന്നു.

അതിന്റെ അടുത്ത പടിയിലേക്ക് സ്വാഗതം.

ഡോ. പി. എ. ഫാത്തിമ
ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചന

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

ടി.പി. പ്രകാശൻ
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വാഴക്കാട്
മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം.വി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കുമ്പള
കാസറഗോഡ്

വിജയകുമാർ ടി.കെ.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. ചെർക്കള
കാസറഗോഡ്

രാമാനുജം ആർ.
എം.എൻ.കെ.എം.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

അനിൽകുമാർ എം.കെ.
എസ്.കെ.എം.ജെ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കൽപ്പറ്റ, വയനാട്

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്.എസ്. അരീക്കോട്
മലപ്പുറം

രമേശൻ എൻ.കെ.
ആർ.ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്. മൊകേരി, കണ്ണൂർ

ജാബിർ കെ.
ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്. മൊഗ്രാൽ, കാസറഗോഡ്

ശ്രീകുമാർ ടി.
ഗവ.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കരമന
തിരുവനന്തപുരം

കെ.ജെ. പ്രകാശ്
ജി.എം.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. പട്ടം
തിരുവനന്തപുരം

അനിൽ സി. ഉഷസ്
ജി.എച്ച്.എസ്. നെടുമ്പ്രം
തിരുവല്ല, പത്തനംതിട്ട

ഷിജോ ഡേവിഡ് സി.
സി.എം.എസ്.എച്ച്.എസ്.എസ്.
തൃശൂർ

ഫ്രോയ്ഡ് ഫ്രാൻസിസ് പി.
വി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വളാഞ്ചേരി
മലപ്പുറം

കൃഷ്ണപ്രസാദ് എം.
പി.എം.എസ്.എ.വി.എച്ച്. എസ്.എസ്.
ചാപ്പനങ്ങാടി, മലപ്പുറം

ബാലഗംഗാധരൻ വി.കെ.
എ.ഇ.ഒ., പരപ്പനങ്ങാടി, മലപ്പുറം

കവർ

രാജീവൻ എൻ.ടി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. തരിയോട്, വയനാട്

വിദഗ്ധർ

ഡോ.ഇ. കൃഷ്ണൻ
റിട്ട. പ്രൊഫ. യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്
തിരുവനന്തപുരം

വേണുഗോപാൽ സി.
അസി. പ്രൊഫ., ഗവ. കോളേജ് ഓഫ് ടീച്ചർ
എഡ്യൂക്കേഷൻ, തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. രമേഷ് കുമാർ പി.
അസി. പ്രൊഫ., കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി

ഡോ. ശരച്ചന്ദ്രൻ
റിട്ട. ഡെപ്യൂട്ടി ഡയറക്ടർ ഓഫ്
കോളേജിയേറ്റ് എഡ്യൂക്കേഷൻ, കോട്ടയം

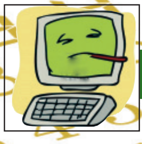
അക്കാദമിക് കോർഡിനേറ്റർ

സുജിത് കുമാർ ജി.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

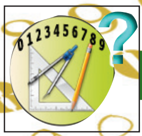
ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.


ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത


കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം


ഗവേഷണം

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

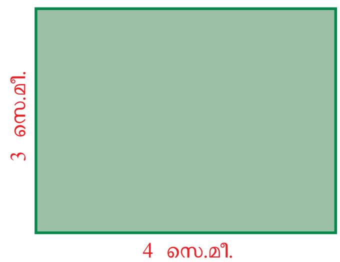


ചർച്ച ചെയ്യാം

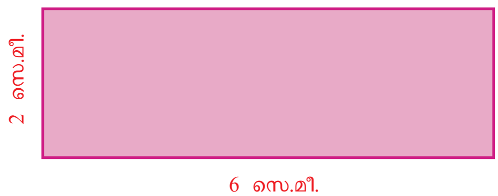
പരപ്പളവ്

ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം. പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയിരിക്കണം. എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

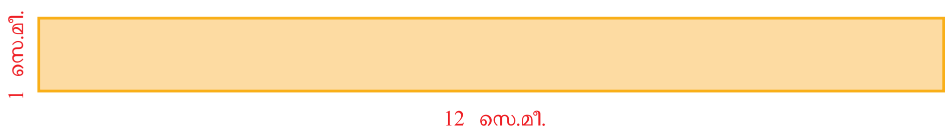
ഇങ്ങനെയാവാം:



ഇങ്ങനെയുമാവാം:



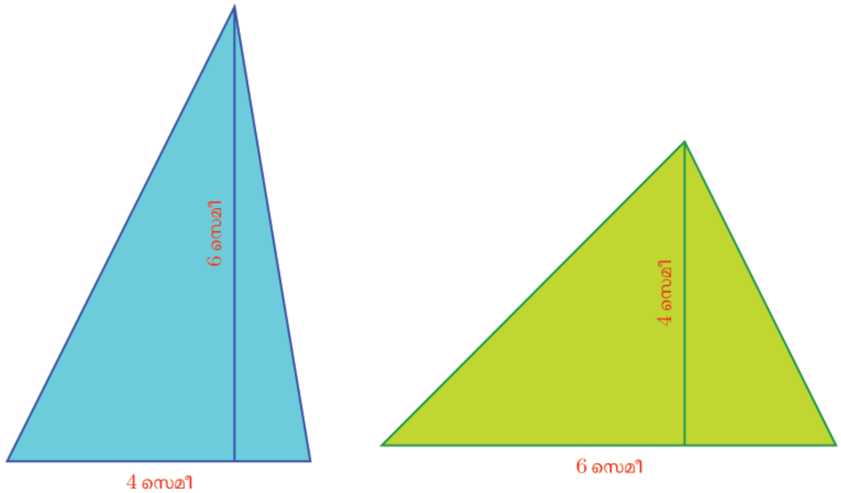
ഇനിയും പലതരത്തിലാകാം, അല്ലേ?



ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആകണം എന്നുകൂടി പറഞ്ഞാലോ? ഒരെണ്ണം മാത്രമല്ലേയുള്ളൂ?

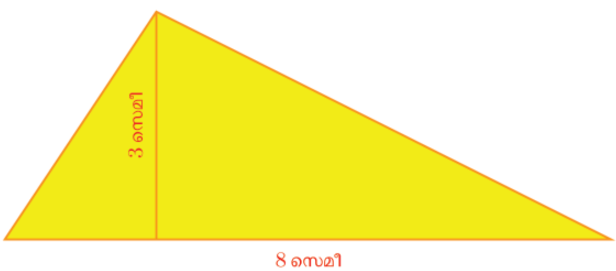
12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമാണ് വേണ്ടതെങ്കിലോ?

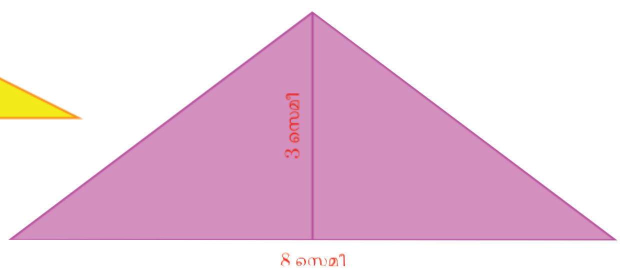
അതും പലതരത്തിലാവാം:

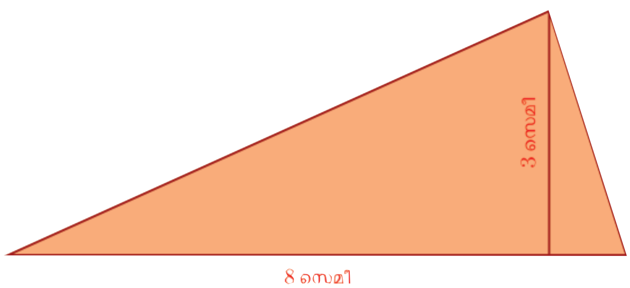


ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെന്നുകൂടി പറഞ്ഞാലോ?

അപ്പോഴും പലതരത്തിലായിക്കൂടേ?

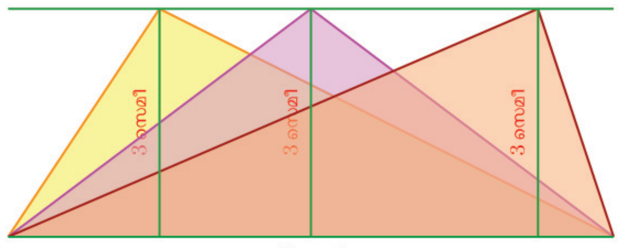






നീളം 8 ആയി ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വരയിൽനിന്നുള്ള ഉയരം 3 ആയി ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക (Grid ഉപയോഗിക്കാം). ഈ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി ആദ്യത്തെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വരയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ആ ബിന്ദുവും ആദ്യം വരച്ച വരയുടെ അഗ്രബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി വരുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. Area ഉപയോഗിച്ച് ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂല സമാന്തരവരയിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് മാറുന്നുണ്ടോ?

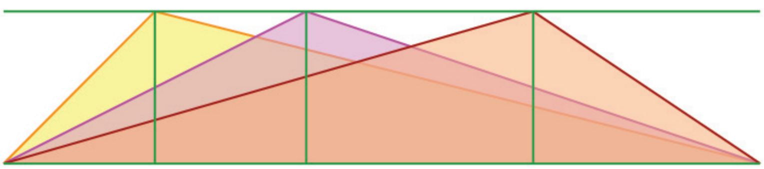
ഇവയുടെയെല്ലാം മുകളിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറിയിട്ടുണ്ട്; പാദവും ഉയരവും ഒന്നുതന്നെ ആയതിനാൽ പരപ്പളവ് മാറിയിട്ടുമില്ല:



ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല, പാദത്തിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിലാണ്. ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറയാം: മേൽമൂലകളെല്ലാം പാദത്തിനു സമാന്തരമായി, 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലുള്ള വരയിലാണ്.

ഇതേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല ഈ വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കണമല്ലോ; മറിച്ച്, ഈ വരയിലെ ഏത് ബിന്ദു എടുത്ത്, താഴത്തെ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും ഇതേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണം കിട്ടും.

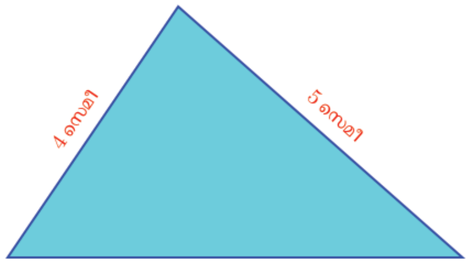
പാദവും പരപ്പളവും മാറ്റിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ശരിയല്ലേ?



ഒരേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മൂന്നാം മൂല, പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലാണ്; മറിച്ച്, ഒരേ പാദവും മൂന്നാം മൂലകളെല്ലാം പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമായ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

ഇത് എങ്ങനെയെല്ലാം ഉപയോഗിക്കാമെന്നു നോക്കാം:

വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്ററായി ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

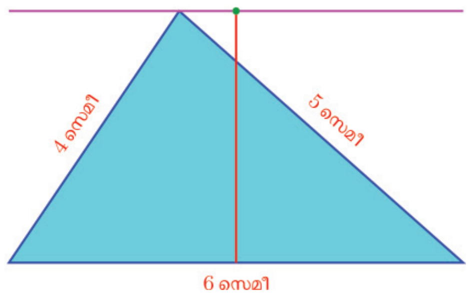


ഇനി താഴത്തെ വശം ഇതുതന്നെയായി, ഇതേ പരപ്പുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കണം:

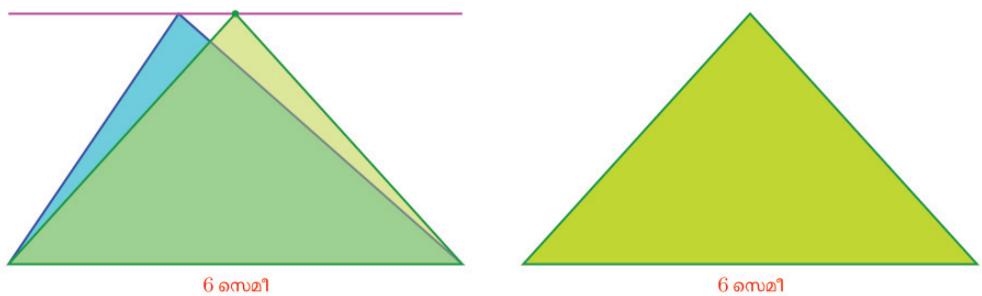
വരയ്ക്കേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം മാറാത്തതിനാൽ, മേൽമൂല എവിടെയെടുക്കണം എന്നു മാത്രം തീരുമാനിച്ചാൽ മതി. പരപ്പളവ് മാറാതിരിക്കാൻ, അത് താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി ഇപ്പോഴുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെയുള്ള വരയിലായിരിക്കണം.

സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലായിരിക്കുമെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടതല്ലേ?

അപ്പോൾ ഈ വരച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായ വരയും, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയും മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ് നമുക്കു വേണ്ട മൂന്നാംമൂല:

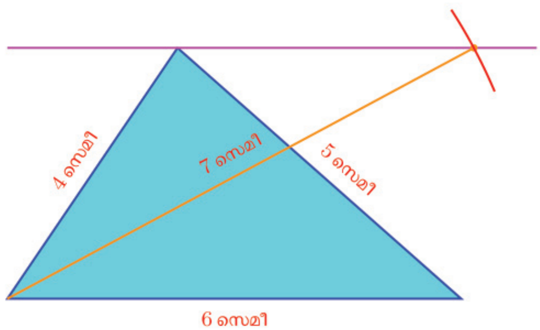


ഇനി ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ:

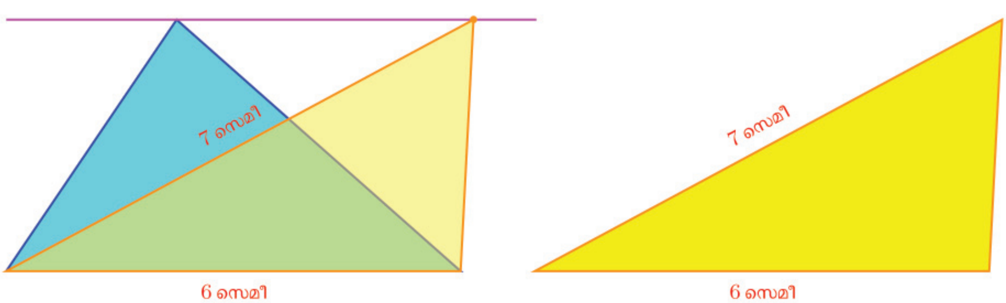


ഇനി ഇതേ പരപ്പുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം, താഴത്തെ വശം ഇതുതന്നെയും, ഇടതുവശം 7 സെന്റിമീറ്ററുമായി വരയ്ക്കാമോ?

ഇടതുമൂലയിൽ നിന്ന്, 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, മുകളിലെ വരയെ മുറിക്കുന്ന സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിച്ചാൽപ്പോരേ?



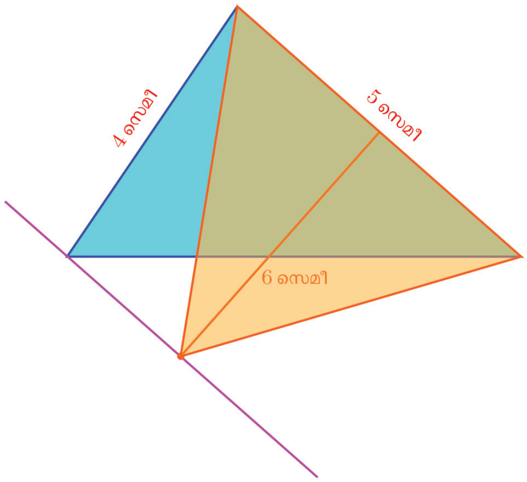
അപ്പോൾ ത്രികോണം ഇങ്ങനെയാകും:

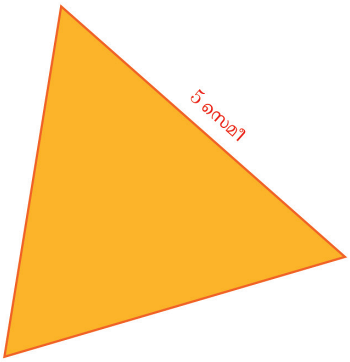


ഇതേ പരപ്പുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണം, പാദം 5 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?

താഴത്തെ വശം 5 സെന്റിമീറ്ററായി ആദ്യത്തെ ചിത്രം മാറ്റിവരച്ച്, മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ വരയ്ക്കാം.

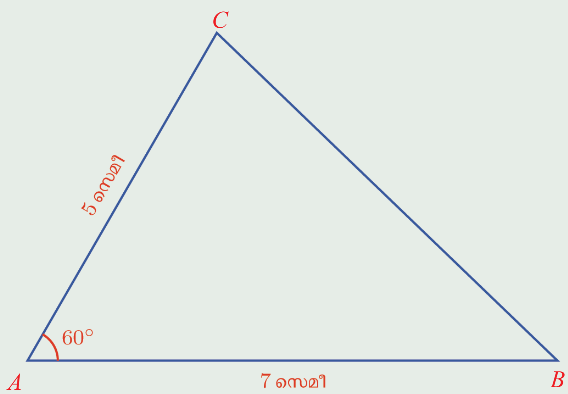
അൽപം ചരിഞ്ഞ ത്രികോണമായാലും മതിയെങ്കിൽ, ഇതേ ചിത്രത്തിൽത്തന്നെ ഇടതുമൂലയിലൂടെ വലതു വശത്തിനു സമാന്തരവര വരച്ചും ചെയ്യാം.





(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മൂന്നു വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(2) ചുവടെ കാണുന്ന ത്രികോണം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.



ഇതേ പരപ്പുള്ള ABP, BCQ, CAR എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.

i) $\angle BAP = 90^\circ$

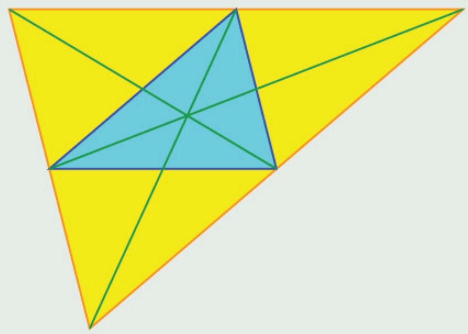
ii) $\angle BCQ = 60^\circ$

iii) $\angle ACR = 30^\circ$

(3) ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും വൃത്തകേന്ദ്രവും മൂലകളായി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം, എല്ലാ മൂലകളും വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയായി വരയ്ക്കുക.

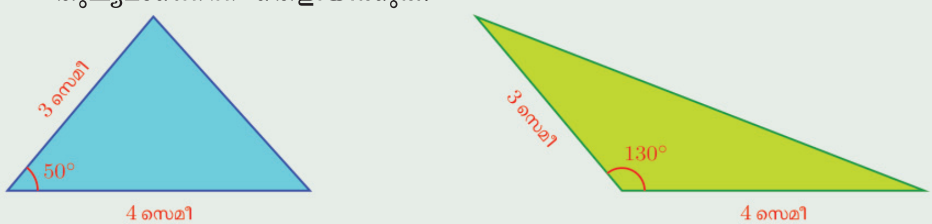
(4) രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 8, 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററും, ആയ (തുല്യമല്ലാത്ത) എത്ര ത്രികോണം വരയ്ക്കാം? പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

(5) ചിത്രത്തിലെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിനും എതിർമൂലയിലൂടെ സമാന്തരവര വരച്ചാണ് വലിയ ത്രികോണം ഉണ്ടായിരിക്കുന്നത്:



ചിത്രത്തിൽ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ പരപ്പളവുള്ള എത്ര ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്?

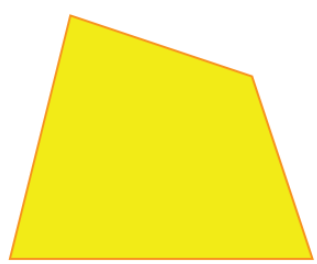
(6) ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ മാറാതെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള എത്ര വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം?

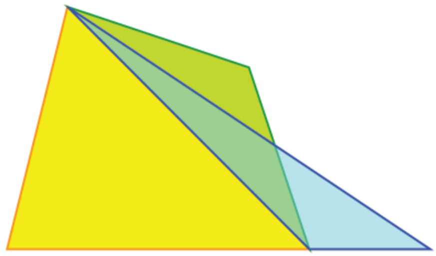
ചതുർഭുജവും ത്രികോണവും

സവിശേഷതകളൊന്നുമില്ലാത്ത ഒരു സാധാരണ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

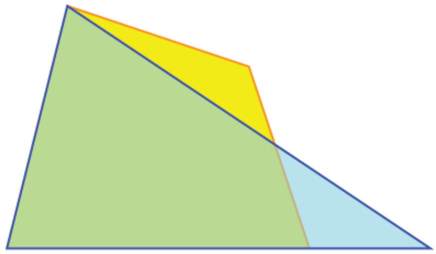


ഒരു വികർണം വരച്ചു രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക, അല്ലേ?

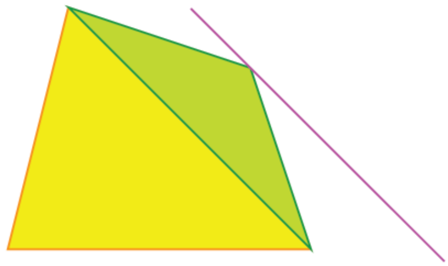
മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. പാദവും പരപ്പളവും മാറാതെ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകളിലെ മൂല ചതുർഭുജത്തിന്റെ പാദത്തിലെത്തിച്ചാലോ?



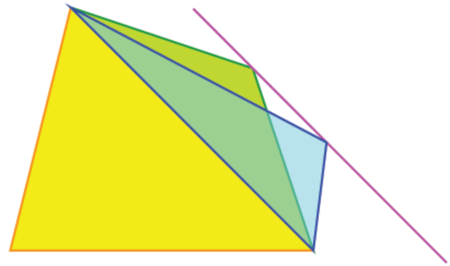
അപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, മഞ്ഞയും നീലയും ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണല്ലോ. ഇവ ചേർന്ന രൂപമാകട്ടെ, വലിയൊരു ത്രികോണവും. അങ്ങനെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഒറ്റ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവായി മാറ്റാം.



ഇനി ഈ ആഗ്രഹം സാധിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ പാദവും പരപ്പളവും മാറാതെ മൂല മാറ്റാൻ, ആ മൂലയിലൂടെ എതിർവശത്തിന് സമാന്തരവര വരച്ചാൽപ്പോരേ?

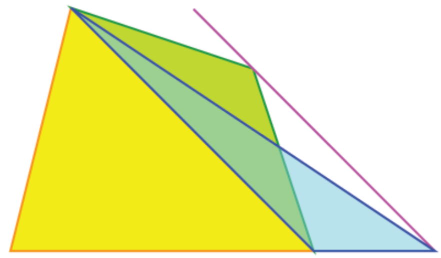


പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകൾ മൂല ഈ വരയിലൂടെ എത്ര നീക്കിയാലും പരപ്പളവ് മാറില്ല. അതുകൊണ്ടു തന്നെ അങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന പുതിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് മാറുന്നില്ല.

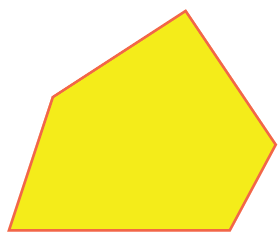


ത്രികോണമൂല, സമാന്തരവരയും ചതുർഭുജത്തിന്റെ പാദം നീട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സ്ഥാനത്തെത്തിച്ചാലോ?

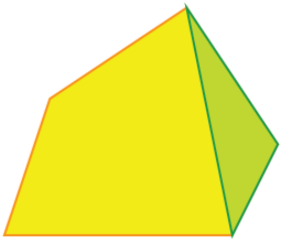
ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമായില്ലേ?



ഈ സൂത്രം ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ച്, ഏതു ബഹുഭുജത്തിനും അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമുണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ പഞ്ചഭുജം നോക്കൂ.



ഒന്നിടവിട്ട രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഇതിനെ ഒരു ചതുർഭുജവും ത്രികോണവുമാക്കി ഭാഗിക്കാം.



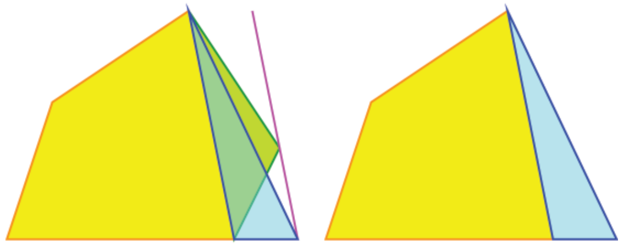
മുറിച്ചുമാറ്റലും തിരിച്ചടുക്കലും

കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു രൂപത്തിനെ കഷണങ്ങളാക്കി മറ്റൊരു രൂപമാക്കി അടുക്കിയാൽ പരപ്പളവു മാറുന്നില്ല. പരപ്പളവു മാറാതെ രൂപം മാറ്റുന്ന ഒരു രീതിയിൽ നിന്ന്, മുറിച്ചു ചേർത്തു വയ്ക്കുന്ന ഒരു രീതി എപ്പോഴും കിട്ടണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ചതുർഭുജത്തെ പരപ്പളവു മാറാതെ ത്രികോണമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ച്, കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു ചതുർഭുജത്തെ മുറിച്ചടുക്കി ത്രികോണമാക്കാൻ കഴിയില്ല.

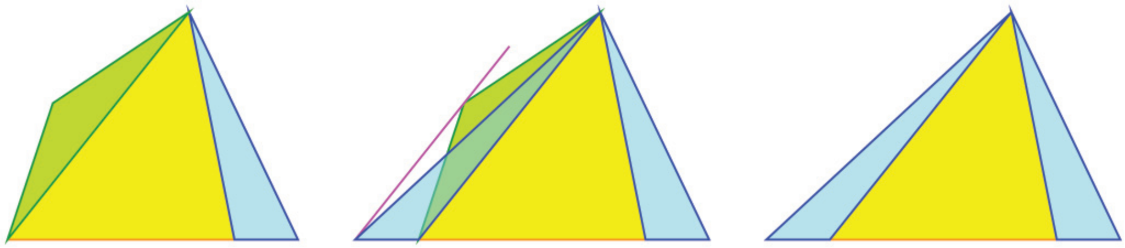
ഇങ്ങനെ മുറിച്ചെടുക്കുന്ന രീതികൾ വിശദീകരിക്കുന്ന പല വെബ്സൈറ്റുകളുടേയും വിവരങ്ങൾ www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html എന്ന വെബ്പേജിലുണ്ട്.

ജിയോജിബ്രയിൽ ചതുർഭുജം, പഞ്ചഭുജം, ഷഡ്ഭുജം തുടങ്ങിയ രൂപങ്ങൾ വരച്ച് അവയ്ക്ക് തുല്യ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ നിർമിക്കുക.

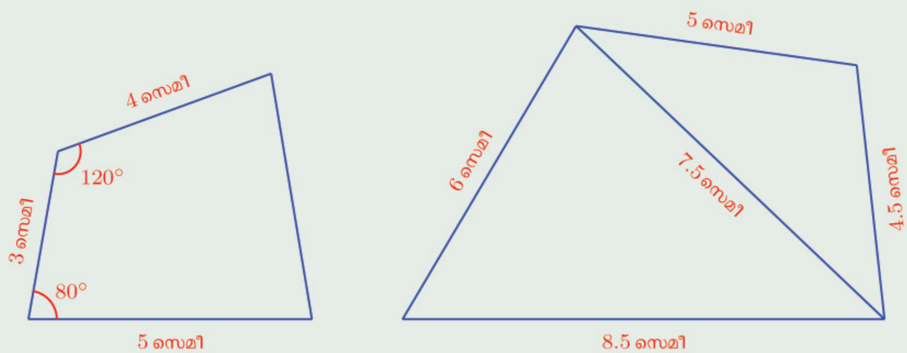
ഇനി പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകൾ മൂല എതിർവശത്തിനു സമാന്തരമായി നീക്കി പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പാദത്തിലെത്തിച്ചാൽ, പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ അതേ പരപ്പളവുള്ള ചതുർഭുജമായി.



ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഇടതുമുകൾ മൂലയും ഇതുപോലെ താഴ്ത്തിയാൽ ഇതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമാകും.



(1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങളും നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങളും വരച്ച്, പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക. (അതിനാവശ്യമായ നീളങ്ങൾ അളന്നെടുക്കണം)

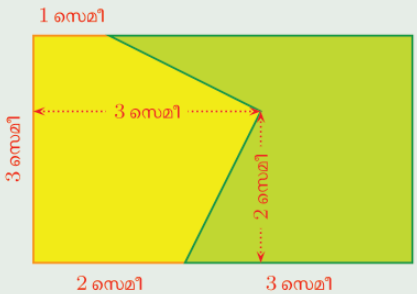


(2) ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 60° യുമായ സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവിനു തുല്യ പരപ്പളവുള്ള മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു സമപഞ്ചഭുജം വരച്ച്, അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

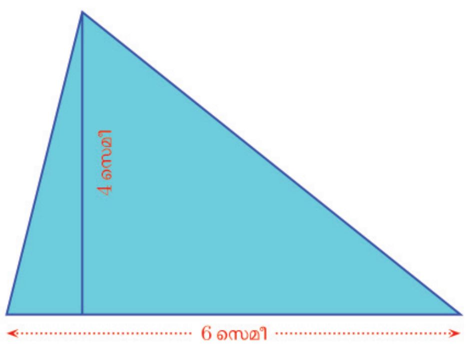
(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുരത്തിനെ രണ്ടായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

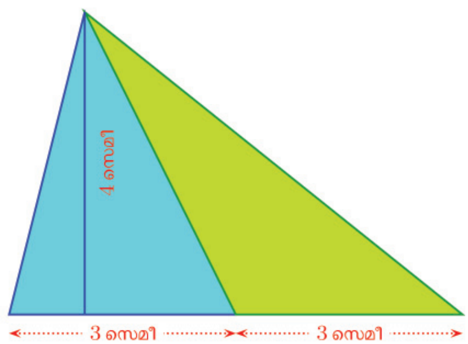
ഈ ഭാഗങ്ങളെ വേർതിരിക്കുന്ന ഒടിഞ്ഞ വരയ്ക്കു പകരം ഒരു നേർവര വരച്ച്, ചതുരത്തിനെ ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മറ്റു രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുക. ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



ത്രികോണഭാഗം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.





ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയും, എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അതിനെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നു.

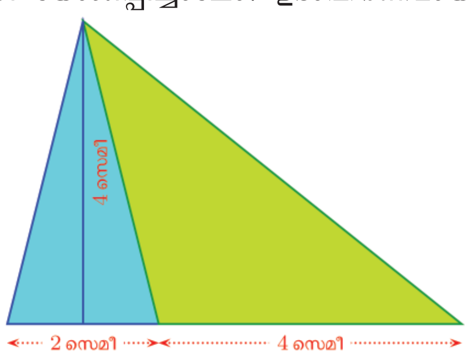
ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

രണ്ടിന്റെയും പാദം 3 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

ഉയരമോ? രണ്ടിനും 4 സെന്റിമീറ്റർതന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവും ഒന്നുതന്നെ: 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി മുകളിലെ മൂല താഴത്തെ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക.



ഇപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 4 ഉം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 8 ഉം ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററായി.

അതായത്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. താഴത്തെ വശത്തിനെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നതും ഇതേ കണക്കിലല്ലേ? ചെറിയ കഷണത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ കഷണത്തിന്റെ നീളം.

ഇക്കാര്യം അംശബന്ധമായി പറഞ്ഞാലോ?

താഴത്തെ വശത്തെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നത് 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നതും അതേ അംശബന്ധത്തിൽ.

മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള വര, താഴത്തെ വശത്തിനെ എങ്ങനെ ഭാഗിച്ചാലും ഇതു ശരിയാകുമോ? 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

നീളങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും:

ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $6 \times \frac{2}{5}$ സെന്റിമീറ്റർ

വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $6 \times \frac{3}{5}$ സെന്റിമീറ്റർ

പരപ്പളവുകൾ ഇങ്ങനെയും:

ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times \frac{2}{5} \times 2 = 12 \times \frac{2}{5}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times \frac{3}{5} \times 2 = 12 \times \frac{3}{5}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

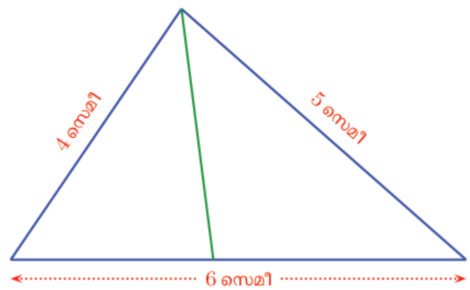
അതായത്, മുകളിൽ നിന്നുള്ള വര, മുഴുവൻ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവായ 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിനെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്.

നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ഏതായാലും, അത് പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണെന്നു കാണമല്ലോ. ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകൾ മാറിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞതിന് മാറ്റമില്ല.

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതു മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വര, ഈ വശത്തിന്റെ നീളത്തെയും, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്.

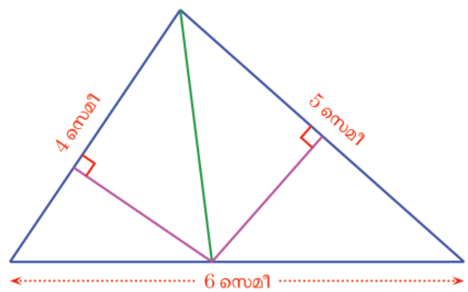
ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നിന്നു വരയ്ക്കുന്ന എതിർവശത്തിന്റെ സമഭാജി, ത്രികോണത്തെയും സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്നു കണ്ടു. അപ്പോൾ

വേറൊരു ചോദ്യമാകാം: ഒരു മൂലയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി, എതിർ വശത്തെ (ത്രികോണത്തെയും) ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്?



ചിത്രത്തിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി വരച്ചിരിക്കുന്നു.

താഴത്തെ വശത്തിനെ കോൺസമഭാജി മുറിക്കുന്ന അംശബന്ധമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്.



ഇവിടെ ത്രികോണഭാഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ഒരു വശം അറിയാം. അപ്പോൾ ഈ വശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ കണ്ടു പിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. അതിന് എതിർമൂലയിൽ നിന്ന് ലംബം വരയ്ക്കണം. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും, അറിയാവുന്ന വശത്തിന്റെ എതിർമൂല ഒരേ ബിന്ദുവാണല്ലോ.

ഈ ലംബങ്ങൾ കണ്ടിട്ട് ഒരേ നീളമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്ന് നോക്കാം. ചിത്രത്തിൽ മുകൾ ഭാഗത്ത് ഇടതും വലതുമുള്ള മട്ട ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കർണമാണ്. ഈ കർണം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി ആയതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മുകളിലെ രണ്ട് കോണുകളും തുല്യമാണ്; മട്ടത്രികോണമായതിനാൽ കർണത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റത്തുള്ള കോണുകളും തുല്യം തന്നെ. അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളും തുല്യമാകണമല്ലോ. അതായത്, നമ്മൾ വരച്ച ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

അപ്പോൾ ത്രികോണഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ, 4 നെയും 5 നെയും ഈ നീളത്തിന്റെ പകുതികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്; അതായത്, അവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 5.

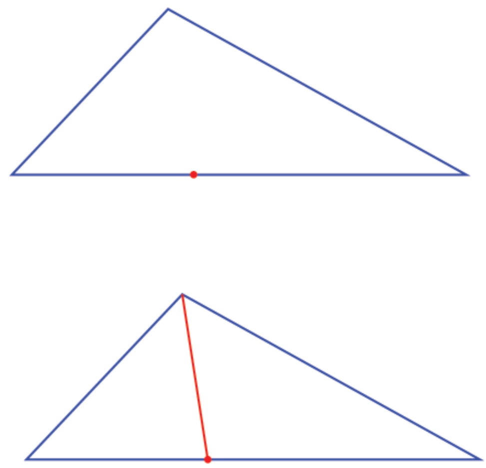
നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, കോൺസമഭാജി എതിർവശത്തിന്റെ നീളത്തെ ഭാഗിക്കുന്നതും ഇതേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായാലും, ഇതു ശരിയാകും.

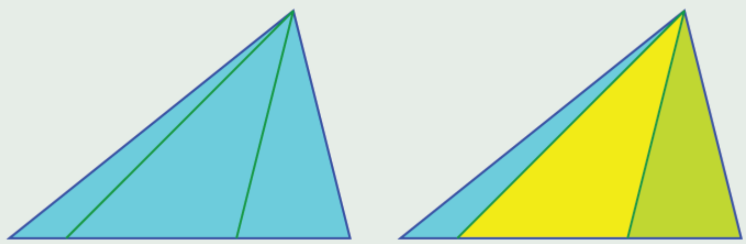
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതു കോണിന്റെയും സമഭാജി എതിർ വശത്തെ ഭാഗിക്കുന്നത്, കോണിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറയാം:

ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്ത് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദു, ആ വശത്തിനെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, മുകളിലത്തെ കോണിന്റെ സമഭാജി ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകണം. അതായത്, മേൽമൂലയും ഈ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയാണ് മേൽക്കോണിന്റെ സമഭാജി.

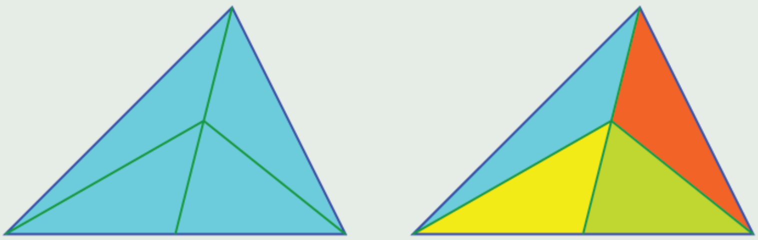


(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾ മൂലയിൽ നിന്ന് താഴത്തെ വശത്തിലേക്ക് രണ്ടു വരകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



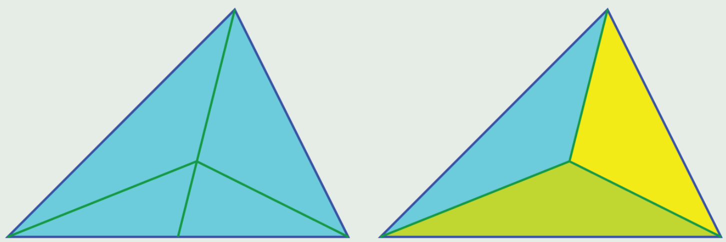
വരകൾ താഴത്തെ വരയുടെ നീളത്തെ ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധവും, ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റെ അംശബന്ധവും ഒന്നു തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ച ശേഷം, ഈ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവുമായി മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ നാലിലൊന്നാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

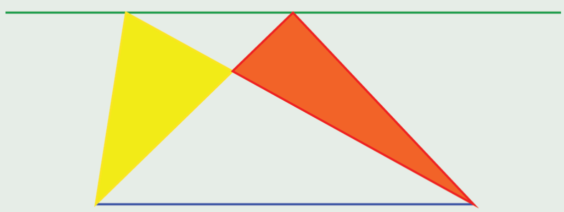
(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചശേഷം, ഈ വരയെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമായി മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



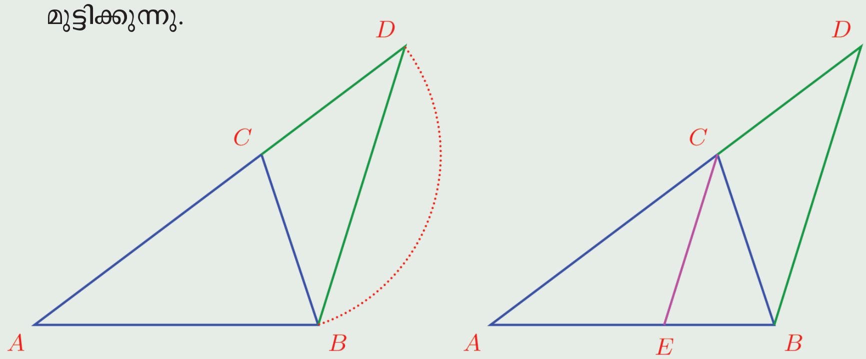
രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും കോണിന്റെ വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബദൂരങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ചിത്രത്തിൽ താഴെയും മുകളിലും വിലങ്ങനെയുള്ള വരകൾ സമാന്തരമാണ്. മഞ്ഞയും ചുവപ്പും ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



(6) ചിത്രത്തിൽ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ AC എന്ന വശം, CB എന്ന വശത്തിന്റെ നീളവും ചേർത്ത് D യിലേയ്ക്ക് നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. തുടർന്ന്, DB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി C യിൽക്കൂടി വര വരച്ച്, AB യിലെ E യിൽ മുട്ടിക്കുന്നു.

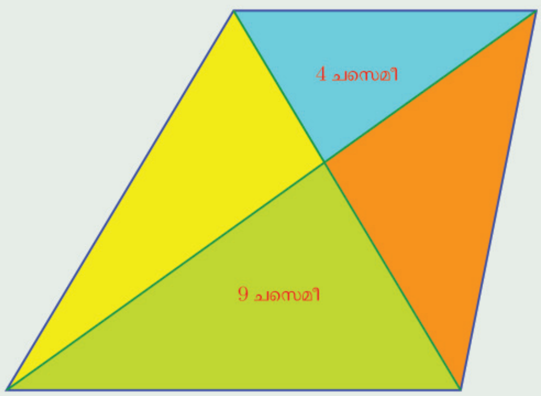


i) CE എന്ന വര, $\angle C$ യെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 8 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയെ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

iii) 8 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ ഇതുപയോഗിക്കാൻ കഴിയുമോ? എങ്ങനെ?

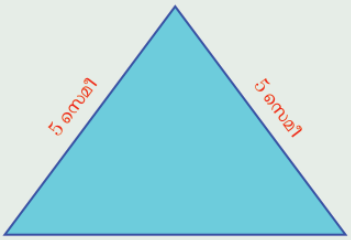
(7) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു:



നീല ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രസെന്റീമീറ്ററും, പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 9 ചതുരശ്രസെന്റീമീറ്ററുമാണ്. ലംബകത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവെത്രയാണ്?

(8) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റീമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(9) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനു തുല്യ പരപ്പളവുള്ള മറ്റു ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു. • ഒരു ബഹുഭുജത്തെ പരപ്പളവ് മാറാതെ മറ്റു ബഹുഭുജങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങൾ സമർഥിക്കുന്നു. • ബഹുഭുജങ്ങളെ ത്രികോണങ്ങളാക്കി മാറ്റി, പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നു. • ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ വിവിധ അംശബന്ധങ്ങളിൽ ഭാഗിക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നു. • പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണുന്നു.			

2 ഭിന്നസംഖ്യകൾ

തുല്യഭിന്നങ്ങൾ

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെത്തന്നെ പലതരത്തിൽ എഴുതാമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ; ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

ഇവിടെ $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, . . . എന്നിവയെല്ലാം $\frac{1}{2}$ ന്റെ വ്യത്യസ്ത രൂപങ്ങളാണ്. ഇവയെല്ലാം $\frac{1}{2}$ നു തുല്യമായ ഭിന്നങ്ങളാണെന്നും പറയാം.

ഇതുപോലെ

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \ldots$$

ആയതിനാൽ $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{15}$, . . . ഇവയെല്ലാം $\frac{3}{5}$ ന്റെ പല രൂപങ്ങളാണ്;

അഥവാ $\frac{3}{5}$ നു തുല്യമായ ഭിന്നങ്ങളാണ്.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഒരേ എണ്ണൽസംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ പല രൂപങ്ങൾ, അല്ലെങ്കിൽ അതിനു തുല്യമായ ഭിന്നങ്ങൾ, കിട്ടുന്നു.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

$\frac{a}{b}$ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയും n ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയുമാണെങ്കിൽ

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$$

ഇനി ചില സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി

$$\frac{1^2 + 1}{1 + 1} = 1 \qquad \frac{2^2 + 2}{2 + 1} = 2 \qquad \frac{3^2 + 3}{3 + 1} = 3$$

ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമോ? ഉദാഹരണമായി $\frac{138^2+138}{138+1}$ എന്നത് 138 തന്നെയാണോ?

വർഗം കണക്കാക്കി, കൂട്ടി ഹരിച്ച് പരിശോധിക്കാം; അതിലൊരു രസമില്ല. മാത്രമല്ല, അങ്ങനെ ചെയ്തതുകൊണ്ട്, എന്തുകൊണ്ടിങ്ങനെ എന്നറിയുന്നുമില്ല.

പകരം അംശമൊന്നു മാറ്റിയെഴുതാം.

$$138^2 + 138 = 138\,(138 + 1)$$

ഇനി ഛേദവും ചേർത്തെഴുതിയാൽ,

$$\frac{138^2+138}{138+1} = \frac{138(138+1)}{138+1} = 138$$

ഈ രീതി ഇത്തരമേതു ഭിന്നസംഖ്യയിലും പ്രയോഗിക്കാമല്ലോ.

ഇത് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് എഴുതാം:

n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും $\frac{n^2+n}{n+1} = \frac{n\,(n+1)}{n+1} = n$

ചുവടെയുള്ള ക്രമങ്ങൾ ഓരോന്നും എന്തുകൊണ്ട് ശരിയാകുന്നു എന്നു വിശദീകരിക്കുക, പൊതുതത്വം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുക.

(1) $\frac{1^2+1}{1+1} = 1$ $\quad \frac{2^2+2}{2+2} = 1\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3^2+3}{3+3} = 2$ $\quad \frac{4^2+4}{4+4} = 2\frac{1}{2}$

(2) $\frac{2^2-2}{2-1} = 2$ $\quad \frac{3^2-3}{3-1} = 3$ $\quad \frac{4^2-4}{4-1} = 4$ $\quad \frac{5^2-5}{5-1} = 5$

(3) $\frac{2^2-1}{2-1} = 3$ $\quad \frac{3^2-1}{3-1} = 4$ $\quad \frac{4^2-1}{4-1} = 5$ $\quad \frac{5^2-1}{5-1} = 6$

എതിർഗുണനം

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഒരേ എണ്ണൽസംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, അതിന്റെ മറ്റൊരു രൂപം കിട്ടും; എന്നാൽ, ഒരേ ഭിന്ന സംഖ്യയുടെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു രൂപങ്ങൾ തമ്മിൽ ഇത്തരമൊരു ബന്ധമുണ്ടാകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ആണ്, പക്ഷേ 2 നെയും 4 നെയും ഒരേ എണ്ണൽസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 3 ഉം 6 ഉം ആക്കാൻ പറ്റില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകൾ തുല്യമാണോ എന്ന് എങ്ങനെ പരിശോധിക്കും?

അംശത്തിലെയും ഛേദത്തിലെയും പൊതുഘടകങ്ങൾ മാറ്റി, ലഘുരൂപത്തിലാക്കുകയാണ് ഒരു വഴി:

ഉദാഹരണമായി, $\frac{42}{63}$ ഉം $\frac{70}{105}$ ഉം നോക്കാം:

$$\frac{42}{63} = \frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{70}{105} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{2}{3}$$

അപ്പോൾ $\frac{42}{63}$ ഉം $\frac{70}{105}$ ഉം $\frac{2}{3}$ ന്റെ തന്നെ രണ്ടു രൂപങ്ങളാണ്.

വലിയ സംഖ്യകളെ ഘടകങ്ങളാക്കുക (കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ചാൽപ്പോലും) അത്ര എളുപ്പമല്ല; അപ്പോൾ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ തുല്യത പരിശോധിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗം നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\frac{119}{221}$ ഉം $\frac{133}{247}$ ഉം എടുക്കാം. ഇവയ്ക്ക് ഒരേ ഛേദമുള്ള രൂപങ്ങളുണ്ടല്ലോ. (അഞ്ചാംക്ലാസിൽ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൂട്ടാൻ, ഒരേ ഛേദമാക്കിയത് ഓർമയില്ലേ?)

$$\frac{119}{221} = \frac{119 \times 247}{221 \times 247}$$

$$\frac{133}{247} = \frac{133 \times 221}{247 \times 221}$$

ഈ പുതിയ രൂപങ്ങളുടെ ഛേദം ഒന്നുതന്നെയാണ്; അപ്പോൾ തുല്യമാണോ എന്നറിയാൻ, അംശങ്ങൾ തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി.

അതായത് 119×247 എന്ന ഗുണനഫലവും, 133×221 എന്ന ഗുണനഫലവും തുല്യമാണോ എന്നു പരിശോധിച്ചാൽ മതി. ഒരു കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്, ഇത് പെട്ടെന്നു ചെയ്യാം.

$$119 \times 247 = 29393$$

$$133 \times 221 = 29393$$

അംശവും ഛേദവും തുല്യമായതിനാൽ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ തുല്യമാണ്;

$$\frac{119}{221} = \frac{133}{247}$$

ഈ ചെയ്തതെല്ലാം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതാം. $\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകൾ തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കാൻ, ആദ്യം ഒരേ ഛേദമായ രൂപങ്ങളിലാക്കുക:

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

ഇനി തുല്യമാണോ എന്നറിയാൻ അംശങ്ങളായ aq, bp ഇവ തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി.

മറിച്ച്, a, b, p, q എന്ന ഏതെങ്കിലും നാല് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ aq, bp എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു കരുതുക.

അപ്പോൾ $\frac{aq}{bq}$, $\frac{bp}{bq}$ എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ അംശങ്ങളും ഛേദങ്ങളും തുല്യമാണ്; അതിനാൽ

$$\frac{aq}{bq} = \frac{bp}{bq}$$

എന്നു കിട്ടും, തുടർന്ന് രണ്ടിലും അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും പൊതുഘടകങ്ങൾ മാറ്റി

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

എന്നും കാണാം.

> ***a, b, p, q* എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ആണെങ്കിൽ $aq = bp$**
>
> **മറിച്ച്, $aq = bp$ ആണെങ്കിൽ $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$**

ഈ രീതിയിൽ ഭിന്നങ്ങളുടെ തുല്യതയിൽനിന്ന്, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുല്യതയിലേക്ക് എത്തുന്നതിനെ എതിർഗുണനം (cross multiplication) എന്നു പറയാറുണ്ട്.

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{p}{q}$$

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ രണ്ടു രൂപങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റനേകം രൂപങ്ങളുണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2}$ ന്റെ മറ്റൊരു രൂപം $\frac{2}{4}$ ആണല്ലോ. ഇവയിലെ അംശങ്ങളും ഛേദങ്ങളും കൂട്ടിനോക്കൂ:

$$\frac{1+2}{2+4} = \frac{3}{6}$$

ഇതും $\frac{1}{2}$ ന്റെ തന്നെ മറ്റൊരു രൂപമല്ലേ?

ഇനി $\frac{1}{2}$ ഉം $\frac{3}{6}$ ഉം എടുത്ത് ഈ ക്രിയ ചെയ്താലോ?

$$\frac{1+3}{2+6} = \frac{4}{8}$$

$\frac{1}{2}$ ന്റെ മറ്റൊരു രൂപം കിട്ടിയില്ലേ?

$\frac{2}{4}$ ഉം, $\frac{3}{6}$ ഉം എടുത്തും ഇതു ചെയ്യാം.

$$\frac{2+3}{4+6}=\frac{5}{10}$$

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇത് ശരിയാകുന്നത്?

സംഖ്യാബന്ധങ്ങളുടെ ഉള്ളറിയാൻ ബീജഗണിതം വേണം.

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$$

എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. $\frac{a+p}{b+q}$ എന്ന ഭിന്നവും എന്തുകൊണ്ട് ഇവയ്ക്ക് തുല്യമാകുന്നു എന്നാണ് അറിയേണ്ടത്.

$\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ ഇവ തുല്യമായതിനാൽ,

$$aq = bp$$

ഇനി $\frac{a+p}{b+q}$ എന്ന ഭിന്നവും $\frac{a}{b}$ എന്ന ഭിന്നവും തുല്യമാകണമെങ്കിൽ, എതിർഗുണനമനുസരിച്ച്, $(a+p)b$ എന്ന ഗുണനഫലവും $(b+q)\,a$ എന്ന ഗുണനഫലവും തുല്യമാകണം, ഓരോന്നായി നോക്കാം.

$$(a+p)\,b = ab + pb$$
$$(b+q)\,a = ba + qa$$

ab, ba ഇവ ഒന്നുതന്നെയാണല്ലോ, അപ്പോൾ രണ്ടു ഗുണനഫലത്തിന്റെയും അവസാനമെഴുതിയ രൂപത്തിൽ ab ഉണ്ട്. ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലത്തിൽ പിന്നെയുള്ളത് pb; രണ്ടാമത്തേതിൽ qa. ഇതിൽ pb എന്നത് bp യും qa എന്നത് aq യും ആണ്. ഇവ തുല്യമാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടു. അപ്പോൾ ഗുണനഫലങ്ങൾ തുല്യമായില്ലേ?

ഒരു ജോടി തുല്യഭിന്നങ്ങളിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ജോടി തുല്യഭിന്നങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം: ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$$

ഈ ഭിന്നങ്ങളുടെ അംശ-ഛേദങ്ങളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും ഉപയോഗിച്ച് പുതിയ ഭിന്നങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം:

$$\frac{5+2}{5-2}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{10+4}{10-4}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

മറ്റൊരു ജോടി നോക്കാം:

$$\frac{4}{2}=\frac{16}{8}$$

നിഷ്കളങ്കമായ ചോദ്യം

ആറാം ക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്ന അനിയൻ ചോദിക്കുന്നു: "$\frac{1}{2}$ ഉം $\frac{2}{4}$ ഉം ഒന്നു തന്നെയാണെന്നാണ് ടീച്ചർ പറഞ്ഞത്. 2 മിഠായികളിൽ നിന്ന് 1 എടുക്കുന്നതും 4 മിഠായികളിൽ നിന്ന് 2 എടുക്കുന്നതും ഒരുപോലെയല്ലല്ലോ. ആദ്യം ഒരു മിഠായിയല്ലേ കിട്ടിയുള്ളൂ?"

എന്താണ് നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം?

ഇതിൽ നിന്ന്

$$\frac{4+2}{4-2}=3$$

$$\frac{16+8}{16-8}=\frac{24}{8}=3$$

ഏതു ജോടി തുല്യഭിന്നങ്ങൾ എടുത്താലും ഇതുപോലെ അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും തുകയും വ്യത്യാസവും ഉപയോഗിച്ച് മറ്റൊരു ജോടി തുല്യ ഭിന്നങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ, $\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ ഇവ തുല്യമാണെങ്കിൽ, $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{p+q}{p-q}$ തുല്യ മാണോ എന്നാണ് ചോദ്യം.

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ എന്നെടുത്താൽ $aq = bp$ എന്നും കിട്ടും. ഇനി $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{p+q}{p-q}$ ഇവ തുല്യമാണോ എന്നറിയാൻ, എതിർഗുണനമനുസരിച്ച്, $(a + b) (p - q)$, $(a - b) (p + q)$ ഇവ തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി.

$$(a + b) (p - q) = ap - aq + bp - bq$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതു വാചകത്തിൽ $aq = bp$ എന്നതുപയോഗിച്ചാൽ, അത് $ap - bq$ ആയിച്ചുരുങ്ങും; അപ്പോൾ

$$(a + b) (p - q) = ap - bq$$

ഇതുപോലെ

$$(a - b) (p + q) = ap + aq - bp - bq$$

എന്നതിന്റെ വലതു വാചകവും $ap - bq$ ആകും; അതിനാൽ

$$(a - b) (p + q) = ap - bq$$

അങ്ങനെ $(a + b) (p - q)$ എന്ന സംഖ്യയും $(a - b) (p + q)$ എന്ന സംഖ്യയും $ap - bq$ എന്ന സംഖ്യതന്നെയാണ്; അപ്പോൾ

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{p+q}{p-q}$$

(1) ഒരു ജോടി തുല്യഭിന്നങ്ങളിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ജോടി ഉണ്ടാക്കുന്ന ഈ രീതി നോക്കൂ:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6} \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12} \rightarrow \frac{3}{9}=\frac{4}{12}$$

i) മറ്റു ചില തുല്യഭിന്നങ്ങളുടെ ജോടികൾ എടുത്തു നോക്കൂ; ഒന്നിന്റെ ഛേദവും, മറ്റൊന്നിന്റെ അംശവും പരസ്പരം മാറ്റിയാലും തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾതന്നെ കിട്ടുന്നുണ്ടോ?

ii) ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇക്കാര്യം ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതി, വിശദീകരിക്കുക.

(2) ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{(3 \times 1) + (4 \times 2)}{(3 \times 2) + (4 \times 4)} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{(3 \times 1) + (4 \times 3)}{(3 \times 2) + (4 \times 6)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

i) $\frac{1}{2}$ നു തുല്യമായ മറ്റു ചില ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്ത് ഇതുപോലെ അംശങ്ങളെയും ഛേദങ്ങളെയും 3 കൊണ്ടും 4 കൊണ്ടും ഗുണിച്ചു കൂട്ടിനോക്കുക; $\frac{1}{2}$ നു തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യതന്നെ കിട്ടുന്നുണ്ടോ?

ii) തുല്യമായ മറ്റു ചില ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ജോടികളെടുത്ത്, ഇതു ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

iii) ഈ കണക്കുകളിലെല്ലാം, അംശങ്ങളെയും ഛേദങ്ങളെയും 3 കൊണ്ടും 4 കൊണ്ടും ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്നതിന് പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കൂട്ടിനോക്കുക.

iv) $\frac{p}{q}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{a}{b}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, m, n എന്ന ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താലും $\frac{ma + np}{mb + nq}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{a}{b}$ യ്ക്കു തുല്യമാകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(3) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതിനെ, വർഗത്തിൽ നിന്ന് ഒന്നു കുറച്ചതുകൊണ്ട് ഹരിച്ചപ്പോൾ $\frac{221}{220}$ കിട്ടി. സംഖ്യ എന്താണ്?

(4) ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വർഗത്തിന്റെയും തുക, അവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ ഒന്നരമടങ്ങാണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?

വലുതും ചെറുതും

$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ ഇവയിൽ വലുത് ഏതാണ്?

$\frac{3}{5}$ ആണ് വലുത് എന്നു തീരുമാനിച്ചതെങ്ങനെ?

അഞ്ചു സമഭാഗങ്ങളിൽ 2 എണ്ണം ചേർന്നതാണ് $\frac{2}{5}$; ഇത്തരം ഭാഗങ്ങൾ 3 എണ്ണം ചേർന്നാലേ $\frac{3}{5}$ ആകുകയുള്ളു. അപ്പോൾ $\frac{3}{5}$ ആണ് വലുത്. ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കി എഴുതാം:

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഒരേ ഛേദമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളിൽ, വലിയ അംശമുള്ള സംഖ്യയാണ് വലുത്. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശം മാത്രം വലുതാക്കിയാൽ സംഖ്യ വലുതാകും. ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

മറിച്ച്, ഛേദം മാത്രം വലുതാക്കിയാലോ?

ഉദാഹരണമായി, $\frac{3}{4}$ ഉം $\frac{3}{5}$ ഉം എടുക്കാം.

4 സമഭാഗങ്ങളിൽ ഓരോന്നും, 5 സമഭാഗങ്ങളിൽ ഓരോന്നിനേക്കാൾ വലുതാണ്.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ഭാഗങ്ങൾ 3 എണ്ണമെടുത്താൽ, രണ്ടാമത്തെ ഭാഗങ്ങൾ 3 എണ്ണം എടുക്കുന്നതിനെക്കാൾ വലുതാണ്, അതായത് $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഒരേ അംശമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളിൽ, ചെറിയ ഛേദമുള്ള സംഖ്യയാണ് വലുത്. ഇത് ഇങ്ങനെയും പറയാം: ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ഛേദം മാത്രം ചെറുതാക്കിയാൽ സംഖ്യ വലുതാകും

ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{5}{9} < \frac{5}{8} < \frac{5}{7} < \frac{5}{6}$$

$\frac{3}{7}, \frac{4}{5}$ ഇവയിൽ വലുത് ഏതാണ്?

ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, $\frac{3}{7}$ നെ $\frac{3}{5}$ ആക്കിയാൽ വലുതാകും; $\frac{3}{5}$ നെ $\frac{4}{5}$ ആക്കിയാൽ വീണ്ടും വലുതാകും; അതായത്

$$\frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

ഇതുപോലെ $\frac{5}{6}$ ഉം $\frac{4}{9}$ ഉം എടുത്താൽ

$$\frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{5}{6}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശം വലുതാക്കുകയും ഛേദം ചെറുതാക്കുകയും ചെയ്താൽ, സംഖ്യ വലുതാകും.

ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{1}{10} < \frac{2}{9} < \frac{3}{7} < \frac{4}{5}$$

ഇനി $\frac{1}{2}$ ഉം $\frac{2}{3}$ ഉം നോക്കൂ: ഇവയിലേതാണ് വലുത്?

ഇതുവരെ കണ്ട മാർഗങ്ങളൊന്നും ഫലിക്കില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?)

രണ്ടു ഭിന്നങ്ങളുടെയും ഒരേ ഛേദമുള്ള രൂപങ്ങൾ നോക്കാം:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

ഇതിൽ വലിയ അംശമുള്ളതാണല്ലോ വലുത്; അതായത് $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$; വീണ്ടും പഴയ രൂപത്തിലാക്കിയാൽ $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

ഇതുപോലെ $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകളിൽ വലുത് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം ഒരേ ഛേദമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളാക്കണം:

$$\frac{3}{4} = \frac{21}{28} \qquad \frac{5}{7} = \frac{20}{28}$$

ഇതിലെ അംശങ്ങൾ മാത്രം നോക്കി $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച രീതി ഒരു പൊതുതത്വമായി ബീജഗണിതത്തിലെഴുതാം:

$\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$ ഇവയിൽ വലുത് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആദ്യം രണ്ടിനേയും ഒരേ ഛേദമുള്ള രൂപത്തിലാക്കണം:

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

അപ്പോൾ $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ ആണെങ്കിൽ $aq < bp$ ആണ്.

മറിച്ച് a, b, p, q എന്ന ഏതെങ്കിലും നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ $aq < bp$ ആണെന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ $\frac{aq}{bq}$, $\frac{bp}{bq}$ എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകളിൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ അംശം ചെറുതാണെന്നു വരും; ഇവയ്ക്ക് ഒരേ ഛേദമായതിനാൽ, ഇതിൽനിന്ന് $\frac{aq}{bq} < \frac{bp}{bq}$ എന്നു കാണാം. രണ്ടിലും അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും പൊതുഘടകങ്ങൾ മാറ്റിയാൽ, $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ എന്നു കിട്ടും.

***a, b, p, q* എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ ആണെങ്കിൽ $aq < bp$**

മറിച്ച് $aq < bp$ ആണെങ്കിൽ $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$

അതായത്, രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വലുപ്പച്ചെറുപ്പം അറിയാനും എതിർഗുണനം ഉപയോഗിക്കാമെന്നർഥം.

ഇനി ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം:

$\frac{2}{3}$ ന്റെ അംശത്തിലും ഛേദത്തിലും 1 കൂട്ടിയാൽ $\frac{3}{4}$ ആകും. ഇതിൽ $\frac{3}{4}$ ആണല്ലോ വലുത്.

മറ്റൊരു ഭിന്നം, ഉദാഹരണമായി $\frac{5}{9}$ എടുത്ത്, അംശത്തിലും ഛേദത്തിലും 1 കൂട്ടിയാൽ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ കിട്ടും; $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{5}$ ഇവയിൽ വലുതറിയാൻ, 5×5 ഉം 3×9 ഉം നോക്കിയാൽ മതിയല്ലോ; അപ്പോൾ $\frac{5}{9} < \frac{3}{5}$

ഇത് എല്ലാ ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകുമോ?

$\frac{4}{3}$ എടുത്താലോ? അംശവും ഛേദവും ഒന്നു കൂടിയാൽ $\frac{5}{4}$;

ഇനി $3 \times 5 < 4 \times 4$ ആയതിനാൽ $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$ എന്നും കിട്ടും.

ഇവിടെ സംഭവം മറിച്ചായി, നേരത്തെ എടുത്ത ഭിന്നസംഖ്യകളിൽനിന്ന് $\frac{4}{3}$ ന് എന്താണ് വ്യത്യാസം?

അപ്പോൾ ഈ കാര്യത്തെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി എന്താണ് ഊഹം?

അത് ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം.

a, b എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ $a < b$ എന്നു കരുതുക. $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ ആണോ എന്നാണ് പരിശോധിക്കേണ്ടത്. അതിന് $a(b+1), b(a+1)$ എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങൾ നോക്കണം.

$$a(b+1) = ab + a$$
$$b(a+1) = ba + b$$

$ba = ab$ ആണല്ലോ; അപ്പോൾ $ab + a$, $ab + b$ ഇവയിൽ വലുത് ഏതാണെന്നാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്.

a, b ഇവയിൽ വലുത് b; അപ്പോൾ ab എന്ന സംഖ്യയോട് b എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടിയത്, a കൂട്ടിയതിനേക്കാൾ വലുതാണ്. അതായത് $ab + a < ab + b$; അഥവാ, $a(b+1) < b(a+1)$. ഇതിൽ നിന്ന് $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ എന്നു കിട്ടും.

ഇനി $b < a$ എന്നെടുത്ത് ചെയ്തു നോക്കൂ:

$\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$ എന്നു കിട്ടിയില്ലേ?

മറ്റൊരു കണക്ക്: തുല്യമായ രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ അംശവും ഛേദവും കൂട്ടി, രണ്ടിനും തുല്യമായ മറ്റൊരു ഭിന്നം ഉണ്ടാക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. തുല്യമല്ലാത്ത രണ്ടു ഭിന്നങ്ങളിൽ ഈ ക്രിയ ചെയ്താലോ?

ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ എന്നറിയാം; അംശങ്ങളും ഛേദങ്ങളും കൂട്ടി നോക്കാം:

$$\frac{1+3}{2+4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ ഉം $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ ഉം ആണല്ലോ. അതായത്,

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

ഇത് എല്ലാ ഭിന്നങ്ങൾക്കും ശരിയാകുമോ? മറ്റു ചില ഭിന്നങ്ങളുടെ ജോടികൾ എടുത്ത് പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

ഇത് പൊതുവേ ശരിയാകുമോ എന്നറിയാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം; $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ $aq < bp$, ഇനി $\frac{a}{b}, \frac{a+p}{b+q}$ ഇവയിലെ വലുത് കണ്ടുപിടിക്കാൻ $a(b+q)$, $b(a+p)$ എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങൾ നോക്കണം.

$$a(b+q) = ab + aq$$

$$b(a+p) = ab + bp$$

$aq < bp$ ആയതിനാൽ $ab + aq < ab + bp$; അപ്പോൾ $a(b+q) < b(a+p)$

അതിനാൽ $\frac{a}{b} < \frac{a+p}{b+q}$ ഇതുപോലെ $\frac{a+p}{b+q} < \frac{p}{q}$ എന്നും കാണാമല്ലോ (ചെയ്തു നോക്കൂ.)

ഈ കണക്കിൽനിന്നും ആദ്യത്തെ കണക്കിൽനിന്നും കിട്ടിയ പൊതുതത്വങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ച് $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ എന്നു കണ്ടു. ഈ ഭിന്നങ്ങൾക്കിടയിൽ ഇത് വീണ്ടും പ്രയോഗിച്ചാൽ $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ എന്നു കാണാം. ഇത് എത്ര വേണമെങ്കിലും തുടരാമല്ലോ.

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ഭിന്നസംഖ്യകളിലും വലുത് ഏതെന്ന് ഗുണനക്രിയ ചെയ്യാതെ കണ്ടുപിടിക്കുക:

i) $\frac{13}{17}, \frac{14}{15}$ ii) $\frac{13}{17}, \frac{11}{18}$ iii) $\frac{14}{15}, \frac{11}{18}$

(2) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ഭിന്നസംഖ്യകളിലും വലുത് ഏതെന്ന് മനക്കണക്കായി പറയുക.

i) $\frac{3}{5}, \frac{8}{13}$ ii) $\frac{3}{5}, \frac{6}{11}$ iii) $\frac{101}{102}, \frac{98}{99}$

(3) i) $\frac{1}{3}$ നെക്കാൾ വലുതും $\frac{1}{2}$ നെക്കാൾ ചെറുതുമായ മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ii) ഛേദം 24 ആയ ഇത്തരം മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

iii) അംശം 4 ആയ ഇത്തരം മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(4) ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോടും ഛേദത്തിനോടും ഒരേ എണ്ണൽ സംഖ്യ കൂട്ടി മറ്റൊരു ഭിന്നമുണ്ടാക്കി.

i) ഏതു തരം ഭിന്നസംഖ്യയിൽ ഈ ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോഴാണ്, കുറേക്കൂടി വലിയ ഭിന്നസംഖ്യ കിട്ടുന്നത്?

ii) ഏതു തരം ഭിന്നസംഖ്യയിൽ ഈ ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോഴാണ് കുറേക്കൂടി ചെറിയ ഭിന്നസംഖ്യ കിട്ടുന്നത്?

ഭിന്നക്രിയകൾ

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ഇവയുടെ തുക എന്താണ്?

രണ്ടിനെയും $\frac{1}{6}$ കൾ ആക്കിയാണല്ലോ കൂട്ടുന്നത്:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}\ ;\ \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ ആയാലോ?

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}\ ;\ \frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$$

ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെ പൊതുവായ രീതി ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതാം. ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ എന്നെടുക്കാം. ആദ്യം രണ്ടിനെയും ഒരേ ഛേദമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളാക്കാം.

$$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \qquad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

ഇനി അംശങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ മതി:

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq}{bq} + \frac{bp}{bq} = \frac{aq+bp}{bq}$$

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ എന്ന ഏതു രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$$

ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) + (4 \times 2)}{4 \times 7} = \frac{29}{28} = 1\frac{1}{28}$$

രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതിയും ഇതുപോലെ എഴുതാം:

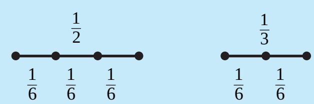
പ്രയോഗവും സിദ്ധാന്തവും

ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$$

എന്നാണല്ലോ. ഈ ക്രിയ അത്ര എളുപ്പമല്ല. എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ ആയത്? സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ചാണ് അവയെക്കുറിച്ചുള്ള ഗണിതസിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത് (മറിച്ചല്ല). ഉദാഹരണമായി, $\frac{1}{2}$ മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചരടും, $\frac{1}{3}$ മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചരടും ചേർത്തു വച്ചാൽ, ആകെ നീളം എത്രയാണ്?

$\frac{1}{2}$ മീറ്ററെന്നാൽ, മൂന്ന് $\frac{1}{6}$ മീറ്ററുകൾ ചേർന്നത്. $\frac{1}{3}$ മീറ്ററോ? രണ്ട് $\frac{1}{6}$ മീറ്ററുകൾ ചേർന്നത്.



ഇവ ചേർത്തു വച്ചാൽ, ആകെ അഞ്ച് $\frac{1}{6}$ മീറ്ററുകൾ, അതായത് $\frac{5}{6}$ മീറ്റർ. അപ്പോൾ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ ഇതുപോലുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ നിന്നാണ് ഇത്തരം എല്ലാ തുകയ്ക്കും ബാധകമായ ക്രിയാനിർവചനങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്.

$\frac{p}{q} < \frac{a}{b}$ എന്ന ഏതു രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq - bp}{bq}$$

ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) - (4 \times 2)}{4 \times 7} = \frac{13}{28}$$

അംശം 1 ആയ ഭിന്നസംഖ്യകളിൽ, ഈ ക്രിയകൾ വളരെ എളുപ്പമാണ്

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(1 \times b) + (1 \times a)}{ab} = \frac{b + a}{ab}$$

ഇതുപോലെ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$

ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} = \frac{11 + 9}{9 \times 11} = \frac{20}{99}$

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{11 - 9}{9 \times 11} = \frac{2}{99}$$

ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3}, \qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \times 4}$$

എന്നെല്ലാം കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

എന്നു കാണാം.

മറ്റൊരു ചോദ്യം

ഒരു പരീക്ഷയുടെ ചോദ്യക്കടലാസ്സിൽ A, B എന്ന രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുണ്ട്.

A യിൽ 2 ചോദ്യങ്ങളും, B യിൽ 3 ഉം.

ഒരാൾ A യിലേയും B യിലേയും ഓരോ ചോദ്യത്തിനുമാത്രമേ ഉത്തരമെഴുതിയുള്ളൂ. ഇയാൾ ആകെ ചോദ്യങ്ങളുടെ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ഭാഗത്തിന് ഉത്തരമെഴുതിയെന്നു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാണോ?

$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}$ എന്നിങ്ങനെ തുടർന്ന് $\frac{1}{99 \times 100}$ വരെ കൂട്ടിയാൽ എന്തു കിട്ടും?

ആദ്യം കണ്ട കണക്കുകളെത്തന്നെ ഇങ്ങനെയും എഴുതാം:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

അതായത്, അംശം 1 ആയ ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയെയും, അതേ തരത്തിലുള്ള രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ തുകയായി എഴുതാം. (അംശം 1 ആയ ഭിന്നങ്ങളെ ഏകാംശഭിന്നങ്ങൾ (unit fractions) എന്നു പറയാം)

അംശം 2 ആയ ഭിന്നങ്ങളെയെല്ലാം, വ്യത്യസ്തമായ മൂന്നു ഏകാംശഭിന്നങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

ഇനി ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഗുണനവും ഹരണവും നോക്കാം. രണ്ടു ഭിന്നങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമെന്നത്, അവയുടെ അംശങ്ങളെയും ഛേദങ്ങളെയും വെവ്വേറെ ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ എന്ന ഏതു രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq}$$

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെ മറ്റൊന്നുകൊണ്ടു ഹരിക്കുകയെന്നാൽ, ആദ്യത്തേതിനെ രണ്ടാമത്തേതിന്റെ വ്യുൽക്രമം കൊണ്ടു ഗുണിക്കലാണെന്നും അറിയാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

ഇതും ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതാം,

$\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$ എന്ന ഏതു രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$\frac{a}{b} \div \frac{p}{q} = \frac{aq}{bp}$$

ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad 2 + 2 = 4 \qquad 2 \times 2 = 4$$

തുക 1 ആയ മറ്റു രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകൾ എടുത്തു നോക്കാം:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \qquad 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

ഒരെണ്ണം കൂടി:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \qquad \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{25}{6} \qquad \frac{5}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$$

തുക 1 ആയ ഏതു ജോടി ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയും വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും തുല്യമാണോ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുനോക്കാം. $\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = 1$ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം.

അപ്പോൾ

$$\frac{aq + bp}{bq} = 1$$

ഭിന്നസംഖ്യ 1 ആണെങ്കിൽ, അംശവും ഛേദവും തുല്യമാകണം; അപ്പോൾ

$$aq + bp = bq$$

ഇനി വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ തുക നോക്കാം:

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{bp + aq}{ap}$$

$aq + bp = bq$ ആയതിനാൽ, സമവാക്യത്തിന്റെ വലതു വശത്തുള്ള ഭിന്നം $\frac{bq}{ap}$ ആകും; അതായത്,

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{bq}{ap}$$

വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമോ?

$$\frac{b}{a} \times \frac{q}{p} = \frac{bq}{ap}$$

അതായത്

$$\frac{b}{a} + \frac{q}{p} = \frac{b}{a} \times \frac{q}{p}$$

ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ഓരോന്നിലും പൊതുതത്വം കണ്ടുപിടിച്ച്, ബീജഗണിതത്തിലൂടെ വിശദീകരിക്കുക:

1) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2^2 - 1}$; $\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{2}{3^2 - 1}$; $\quad \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = \frac{2}{4^2 - 1}$

2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{1 \times 2}$; $\quad \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{2 \times 3}$;

$\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{3 \times 4}$

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ $\qquad \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\qquad \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ $\qquad \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{9}{20}$

4. $4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3$ $\qquad 4\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2} = 3$

$5\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} = 4$ $\qquad 5\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{3} = 4$

$6\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 5$ $\qquad 6\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{4} = 5$

ദശാംശരൂപങ്ങൾ

10, 100, 1000 തുടങ്ങിയ 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നങ്ങളുടെ ചുരുക്കെഴുത്താണല്ലോ ദശാംശരൂപം. ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{23}{100} = 0.23$$

$$\frac{327}{1000} = 0.327$$

$$\frac{3}{100} = 0.03$$

ചില ഭിന്നങ്ങളുടെ ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയല്ലെങ്കിലും, അത്തരത്തിലുള്ള രൂപത്തിൽ മാറ്റിയെഴുതാം, ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75$$

മറ്റു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം. $\frac{1}{8}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ? $8 = 2^3$ ആണല്ലോ; കൂടാതെ

$$10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$

എന്നെഴുതാം. അതായത്

$$1000 = 8 \times 125$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000} = 0.125$$

ഇതുപോലെ

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0.024$$

ഇനി $\frac{3}{160}$ ആയാലോ?

ആദ്യം ഛേദത്തിനെ ഘടകങ്ങളാക്കാം

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5 = 2^4 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 10$$

ഇതിനെ ഗുണിച്ച്, 10 ന്റെ ഏതു കൃതിയാക്കാം?

അതിന് ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കണം?

$2^4 \times 5^4 = 10^4$ ആണല്ലോ?

അതായത്,

$$160 \times 5^4 = (2^4 \times 10) \times 5^4 = 2^4 \times 5^4 \times 10 = 10^5 = 100000$$

അപ്പോൾ

$$\frac{3}{160} = \frac{3 \times 5^4}{160 \times 5^4} = \frac{3 \times 625}{100000} = \frac{1875}{100000} = 0.01875$$

ഇങ്ങനെ എല്ലാ ഭിന്നങ്ങളെയും ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

ഉദാഹരണമായി, $\frac{1}{3}$ ആയാലോ?

3 നെ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, 10 ന്റെ കൃതി കിട്ടുമോ? മറ്റൊരു വിധത്തിൽ ചോദിച്ചാൽ 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതിയിൽ 3 ഒരു ഘടകമാകുമോ?

10 ന്റെ അഭാജ്യഘടകങ്ങൾ 2 ഉം 5 ഉം മാത്രമാണല്ലോ; അതിനാൽ, 10 ന്റെ ഏതു കൃതിയുടെയും അഭാജ്യഘടകങ്ങൾ ഇവ രണ്ടും തന്നെ.

അപ്പോൾ 10 ന്റെ ഒരു കൃതിയുടെയും ഘടകമായി 3 ഉണ്ടാകില്ല; അതുകൊണ്ടുതന്നെ, $\frac{1}{3}$ ന് 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ രൂപമില്ല.

പക്ഷേ മറ്റൊരു കാര്യം ചെയ്യാം; 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഒരു നിരതന്നെ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന രീതിയിൽ ഉണ്ടാക്കാം.

അതിന് ആദ്യം $\frac{1}{3}$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം: $\frac{1}{3} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3}$

ഇതിൽ $\frac{10}{3}$ എന്നതിനെ $3 + \frac{1}{3}$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{10}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ ഒരു ഭിന്നം 10 ഛേദമായ $\frac{3}{10}$ ആണ്. ഇതും $\frac{1}{3}$ ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം.

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

ഇതുപോലെ $\frac{1}{3}$ നോട് കുറേക്കൂടി അടുത്ത, 100 ഛേദമായ ഭിന്നം ഉണ്ടാക്കാം അതിന് $\frac{1}{3}$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{3}$$

തുടർന്ന്, വലതുവശത്തുള്ള $\frac{100}{3}$ നെ $33 + \frac{1}{3}$ എന്നെഴുതിയാൽ

നീളത്തിന്റെ ദശാംശം

$\frac{1}{8}$ മീറ്റർ എന്നതിനെ കുറേക്കൂടി ചെറിയ അളവുപയോഗിച്ച് ഭിന്നമില്ലാതെ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ? ആദ്യം ഡെസിമീറ്റർ ($\frac{1}{10}$ മീറ്റർ) ഉപയോഗിച്ചു ശ്രമിക്കാം.

$\frac{1}{8}$ മീറ്റർ എന്നാൽ $\frac{10}{8}$ ഡെസിമീറ്റർ. അതായത് $1\frac{2}{8}$ ഡെസിമീറ്റർ. ഈ $\frac{2}{8}$ ഡെസിമീറ്ററിനെ സെന്റിമീറ്ററാക്കിപ്പറഞ്ഞാലോ? $\frac{20}{8}$ സെന്റിമീറ്റർ, അതായത് $2\frac{4}{8}$ സെന്റിമീറ്റർ. ഈ $\frac{4}{8}$ സെന്റിമീറ്ററിനെ മില്ലിമീറ്ററാക്കിയാലോ? $\frac{40}{8} = 5$ മില്ലിമീറ്റർ. അപ്പോൾ $\frac{1}{8}$ മീറ്റർ എന്നത് 1 ഡെസിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 5 മില്ലിമീറ്റർ. അതായത് 125 മില്ലിമീറ്റർ.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{100}\left(33 + \frac{1}{3}\right) = \frac{33}{100} + \frac{1}{300}$$

എന്നും, ഇതിനെ അൽപംമാറ്റിയെഴുതിയാൽ

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

എന്നും കാണാം

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000} = \frac{1}{30000}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം. അതായത്, $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളും $\frac{1}{3}$ ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കുറഞ്ഞു വരുന്നു; ഈ വ്യത്യാസം എത്ര വേണമെങ്കിലും ചെറുതാക്കാം. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

അവസാനിക്കാത്ത അളവുകൾ

$\frac{1}{3}$ മീറ്ററിനെ ഭിന്നമില്ലാതെ പറയുന്നതെങ്ങനെ? ഡെസിമീറ്ററാക്കിയാൽ $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ ഡെസിമീറ്റർ എന്നാണ് കിട്ടുന്നത്. $\frac{1}{3}$ ഡെസിമീറ്ററിനെ സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാലോ? വീണ്ടും $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ സെന്റിമീറ്റർ. $\frac{1}{3}$ സെന്റിമീറ്ററിനെ മില്ലിമീറ്ററാക്കിയാലോ? വീണ്ടും $3\frac{1}{3}$ മില്ലിമീറ്റർ. അപ്പോൾ $\frac{1}{3}$ മീറ്ററെന്നാൽ 3 ഡെസിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ, 3 മില്ലിമീറ്റർ, പിന്നെയൊരു $\frac{1}{3}$ മില്ലിമീറ്റർ. അതായത് $333\frac{1}{3}$ മില്ലിമീറ്റർ. ഒരു മില്ലിമീറ്ററിന്റെ $\frac{1}{1000}$ ഭാഗമായ മൈക്രോമീറ്റർ ഉപയോഗിച്ചാലോ? $333333\frac{1}{3}$ മൈക്രോമീറ്റർ.

വീണ്ടും വീണ്ടും പത്തുസമഭാഗങ്ങളാക്കിയാലും ഇത് അവസാനിക്കുമോ?

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി എഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

ഇതിലെ 0.333... എന്ന ദശാംശരൂപം, ഇതുവരെക്കണ്ട ദശാംശരൂപങ്ങളിൽ നിന്നു വ്യത്യസ്തമാണെന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം:

നേരത്തെ കണ്ട ദശാംശരൂപങ്ങളെല്ലാം, പത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയാണ്; ഇതാകട്ടെ, പത്തിന്റെ കൃതികൾ ഛേദങ്ങളായ ഭിന്നങ്ങളുടെ അവസാനിക്കാത്ത ഒരു നിര, ക്രമേണ സമീപിക്കുന്ന ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$\frac{1}{3}$ പോലുള്ള സംഖ്യകളെ ഉൾക്കൊള്ളാനായി, പുതിയൊരു ദശാംശരൂപം ഉണ്ടാക്കുകയാണ് ഇവിടെ ചെയ്യുന്നത്.

മറ്റൊരുദാഹരണം നോക്കാം. $\frac{1}{6}$ നും 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ തുല്യഭിന്നമില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?); ഇതിനെയും ഈ പുതിയ രീതിയിൽ എഴുതാൻ കഴിയുമോ എന്നു നോക്കാം.

$\frac{1}{3}$ ൽ ചെയ്തതുപോലെ ആദ്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{6}$$

$\frac{10}{6}$ നെ $\frac{5}{4}$ എന്നെഴുതാമെങ്കിലും, കാര്യങ്ങൾ വ്യക്തമാകാൻ, ലഘൂകരണം അവസാനമാക്കാം. ഇനി വലതുവശത്തുള്ള $\frac{10}{6}$ നെ $1 + \frac{4}{6}$ എന്നാക്കിയാൽ

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{10} + \frac{4}{60}$$

ഇതൽപം മാറ്റി

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്ത, 10 ഛേദമായ ഭിന്നം കിട്ടി. ഇനി കുറേക്കൂടി അടുത്ത, 100 ഛേദമായ ഭിന്നം കിട്ടാൻ, ഇങ്ങനെ തുടങ്ങാം

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{6}$$

ഇതിലെ വലതുവശത്തുള്ള $\frac{100}{6}$ നെ $16 + \frac{4}{6}$ എന്നു മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{100}\left(16 + \frac{4}{6}\right) = \frac{16}{100} + \frac{4}{600}$$

തുടർന്ന് ഇതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{1}{6} - \frac{16}{100} = \frac{4}{600} = \frac{1}{150}$$

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{16}{100} = \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{166}{1000} = \frac{1}{1500}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1666}{10000} = \frac{1}{15000}$$

എന്നെല്ലാം കിട്ടും.

അതായത്,

$\frac{1}{10}, \frac{16}{100}, \frac{166}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

$\frac{1}{3}$ ന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ ഇവിടെയും ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി, ദശാംശ രൂപമായി എഴുതാം:

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$$

ഈ ക്രിയകൾ ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ചുരുക്കിയെഴുതാം:

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} & \frac{1}{1000} \\
 & 0. & 1 & 6 & 6 \\
\hline
6 & 1. & 0 & 0 & 0 \\
 & & 6 & & \\
\cline{3-4}
 & & 4 & 0 & \\
 & & 3 & 6 & \\
\cline{3-5}
 & & & 4 & 0 \\
 & & & 3 & 6 \\
\cline{3-5}
 & & & & 4
\end{array}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{4}{60}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{16}{100} + \frac{4}{600}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{166}{1000} + \frac{4}{6000}$$

ഇതുപോലെ $\frac{2}{3}$ ചെയ്തു നോക്കാം:

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} & \frac{1}{1000} \\
 & 0. & 6 & 6 & 6 \\
\hline
3 & 2. & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 8 & & \\
\cline{2-4}
 & & 2 & 0 & \\
 & & 1 & 8 & \\
\cline{2-4}
 & & & 2 & 0 \\
 & & & 1 & 8 \\
\cline{2-5}
 & & & 2 & 0
\end{array}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{10} + \frac{2}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{66}{100} + \frac{2}{300}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{666}{1000} + \frac{2}{3000}$$

$$\frac{2}{3} = 0.666\ldots$$

മുമ്പു കണ്ട ഉദാഹരണങ്ങളിലെപ്പോലെ, $\frac{6}{10}, \frac{66}{100}, \frac{666}{1000}, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $\frac{2}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്നു എന്നാണ് ഇങ്ങനെ എഴുതുന്നതിന്റെ അർഥം

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടിയുണ്ട്. ആദ്യത്തെ ഹരണം മുതലേ ശിഷ്ടം 2 തന്നെ ആയതിനാൽ, തുടർന്നങ്ങോട്ട് ഹരണഫലമായി 6 തന്നെ ആവർത്തിക്കും എന്നു കാണാവുന്നതാണ്.

അതായത്, ഇത്തരമൊരു ക്രിയയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ശിഷ്ടം വീണ്ടും വന്നാൽ, ഹരണഫലത്തിൽ ആ സ്ഥാനം മുതലുള്ള അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കും. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{7}$ നോക്കാം.

$$\begin{array}{r|l}
 & \;1\;\;\; \tfrac{1}{10}\;\; \tfrac{1}{10^2}\;\; \tfrac{1}{10^3}\;\; \tfrac{1}{10^4}\;\; \tfrac{1}{10^5}\;\; \tfrac{1}{10^6} \\
 & 0.\;\;1\;\;4\;\;2\;\;8\;\;5\;\;7 \\ \hline
7 & 1.\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0 \\
 & \;\;\;\;7 \\ \hline
 & \;\;\;\;3\;\;0 \\
 & \;\;\;\;2\;\;8 \\ \hline
 & \;\;\;\;\;\;\;\;2\;\;0 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;1\;\;4 \\ \hline
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;6\;\;0 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5\;\;6 \\ \hline
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;4\;\;0 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;3\;\;5 \\ \hline
 & \;5\;\;0 \\
 & \;4\;\;9 \\ \hline
 & \;1
\end{array}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{3}{7 \times 10}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{14}{10^2} + \frac{2}{7 \times 10^2}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{142}{10^3} + \frac{6}{7 \times 10^3}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1428}{10^4} + \frac{4}{7 \times 10^4}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{14285}{10^5} + \frac{5}{7 \times 10^5}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{10^4} + \frac{4}{7 \times 10^4}$$

ഇനിയും തുടർന്നാൽ, 1, 4, 2, 8, 5, 7 എന്നീ അക്കങ്ങൾതന്നെ ഇതേ ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കും. (എന്തുകൊണ്ട്?)

അതിനാൽ

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$$

എന്നെഴുതാം

> ഇതുപോലെ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \dots$ ഇവയുടെയെല്ലാം ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക. അഞ്ചാംക്ലാസിലെ ഭാഗം **വയ്ക്കൽ** എന്ന പാഠത്തിൽ, **ചാക്രിക ഹരണം** എന്ന ഭാഗത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ക്രിയകളുമായി ഇവയ്ക്കെന്താണ് ബന്ധം?

ഇനി ഈ സംഖ്യകളുടെ നിര നോക്കുക: $\frac{49}{100}, \frac{499}{1000}, \frac{4999}{10000}, \dots$ ഇവ ഏതെങ്കിലും ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരുന്നുണ്ടോ?

$$\frac{1}{2} - \frac{49}{100} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{499}{1000} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4999}{10000} = \frac{1}{10000}$$

എന്നെല്ലാം കാണാൻ വിഷമമില്ല. അതായത്, ഈ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{2}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു. അപ്പോൾ പുതിയ ദശാംശരീതി അനുസരിച്ച്,

$$\frac{1}{2} = 0.4999...$$

എന്നും എഴുതാം.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

എന്ന ദശാംശരൂപം നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ.

ഇതുപോലെ 0.19, 0.199, 0.1999, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{5}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{1}{5}$ ന് 0.2 എന്ന പഴയ രൂപത്തിനു പുറമേ, 0.1999... എന്ന പുതിയ രൂപവുമുണ്ട്.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, പുതിയ ദശാംശരൂപങ്ങൾ അനുവദിച്ചപ്പോൾ, പഴയ രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരു പുതുരൂപവുംകൂടി കിട്ടുന്നു.

ഇനി 0.9, 0.99, 0.999, ... എന്നീ സംഖ്യകളെടുത്താലോ?

ഇവ അടുത്തടുത്തുവരുന്നത് 1 നോടല്ലേ?

അപ്പോൾ പുതിയ രീതിയനുസരിച്ച്

$$1 = 0.999...$$

എന്നും എഴുതാം.

(1) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നങ്ങൾ ഓരോന്നിനും തുല്യമായ 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നം കണ്ടുപിടിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക:

i) $\frac{1}{50}$ ii) $\frac{3}{40}$ iii) $\frac{5}{16}$ iv) $\frac{12}{625}$

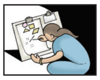
(2) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നങ്ങൾ ഓരോന്നിനും അടുത്തടുത്തുവരുന്ന 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക:

i) $\frac{5}{6}$ ii) $\frac{3}{11}$ iii) $\frac{23}{11}$ iv) $\frac{1}{13}$

(3) i) ഏതു സംഖ്യയുടെയും $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, ...$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭാഗങ്ങളെടുത്താൽ, അവ സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{9}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കുക.

ii) മുകളിൽ പറഞ്ഞ പൊതുതത്വം ഒരക്കസംഖ്യകളിൽ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ എന്നിവയുടെ ദശാംശരൂപങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. (ഇവിടെ $\frac{3}{9}, \frac{6}{9}$ ഇവ വിട്ടുകളഞ്ഞത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?)

iii) ഒരേയൊരു അക്കം ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന ദശാംശരൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് പൊതുവേ എന്തു പറയാം?

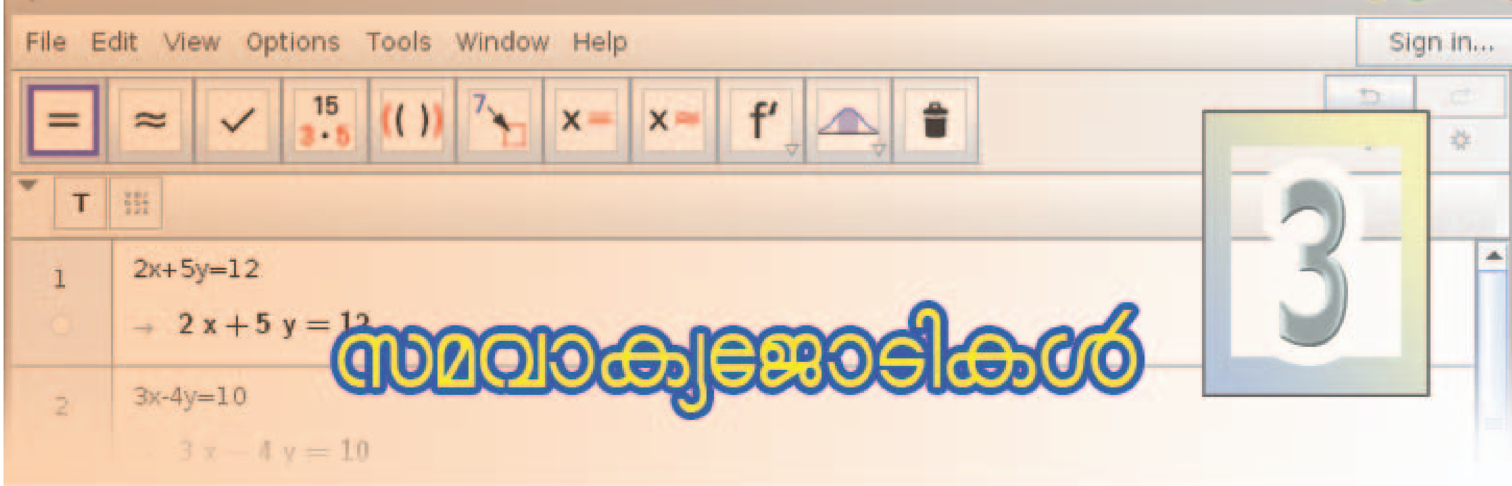


ഗവേഷണം

- ഏതൊരു ഭിന്നസംഖ്യയെയും ഏകാംശഭിന്നങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ? സമർഥിക്കുക?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ട് ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ തുല്യത പരിശോധിക്കുന്നതിനുള്ള വിവിധ മാർഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നു. • ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്ക് തുല്യമായ മറ്റു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങൾ സമർഥിക്കുന്നു. • രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നു. • ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സംഖ്യാക്രമങ്ങളെ ബീജഗണിതസഹായത്തോടെ സമർഥിക്കുന്നു. • ഭിന്നസംഖ്യകളെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			



3 സമവാക്യജോടികൾ

മനക്കണക്കും ബീജഗണിതവും

ആദ്യംതന്നെ ഒരു കണക്കാവാം.

> ഒരു ചെപ്പിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പുമായി 100 മുത്തുകളുണ്ട്; വെളുപ്പിനേക്കാൾ 10 കൂടുതലാണ് കറുപ്പ്; കറുപ്പെത്ര? വെളുപ്പെത്ര?

പലതരത്തിൽ ആലോചിക്കാം. കൂടുതലുള്ള 10 കറുത്ത മുത്തുകൾ തൽക്കാലം മാറ്റിവച്ചാൽ, ചെപ്പിൽ 90 മുത്തുകൾ; ഇതിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പും തുല്യം, അതായത് 45 വീതം. ഇനി മാറ്റിവച്ച കറുപ്പും കൂടിയെടുത്താൽ, കറുപ്പ് 55 ആകും; വെളുപ്പ് 45 തന്നെ

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). കറുത്ത മുത്തുകൾ x എണ്ണം എന്നെടുത്താൽ, വെളുത്ത മുത്തുകൾ $x - 10$; എല്ലാംകൂടി 100 ആയതിനാൽ

$$x + (x - 10) = 100$$

ഇതിൽനിന്ന് x മാത്രം വേർതിരിച്ചെടുക്കാം

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 100 \\ 2x &= 110 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

അങ്ങനെ, കറുത്ത മുത്തുകൾ 55 എന്നു കിട്ടും; 10 കുറച്ച് വെളുത്ത മുത്തുകൾ 45 എന്നും കാണാം.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു വഴിയുണ്ട്: കറുത്ത മുത്തുകൾ x എണ്ണം, വെളുത്ത മുത്തുകൾ y എണ്ണം എന്നെടുത്താൽ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യമാക്കാം.

$$x + y = 100$$

$$x - y = 10$$

ഇതിൽ നിന്ന് x ഉം y ഉം വേർതിരിച്ചെടുക്കുന്നതെങ്ങനെ?

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടിയാൽ, വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്ന്, ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ? (**മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **തുകയും വ്യത്യാസവും** എന്ന ഭാഗം)

തുകയിൽ നിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാൽ, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്നും കണ്ടു

അപ്പോൾ മുത്തുകണക്കിൽ

$$2x = (x + y) + (x - y) = 110$$

$$2y = (x + y) - (x - y) = 90$$

ഇനി $x = 55, y = 45$ എന്നും കാണാം

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു മേശയ്ക്കും കസേരയ്ക്കും കൂടി 5000 രൂപയാണ് വില. ഒരു മേശയ്ക്കും നാലു കസേരയ്ക്കും കൂടി 8000 രൂപയും. ഓരോന്നിന്റെയും വിലയെത്രയാണ്?

ആദ്യം മനസിൽത്തന്നെ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കാം. ഒരു മേശയും നാലു കസേരയുമായപ്പോൾ, വില 3000 രൂപ കൂടി. ഇതിനു കാരണം, മൂന്നു കസേരകൂടി വാങ്ങുന്നതുകൊണ്ടല്ലേ? അതായത്, മൂന്നു കസേരയുടെ വിലയാണ് കൂടുതൽ വന്ന 3000 രൂപ, അപ്പോൾ ഒരു കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ, മേശയുടെ വില 4000 രൂപ

ഇങ്ങനെയൊന്നും ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില x രൂപ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം; ഇനി അൽപമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, മേശയുടെ വില $5000 - x$ രൂപ എന്നു കാണാം. ഒരു മേശയും, നാലു കസേരയുമായാൽ $(5000 - x) + 4x$ രൂപ; ഇത് 8000 രൂപയാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതായത്,

$$(5000 - x) + 4x = 8000$$

ഇതിൽനിന്ന് x കണക്കാക്കാം:

$$5000 + 3x = 8000$$

$$3x = 3000$$

$$x = 1000$$

അങ്ങനെ കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ എന്നു കിട്ടും; മേശയുടെ വില $5000 - 1000 = 4000$ രൂപയെന്നും.

ആദ്യം ഒന്നുംതന്നെ ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില x രൂപ, മേശയുടെ വില y രൂപ എന്നെടുത്തും തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം;

$$x + y = 5000$$

$$4x + y = 8000$$

ഇനി ആദ്യത്തെ സമവാക്യമനുസരിച്ച്, y എന്ന സംഖ്യ x എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്നു കണക്കാക്കാം:

$$y = 5000 - x$$

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y യ്ക്കു പകരം $5000 - x$ ഉപയോഗിക്കാം:

$$4x + (5000 - x) = 8000$$

ഇത് കസേരയുടെ വില മാത്രം x എന്നെടുത്തു കിട്ടിയ പഴയ സമവാക്യംതന്നെയല്ലേ? ഇതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെപ്പോലെ വില രണ്ടും കണക്കാക്കാം.

ഒരു കണക്കുകൂടി;

> ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ $\frac{1}{2}$ കിട്ടി. ഛേദത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് $\frac{1}{3}$ ഉം. ഏതാണാ ഭിന്നസംഖ്യ?

ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാൻ പ്രയാസമുണ്ട്; അംശമോ ഛേദമോ x എന്നു മാത്രമെടുത്താലും ഏറെയൊന്നും മുന്നോട്ട് പോകില്ല. അംശം x ഉം ഛേദം y ഉം എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങളോരോന്നും സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

എതിർ ഗുണനമുപയോഗിച്ച്, ഇവ ഇങ്ങനെയെഴുതാം (**ഭിന്നസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം)

$$2(x + 1) = y$$

$$3x = y + 1$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യം പറയുന്നത് y എന്ന സംഖ്യയും $2(x + 1)$ എന്ന സംഖ്യയും തുല്യമാണെന്നാണ്; അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y യ്ക്കു പകരം $2(x + 1)$ എഴുതാം. അതായത്

$$3x = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 3$ എന്നു കാണാം. തുടർന്ന് ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $y = 2 \times 4 = 8$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{3}{8}$ ആണ് കണക്കിലെ ഭിന്നസംഖ്യ.

ചുവടെപ്പറയുന്ന കണക്കുകളോരോന്നും മനക്കണക്കായോ, ഒരക്ഷരം മാത്രമുള്ള സമവാക്യമാക്കിയോ, രണ്ടക്ഷരമുള്ള രണ്ടു സമവാക്യമാക്കിയോ ചെയ്യുക.

(1) ചുറ്റളവ് ഒരു മീറ്ററായ ചതുരത്തിൽ, വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ അഞ്ചുസെന്റിമീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു ക്ലാസിൽ ആൺകുട്ടികളേക്കാൾ 4 പെൺകുട്ടികൾ കൂടുതലുണ്ട്. 8 ആൺകുട്ടികൾ മാത്രം വരാതിരുന്ന ഒരു ദിവസം , ആൺകുട്ടികളുടെ രണ്ട് മടങ്ങ് പെൺകുട്ടികളായി. ക്ലാസിൽ എത്ര പെൺകുട്ടികളും എത്ര ആൺകുട്ടികളുമാണ്?

(3) ഒരാൾ 10000 രൂപ ഭാഗിച്ച് രണ്ടു പദ്ധതികളിലായി നിക്ഷേപിച്ചു; 8 ശതമാനവും, 9 ശതമാനവുമാണ് വാർഷിക പലിശ നിരക്ക്. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞ് രണ്ടു പദ്ധതിയിൽനിന്നുമായി 875 രൂപ പലിശ കിട്ടി. ഓരോന്നിലും എത്ര രൂപയാണ് നിക്ഷേപിച്ചത്?

(4) മൂന്നര മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഒരു കഷണം വളച്ചൊരു സമചതുരവും, മറുകഷണം വളച്ചൊരു സമഭുജത്രികോണവുമുണ്ടാക്കണം. രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായിരിക്കണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം?

(5) ഒരു സെക്കന്റിൽ u മീറ്റർ എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടി, നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു, t സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $ut + \frac{1}{2}at^2$ ആണ്. ഇങ്ങനെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു 2 സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്ററും, 4 സെക്കന്റിൽ 28 മീറ്ററും സഞ്ചരിക്കുന്നു. യാത്രയുടെ തുടക്കത്തിൽ വേഗം എന്തായിരുന്നു? ഓരോ സെക്കന്റിലും വേഗം കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കെന്താണ്?

രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

> 2 പേനയ്ക്കും 3 നോട്ടുബുക്കിനും കൂടി 40 രൂപ. 2 പേനയ്ക്കും 5 നോട്ടുബുക്കിനുമാണെങ്കിൽ 60 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ്? ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെയോ?

നേരത്തെ ചെയ്ത കസേര-മേശ കണക്കുപോലെ ആലോചിച്ചു നോക്കൂ. ആദ്യം പറഞ്ഞ 40 രൂപയിൽനിന്ന് വില 60 രൂപയായി കൂടിയതെങ്ങനെ?

2 നോട്ടുബുക്ക് കൂടി വാങ്ങിയതുകൊണ്ടല്ലേ? അതായത്, 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വിലയാണ് കൂടുതലായ 20 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 10 രൂപ.

ഇനി ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽനിന്ന് 2 പേനയുടെ വില കിട്ടാൻ, 40 രൂപയിൽനിന്ന് മൂന്നു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില കുറച്ചാൽപ്പോരേ? അതായത്, $40 - 30 = 10$ രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ.

ഇനി, പേനയുടെ വില x രൂപ, നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില y രൂപ എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കി, ഇതു ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

2 പേനയുടെയും 3 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 40 രൂപ	$2x + 3y = 40$
2 പേനയുടെയും 5 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 60 രൂപ	$2x + 5y = 60$
കൂടുതലായത് 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
കൂടുതലായത് 20 രൂപ	$60 - 40 = 20$
2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 20 രൂപ	$2y = 20$
ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 10 രൂപ	$y = 10$
2 പേനയുടെ വില, 40 രൂപയിൽനിന്ന് 30 രൂപ കുറച്ചത്	$2x = 40 - (3 \times 10) = 10$
ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ	$x = 5$

അൽപം വ്യത്യസ്തമായ ഒരു കണക്ക് നോക്കൂ:

> 3 പെൻസിലിനും 4 പേനയ്ക്കും കൂടി 26 രൂപയാണ് വില. 6 പെൻസിലിനും 3 പേനയ്ക്കുമാണെങ്കിൽ 27 രൂപയും. പെൻസിലിന്റേയും പേനയുടേയും വില എത്രയാണ്?

ആദ്യം ബീജഗണിതമില്ലാതെ നോക്കാം. ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വില കൂടാൻ കാരണം, ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ, ഒരു സാധനം മാത്രം കൂടിയതുകൊണ്ടല്ല. അപ്പോൾ അതുപോലെ അത്ര എളുപ്പമല്ല ഇതിലെ കാര്യങ്ങൾ.

രണ്ടു വിവരങ്ങളിലും പെൻസിലോ, പേനയോ ഒരേ എണ്ണമായിരുന്നെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ ചെയ്യാമായിരുന്നു. അങ്ങനെയാക്കിയാലോ?

വിലകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതിവയ്ക്കാം.

പെൻസിൽ	പേന	വില
3	4	26
6	3	27

ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽ 3 പെൻസിലും, രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതിൽ 6 പെൻസിലുമാണ്. ആദ്യത്തേതിലും 6 പെൻസിൽതന്നെ ആക്കാൻ പറ്റുമോ?

6 പെൻസിലും, 8 പേനയുമായാലോ?

	പെൻസിൽ	പേന	വില
	3	4	26
×2	6	3	27
	6	8	52

മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ വരിയേക്കാൾ വില 25 രൂപ കൂടിയത്, 5 പേനയുടെ മാത്രം വിലയല്ലേ?

അപ്പോൾ, ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ. ഇനി ആദ്യത്തെ വരിയിൽ നിന്ന്, 3 പെൻസിലിന്റെ വില 26 – 20 = 6 രൂപ, ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില 2 രൂപ എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഇനി ഈ ചിന്തകളെല്ലാം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിനോക്കാം. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില x രൂപയെന്നും, ഒരു പേനയുടെ വില y രൂപയെന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിലെ വിവരങ്ങളും അതുപയോഗിച്ച് വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയുമെല്ലാം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

3 പെൻസിലിന്റെയും 4 പേനയുടെയും വില 26 രൂപ $\quad 3x + 4y = 26$

6 പെൻസിലിന്റെയും 3 പേനയുടെയും വില 27 രൂപ $\quad 6x + 3y = 27$

6 പെൻസിലിന്റെയും 8 പേനയുടെയും വില 52 രൂപ $\quad 6x + 8y = 2(3x + 4y) = 52$

കൂടുതലായത് 5 പേനയുടെ വില $\quad (6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$

കൂടുതലായത് 25 രൂപ $\quad 5y = 25$

ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ $\quad y = 5$

3 പെൻസിലിന്റെ വില 26 രൂപയിൽ 20 രൂപ കുറച്ചത് $\quad 3x = 26 - (4 \times 5) = 6$

ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില, 2 രൂപ $\quad x = 2$

ഈ ചെയ്തതെല്ലാം ചുരുക്കിയെഴുതാം. ആദ്യം കണക്കിൽ നിന്നു കിട്ടിയ വിവരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാം. അവയെ 1-ാം സമവാക്യമെന്നും, 2-ാം സമവാക്യമെന്നും വിളിക്കാം.

$$3x + 4y = 26 \qquad (1)$$

$$6x + 3y = 27 \qquad (2)$$

$3x + 4y$ എന്ന സംഖ്യ 26 ആണെന്നാണ് 1-ാം സമവാക്യം പറയുന്നത്; അപ്പോൾ അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 52.

$$6x + 8y = 52 \qquad (3)$$

ഇനി 2-ാം സമവാക്യവും, 3-ാം സമവാക്യവും ഉപയോഗിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 52 - 27$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച്

$$5y = 25$$

എന്നും അതിൽനിന്ന് $y = 5$ എന്നും കിട്ടും. തുടർന്ന് 1-ാം സമവാക്യത്തിൽ y ആയി 5 എടുത്താൽ x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$3x + (4 \times 5) = 26$$

$$3x = 26 - 20 = 6$$

$$x = 2$$

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ അഞ്ചു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും വെള്ളം നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോൾ 20 ലിറ്റർ. ചെറിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ മൂന്നു തവണയും നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോഴോ, 19 ലിറ്ററും. ഓരോ പാത്രത്തിലും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ x ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ y ലിറ്ററും കൊള്ളും എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളാക്കാം:

$$5x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിലെ (1) ലും $2x$ തന്നെയാക്കണമെങ്കിൽ, $\frac{2}{5}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; മറിച്ച്, (2) ൽ $5x$ ആക്കണമെങ്കിൽ $\frac{5}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം.

വ്യത്യസ്ത വിവരങ്ങൾ

രാമു 7 രൂപ കൊടുത്ത് ഒരു പെൻസിലും ഒരു പേനയും വാങ്ങി. അജു 4 പെൻസിലും 4 പേനയും വാങ്ങി; 28 രൂപയായി. ഈ വിവരങ്ങൾ വച്ചുകൊണ്ട് ഓരോന്നിന്റേയും വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇവർ ശ്രമിച്ചു. പെൻസിലിന്റെ വില x എന്നെടുത്ത് ആദ്യം പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച് പേനയുടെ വില $7 - x$ എന്നാക്കി.

രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച്

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

എന്നെഴുതി. ഇതു ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയതോ? $28 = 28$

ഇവിടെ, പെൻസിലിന്റെ വില x, പേനയുടെ വില y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിലോ?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

രണ്ടാമതെഴുതിയ സമവാക്യത്തിനെ

$$4(x + y) = 28$$

എന്നാക്കിയാൽ വീണ്ടും

$$x + y = 7$$

എന്നു തന്നെയല്ലേ കിട്ടുന്നത്?

അതായത്, ഈ കണക്കിൽ രണ്ടായിപ്പറഞ്ഞുവെങ്കിലും, വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം മാത്രമേ യഥാർത്ഥത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതുമാത്രം ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയില്ല.

കണക്കും കാര്യവും

10 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം. നീളം, വീതിയേക്കാൾ 5.5 മീറ്റർ കൂടുതലാകണം. നീളവും വീതിയും എത്രയാകണം?

വീതി x എന്നെടുത്താൽ, നീളം $x + 5.5$ ആകണം. ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററാകണം എന്നതിനാൽ

$$x+(x+5.5)=\frac{10}{2}=5$$

അതായത്,

$$2x+5.5=5$$

അഥവാ

$$2x=-0.5$$
$$x=-0.25$$

ഇത് ശരിയാകില്ലല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ അളവുകളെങ്ങനെ ന്യൂനസംഖ്യകളാകാം?

ഇതിന്റെ അർഥം, ഈ നിബന്ധനകൾ രണ്ടും ശരിയാകുന്ന തരത്തിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണ്. ഈ കണക്കിൽ വീതി x, നീളം y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ

$$x+y=5$$
$$y-x=5.5$$

ഇത് രണ്ടും ശരിയാകുന്ന അധിസംഖ്യകൾ ഇല്ലെന്ന് പെട്ടെന്ന് മനസിലാക്കാം. (രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക, അവയുടെ വ്യത്യാസത്തെക്കാൾ ചെറുതാകില്ലല്ലോ.)

ഇങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇല്ലാതെ ചെയ്യാനൊരു മാർഗമുണ്ട്. (1) ലും (2) ലും $10x$ ആക്കാം; അതിന് (1) നെ 2 കൊണ്ടും, (2) നെ 5 കൊണ്ടും ഗുണിച്ചാൽ മതി. സമവാക്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ മാറും.

$$(1) \times 2 : \; 10x + 4y = 40 \qquad (3)$$

$$(2) \times 5 : \; 10x + 15y = 95 \qquad (4)$$

ഇനി (4) ൽ നിന്ന് (3) കുറച്ച്

$$(4) - (3) : \; 11y = 55$$

എന്നും, അതിൽ നിന്ന്

$$y = 5$$

എന്നും കാണാം. തുടർന്ന്, ഇത് (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

അങ്ങനെ ചെറിയ പാത്രത്തിൽ 2 ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ 5 ലിറ്ററും കൊള്ളുമെന്നു കണക്കാക്കാം.

(1) രാജു ഇരുനൂറു പേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം ഏഴെണ്ണവും, നൂറുപേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം അഞ്ചെണ്ണവും വാങ്ങി. വില 107 രൂപ. ജോസഫ് ഇരുനൂറു പേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം അഞ്ചെണ്ണവും, നൂറുപേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം ഏഴെണ്ണവുമാണ് വാങ്ങിയത്. വില 97 രൂപയേ ആയുള്ളൂ. ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള നോട്ടുബുക്കുകളുടെ വില എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങും, മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 43 കിട്ടി. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങിൽനിന്ന്, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് 11. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(3) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആണ്. ഈ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ 27 കൂടുതലാണ്. സംഖ്യകൾ എന്താണ്?

(4) നാലു വർഷം മുമ്പ്, റഹിമിന്റെ പ്രായം, രാമുവിന്റ പ്രായത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങായിരുന്നു. രണ്ടു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ ഇത് രണ്ടു മടങ്ങാകും. അവരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ പ്രായം എത്രയാണ്?

(5) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 5 മീറ്റർ കൂട്ടുകയും, വീതി 3 മീറ്റർ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ, പരപ്പളവ് 5 ചതുരശ്രമീറ്റർ കുറയും. നീളം 3 മീറ്ററും, വീതി 2 മീറ്ററും കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 50 ചതുരശ്രമീറ്റർ കൂടും. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?

മറ്റു ചില സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

രണ്ടു സമചതുരങ്ങളിൽ, വലുതിന്റെ വശം ചെറുതിന്റെ വശത്തേക്കാൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്, വലുതിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറുതിന്റെ പരപ്പളവിനേക്കാൾ 55 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

വലുതിന്റെ ഒരു വശം x സെന്റിമീറ്ററെന്നും, ചെറുതിന്റെ ഒരു വശം y സെന്റിമീറ്റർ എന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$x - y = 5$$

$$x^2 - y^2 = 55$$

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ എന്നറിയാമല്ലോ. ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും എഴുതാം.

$$x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ചതുരക്കണക്കിൽ

$$x + y = \frac{55}{5} = 11$$

ഇപ്പോൾ $x + y = 11$ എന്ന തുകയും, $x - y = 5$ എന്ന വ്യത്യാസവും ആയില്ലേ? ഇനി സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$x = \frac{1}{2}(11 + 5) = 8$$

$$y = \frac{1}{2}(11 - 5) = 3$$

അതായത്, സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ, 8 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് $5\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, y മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചുറ്റളവ്, $2(x+y)$ മീറ്റർ, പരപ്പളവ് xy ചതുരശ്രമീറ്റർ, അപ്പോൾ കണക്കിലെ വിവരങ്ങൾ ഇങ്ങനെ സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$x + y = 5$$

$$xy = 5\frac{1}{4}$$

ഇനിയോ? ഇവയിൽനിന്ന് $x - y$ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$ എന്നറിയാമല്ലോ. ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിൽ

$$(x-y)^2 = 5^2 - \left(4 \times 5\frac{1}{4}\right) = 25 - 21 = 4$$

അപ്പോൾ $x - y = 2$ ഇനി, $x + y = 5$ എന്നതും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ $x = 3\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{2}$ അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, $3\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും,

?

(1) 10 മീറ്റർ നീളമുള്ള കയർ രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഓരോ കഷണംകൊണ്ടും സമചതുരമുണ്ടാക്കണം. അവയുടെ അകത്തുള്ള പരപ്പളവുകളുടെ വ്യത്യാസം $1\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാകണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം?

(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതിയേക്കാൾ 1 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്; അതിന്റെ പരപ്പളവ് $3\frac{3}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?

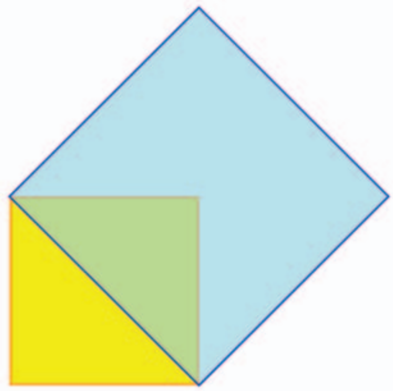
(3) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $6\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് $7\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ട് അളവുകളെക്കുറിച്ചുള്ള രണ്ടു വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, മനക്കണക്കായോ, ഒരു അക്ഷരം മാത്രമുള്ള ഒറ്റ സമവാക്യമാക്കിയോ, രണ്ട് അക്ഷരങ്ങളുള്ള ഒരു ജോടി സമവാക്യങ്ങളാക്കിയോ, അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നു.			

4 പുതിയ സംഖ്യകൾ

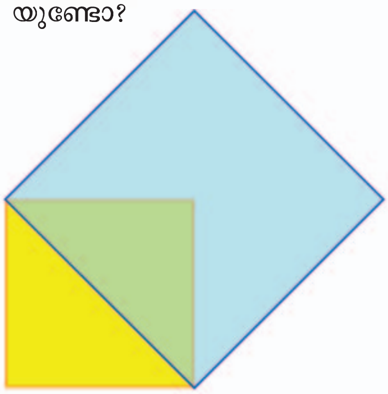
നീളങ്ങളും സംഖ്യകളും



ചിത്രം നോക്കൂ:

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം വശമായി മറ്റൊരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?



അതായത്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ഒരു മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്റർ.

അതിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളമെത്രയാണ്?

ഏതായാലും, ഒരു മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്; രണ്ടു മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവും (അതെങ്ങനെ?) ഒന്നിനും രണ്ടിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭിന്നസംഖ്യ ആകാം; പക്ഷേ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്ററായതിനാൽ, വശത്തിന്റെ നീളമായ ഈ സംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ടാകണം.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് രണ്ട്?

ഒന്നരയാകുമോ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

അത് കൂടുതലാണ്, ഒന്നേകാൽ ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

അത് കുറഞ്ഞുംപോയി. ഒന്നും മൂന്നിലൊന്നും ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

അതും കുറവ് തന്നെ; പക്ഷേ ഒന്നേകാലിനേക്കാൾ മെച്ചമാണ്.

ഇങ്ങനെ പല സംഖ്യകൾ ഊഹിച്ച് തെറ്റിയും തിരുത്തിയും ശ്രമിക്കുന്നതിനു പകരം, ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കിയാലോ?

വർഗം 2 ആകേണ്ട ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശമായ എണ്ണൽസംഖ്യയെ x എന്നും, ഛേദമായ എണ്ണൽസംഖ്യയെ y എന്നും എടുത്താൽ,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

അതായത്,

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാമല്ലോ: $x^2 = 2y^2$

ഇപ്പോൾ ഇതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യാപ്രശ്നമായി: രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം; അവയിലൊന്നിന്റെ വർഗം മറ്റൊന്നിന്റെ വർഗത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകണം.

ഈ സമവാക്യത്തിൽ x^2 എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യ 2 ന്റെ ഗുണിതമാണ്. അതായത്, x^2 ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. x ന്റെ കാര്യമോ?

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഒറ്റസംഖ്യയും, ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഇരട്ടസംഖ്യയുമല്ലേ? അപ്പോൾ x ഉം ഇരട്ടസംഖ്യ തന്നെ.

അതിനാൽ $x = 2u$ എന്നെഴുതാം. ഇതിൽനിന്ന് $y^2 = 2u^2$ എന്നു കിട്ടും.

അതായത്, y^2 ഉം അതുകൊണ്ടു y യും ഇരട്ടസംഖ്യതന്നെ. അപ്പോൾ $y = 2v$ എന്നെഴുതാം.

$y^2 = 2u^2$ എന്ന സമവാക്യം $(2v)^2 = 2u^2$ എന്നാകും. ഇത് ലഘൂകരിച്ചാൽ $2v^2 = u^2$; അഥവാ

$$u^2 = 2v^2$$

ഇതു നമ്മുടെ പഴയ സമവാക്യംതന്നെയല്ലേ? x, y എന്നീ സംഖ്യകൾക്കു പകരം u, v എന്നീ സംഖ്യകൾ. അപ്പോൾ x, y ഇവയെക്കുറിച്ചു

പറഞ്ഞതെല്ലാം u, v ഇവയ്ക്കും ആവർത്തിക്കാം; ഒടുവിൽ u, v ഇരട്ടസംഖ്യകളാണെന്നും, അതനുസരിച്ച്

$$u = 2s \qquad v = 2t$$

എന്നെടുത്താൽ, $s^2 = 2t^2$ എന്നും കാണാം.

ഇതിങ്ങനെ അവസാനമില്ലാതെ തുടരാം എന്നല്ലാതെ നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിന് ഉത്തരം കിട്ടുന്നില്ലല്ലോ. ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്; $x = 2u$ എന്നും, അതിൽ $u = 2s$ എന്നും കിട്ടിയല്ലോ, അപ്പോൾ $x = 4s$ എന്നാകും. ഇതുപോലെ $y = 4t$ എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ ആദ്യം കണ്ടതുപോലെ x, y ഇവ 2 ന്റെ മാത്രം ഗുണിതമല്ല, 4 ന്റെയും ഗുണിതമാണെന്നു വരുന്നു.

സമവാക്യക്കളി വീണ്ടും തുടർന്നാൽ, x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ 8 ന്റെയും, 16 ന്റെയുമൊക്കെ ഗുണിതമാണെന്നു വരും.

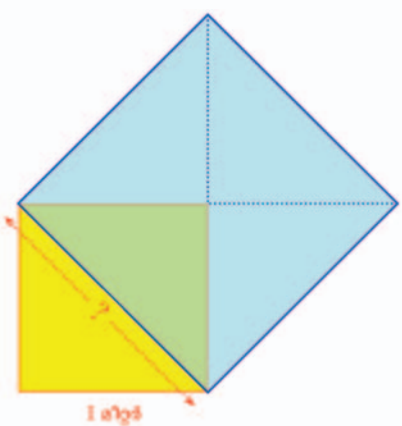
അതായത്, $x^2 = 2y^2$ എന്ന സമവാക്യമനുസരിക്കുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകളുണ്ടെങ്കിൽ, അവ രണ്ടിന്റെ എല്ലാ കൃതികളുടേയും ഗുണിതമാകണം.

അതെങ്ങനെ സാധിക്കും? രണ്ടിന്റെ എല്ലാ കൃതികളുടേയും ഗുണിതമായ എണ്ണൽ സംഖ്യയുണ്ടോ? അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളില്ല; വർഗം രണ്ട് ആയ ഭിന്നസംഖ്യയുമില്ല.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല.

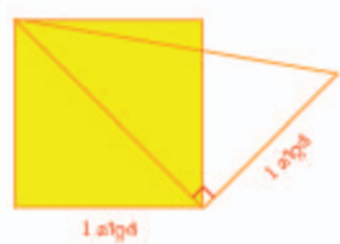
അപ്പോൾ നമ്മുടെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നം എന്തായി?

വശങ്ങൾ ഒരു മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം, ഒരു മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ട് ആകണം (വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യയായാലും പരപ്പളവ് അതിന്റെ വർഗമാണെന്ന് ആറാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ) പക്ഷേ വർഗം രണ്ട് ആയ ഭിന്നസംഖ്യ ഇല്ല. അപ്പോൾ എന്തു പറയാം?



വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ പലതുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്

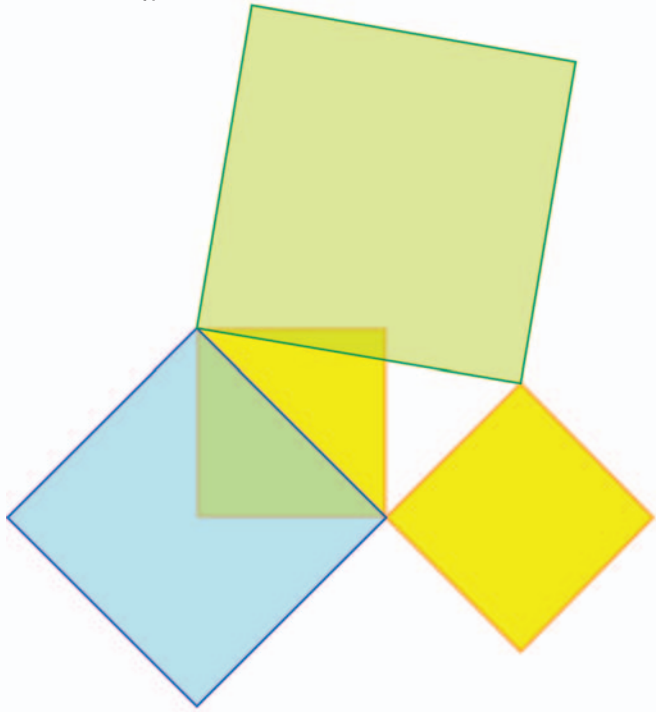
എന്തിനേയും അളന്ന് സംഖ്യയാക്കുക; ഈ സംഖ്യകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക - ഇതാണ് ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ധർമം.

അളക്കപ്പെടുന്നതിന്റെ സ്വഭാവം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കേണ്ടി വരും. പ്രകൃതിയിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് കിട്ടുന്നതു മാത്രം ഭക്ഷിച്ചു നടന്നിരുന്ന കാലത്ത് മനുഷ്യന് കൂട്ടത്തിലെ ആളുകളുടെ എണ്ണം, വളർത്തുന്ന കന്നുകാലികളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ മാത്രമേ ആവശ്യമായിരുന്നുള്ളു. അക്കാലത്ത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയായിരുന്നു.

ബി.സി. അയ്യായിരത്തോടടുപ്പിച്ച്, നദീതീരങ്ങളിൽ സ്ഥിരമായി താമസിച്ചുകൊണ്ട് വ്യാപകമായ കൃഷി തുടങ്ങിയതോടെ, കൃഷിയിടങ്ങൾ തിട്ടപ്പെടുത്താനും, പാർപ്പിടങ്ങൾ പണിയാനുമെല്ലാം പലതരത്തിലുള്ള നീളവും പരപ്പുമെല്ലാം അളക്കേണ്ടതായി വന്നു. ഇക്കാലത്താണ് ഭിന്നസംഖ്യകൾ എന്ന സങ്കേതം ഉണ്ടായത്. പങ്കുവയ്ക്കുമ്പോഴും ഭിന്നസംഖ്യകൾ ആവശ്യമുണ്ടല്ലോ. എല്ലാ അളവുകളേയും ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല എന്ന തിരിച്ചറിവിൽനിന്നാണ് പുതിയ തരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വന്നത്.

പിൽക്കാലത്ത് ഭൗതികമായ ആവശ്യങ്ങൾക്കല്ലാതെ ഗണിതത്തിന്റെ തന്നെ സൗകര്യങ്ങൾക്കായും പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കപ്പെട്ടു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ, സങ്കീർണസംഖ്യകൾ (complex numbers) എന്നിവ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായവയാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യകൾപോലും ഊർജതന്ത്രം പോലുള്ള മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട് എന്നത് മറ്റൊരു കാര്യം.

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളമെന്താണ്? ഇതിന്റെ വശങ്ങളിലെല്ലാം സമചതുരങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം.



പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമായ (പച്ച) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $1 + 2 = 3$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 3 ആകണം.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്നു കണ്ടതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 3 അല്ലെന്നും കാണാം. അപ്പോൾ ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: വ്യാപ്തം 2 ഘനസെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഉണ്ടാക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം? ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും മൂന്നാംകൃതിയും 2 അല്ല. അപ്പോൾ ഈ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വശത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരും.

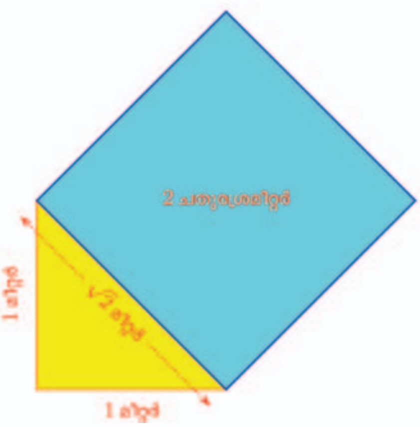
അളവുകളും സംഖ്യകളും

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളുണ്ടാക്കണം. നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണം തന്നെയെടുക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 1 ആയ (മീറ്ററോ, സെന്റിമീറ്ററോ എന്തുമാകട്ടെ) സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളത്തെ എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

ഈ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയും ചോദിക്കാം: പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

വശം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ സമചതുരമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നീളം പരപ്പളവിന്റെ വർഗമൂലമാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി , പരപ്പളവ് 4 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{4} = 2$; പരപ്പളവ് $2\frac{1}{4}$ ആണെങ്കിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം.



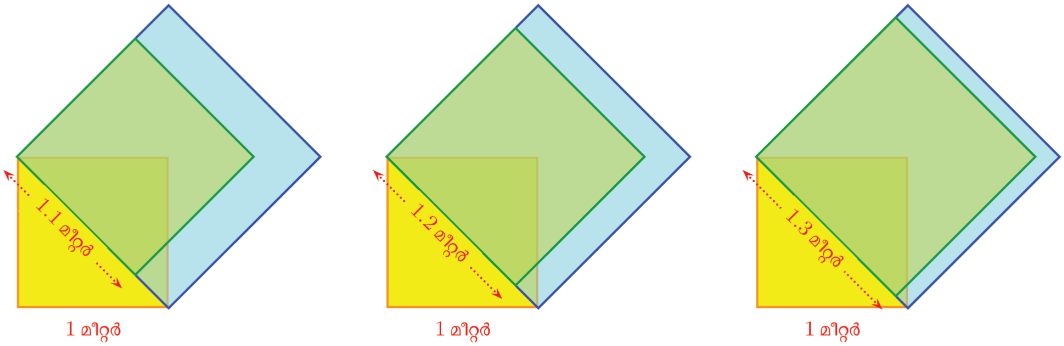
നീളത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു ചിഹ്നം കൊടുത്തതുകൊണ്ടായില്ലല്ലോ. അതിന്റെ വലുപ്പമറിയാൻ, അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുമായി ഒത്തുനോക്കണ്ടേ? അതിനുള്ള വഴി, ഈ നീളത്തോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണ്. ഇത്തരം നീളങ്ങൾ വികർണത്തിൽത്തന്നെ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ഇവ വശങ്ങളായ സമചതുരങ്ങൾ, വികർണം വശമായ സമചതുരത്തോട് അടുക്കുമല്ലോ.

തകരുന്ന വിശ്വാസങ്ങൾ

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് താരതമ്യം ചെയ്യാം എന്നായിരുന്നു ബി.സി. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പൈഥാഗറസിന്റേയും ശിഷ്യരുടേയും വിശ്വാസം. കുറേക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു രണ്ട് അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നതാണ് ഈ വിശ്വാസം. എന്നാൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റേയും വശത്തിന്റേയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾകൊണ്ട് എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ അംശബന്ധം എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് $a : b$ എന്നെഴുതണമെങ്കിൽ, വികർണത്തിന്റെ നീളം വശത്തിന്റെ $\frac{a}{b}$ മടങ്ങാകണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വികർണത്തിന്റെ വർഗം വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ മടങ്ങാകണം. വികർണത്തിലെ സമചതുരം, വശത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ല എന്നു കണ്ടല്ലോ.

പൈഥാഗറസിന്റെ തന്നെ ശിഷ്യനായ ഹിപ്പാസസ് ആണ് ഈ വസ്തുത കണ്ടെത്തിയതെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്.

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണവും വശവും പോലെ, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെ ഒരുമിച്ചളക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകൾ (incommensurable magnitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരകളുടെ നീളങ്ങളായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഇങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപമാണ് സൗകര്യം. ആദ്യം 1.1, 1.2, 1.3, . . . എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ.

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.5^2 = 2.25$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ പത്തിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, ഇങ്ങനെ കിട്ടും.

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

ഇനി 1.4 നും 1.5 നും ഇടയ്ക്കുള്ള 1.41, 1.42, 1.43, . . . എന്നീ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ

$$1.41^2 = 1.9881; \quad 1.42^2 = 2.0164$$

എന്നും കാണാം, അതായത് നൂറിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, നേരത്തെ എഴുതിയത് പോലെ,

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

1.4^2	=	1.96	1.5^2	=	2.25
1.41^2	=	1.9881	1.42^2	=	2.0164
1.414^2	=	1.999396	1.415^2	=	2.002225
1.4142^2	=	1.99996164	1.4143^2	=	2.00024449
1.41421^2	=	1.9999899241	1.41422^2	=	2.0000182084

എന്നെല്ലാം കാണാം. അതായത്, അഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെയെടുത്താൽ

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ഇതിൽ

$$2 - 1.41421^2 = 0.0000100759 < 0.00002$$

ആണെന്നും കാണണം.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

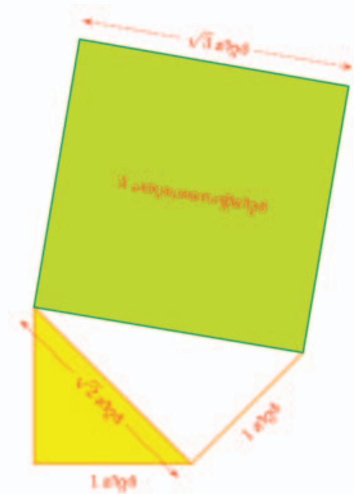
അപ്പോൾ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യ, ഒരു ദശാംശസ്ഥാനം മാത്രമെടുത്താൽ 1.4, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയെടുത്താൽ 1.41 എന്നിങ്ങനെ പറയാം. ഇതെഴുതുന്നത്

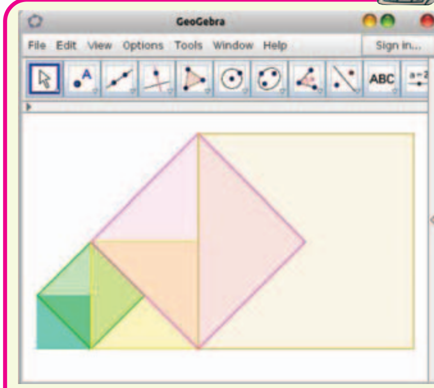
$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതിൽ $\approx$ എന്ന ചിഹ്നത്തിന്റെ അർഥം, ഏകദേശം തുല്യം എന്നാണ്.

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 3 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ ആണെന്നു പറയാം.





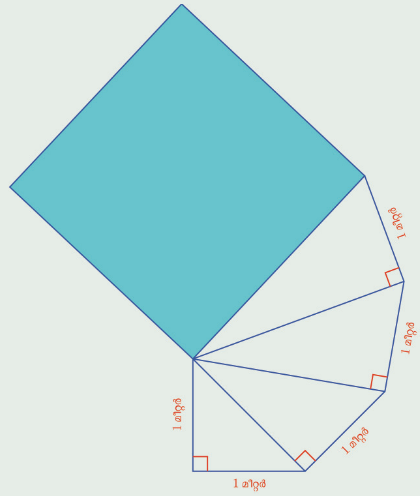
ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക. ഇത്തരം ഒരു ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. (Regular polygon ഉപയോഗിക്കാം) Area ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ സമചതുരത്തിന്റേയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളാണ് ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്നവ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലുള്ള കണക്കു കൂട്ടലുകളിലൂടെ, 1.7, 1.73, 1.732, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നും കാണാം. ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ എന്നെഴുതാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ x ഏത് അധിസംഖ്യ ആയാലും, പരപ്പളവ് x ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{x}$ എന്നെഴുതാം. ചിലപ്പോൾ $\sqrt{x}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകാം; അല്ലെങ്കിൽ, വർഗം x നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന, ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി, $\sqrt{x}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിലും എഴുതാം.

(1) ചിത്രത്തിൽ എറ്റവും മുകളിലെ മട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമാക്കി സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

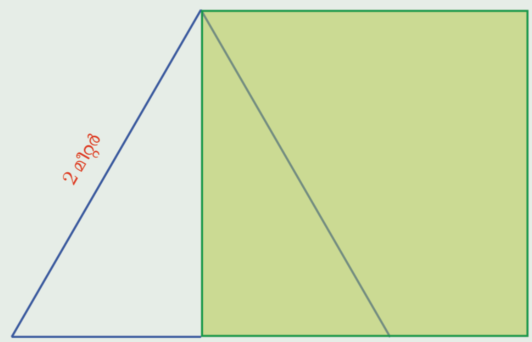
സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക.



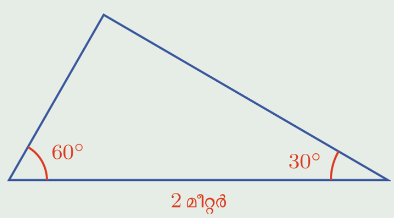
(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 2 മീറ്റർ ആയ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി വശമാക്കി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നു.

i) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്?

ii) ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി എത്ര മീറ്ററാണ്?



iii) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളമെത്രയാണ്?



(3) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച് $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരകൾ വരയ്ക്കുക.

(4) $\sqrt{13}$ സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കാനുള്ള രണ്ടു വ്യത്യസ്ത മാർഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുക.

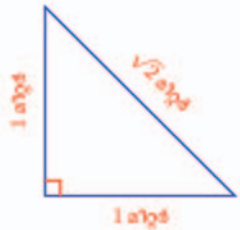
(5) $\sqrt{2}$ നേക്കാൾ വലുതും, $\sqrt{3}$ നേക്കാൾ ചെറുതുമായ മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്ററായ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

ചുറ്റളവോ?

ഇതിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണല്ലോ.



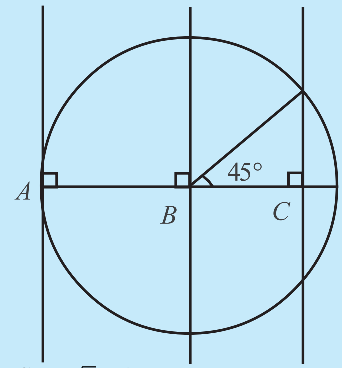
അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ 2 മീറ്ററും $\sqrt{2}$ മീറ്ററും കൂട്ടണം. ഈ നീളത്തെ $2 + \sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ 1.4, 1.41, 1.414, ...എന്നിങ്ങനെ തുടരുമല്ലോ.

അപ്പോൾ $2 + \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ, ഇവയോടെല്ലാം 2 കൂട്ടിയതാണ്; അതായത്, 3.4, 3.41, 3.414, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകൾ.

അങ്ങനെയും അംശബന്ധം

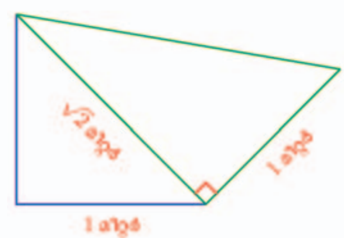
ഈ ചിത്രത്തിൽ B വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്.



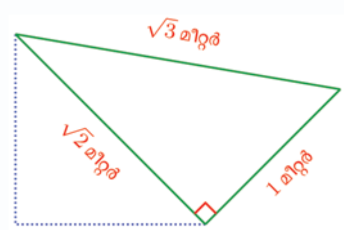
$AB : BC = \sqrt{2} : 1$

ഈ കണക്കിൽ, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായ അളവ് മതിയെന്നു തീരുമാനിച്ചാൽ ചുറ്റളവ് 3.41 മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. ഇനി അതല്ല, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമാകണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ 3.414 മീറ്റർ എന്നെടുക്കണം.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം പാദമാക്കി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയാലോ?



ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ, ഇവ ഓരോന്നിനോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടണം.

$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414
$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	:	3.1	3.14	3.146

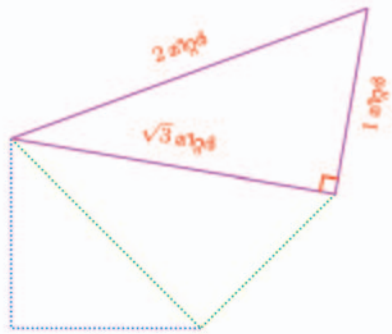
ഇവയോട് 1 കൂട്ടിയാൽ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയുടെ ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അപ്പോൾ പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി 4.146 മീറ്റർ.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്? ഏകദേശം $4.146 - 3.414 = 0.732$ മീറ്റർ എന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2 = \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെയും മുകളിൽ ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ? അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ്, രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $2+1+\sqrt{3} = 3+\sqrt{3}$ മീറ്റർ. ഇതിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാതെതന്നെ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണെന്ന് നോക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആണല്ലോ; അപ്പോൾ ചുറ്റളവിലെ വ്യത്യാസം

$$(3+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{2}$$

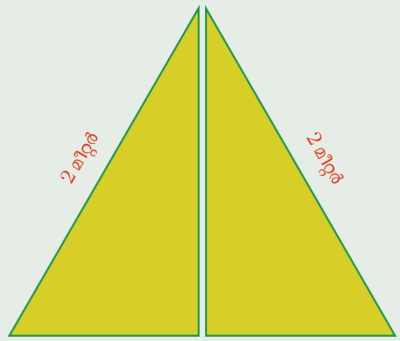
ഇത് മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി

$$2 - 1.414 = 0.586$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. അതായത്, ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 0.586 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്.

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ്, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

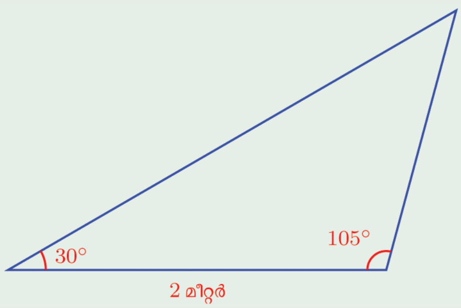
(2) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിനെ ഒരു മൂലയിലൂടെ മുറിച്ച് രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



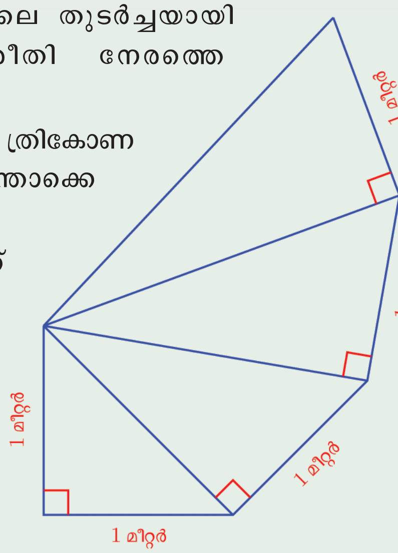
i) ഇവയിലൊന്നിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

ii) മുഴുവൻ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കുറഞ്ഞു?

(3) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.



(4) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തുടർച്ചയായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



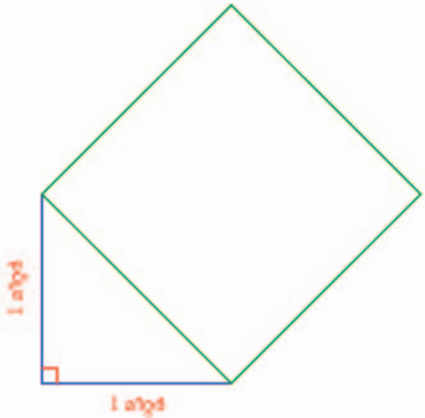
i) ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

ii) പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന് ഒമ്പതാമത്തെ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണ്?

iii) ബീജഗണിതഭാഷയിൽ, n-ാം ത്രികോണത്തിന്റെയും, അതിനു തൊട്ടു മുമ്പുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെയും ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എങ്ങനെ എഴുതാം?

(5) ലംബവശങ്ങൾ $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും, $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്ററും ആയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം എത്രയാണ്? ലംബവശങ്ങളുടെ തുക കർണത്തെക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

ഗുണനം



ഈ ചിത്രം പല തവണ കണ്ടുകഴിഞ്ഞല്ലോ, ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണെന്നറിയാം, അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ ഇതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

മറ്റു സംഖ്യകളിലെന്നപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ 4 മടങ്ങിനെയും $4 \times \sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം. ഇതു സാധാരണയായി ഗുണനചിഹ്നം ഇല്ലാതെ, $4\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ നാലു മടങ്ങ് എടുക്കണം.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ,

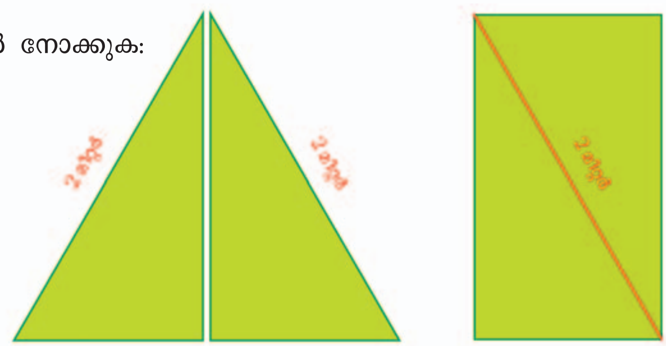
$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ മീറ്റർ}$$

ഇതുപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ പകുതിയെ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ പകുതി എടുത്താൽ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും. അതായത്,

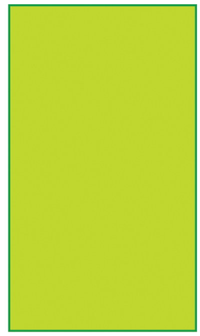
$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:



ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തെ തുല്യമായ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളായി മുറിച്ച്, മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ചതുരമാക്കിയിരിക്കുന്നു.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?



മട്ടത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോന്നിന്റെയും പാദം 1 മീറ്ററാണ്; ഉയരം $\sqrt{3}$ മീറ്ററാണെന്ന് മുമ്പൊരു കണക്കിൽ കണ്ടിട്ടുമുണ്ട്.

അപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് $2\sqrt{3} + 2$ മീറ്റർ

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$2\sqrt{3}$	:	3.4	3.46	3.464 . . .
$2\sqrt{3}+2$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

മറ്റു സംഖ്യകളിലേതുപോലെ ഇവിടെയും $2\sqrt{3} + 2$ ഉം $2(\sqrt{3}+1)$ ഉം ഒന്നു തന്നെയാണോ? രണ്ടാമത് പറഞ്ഞസംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്ന സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$\sqrt{3}+1$	:	2.7	2.73	2.732 . . .
$2(\sqrt{3}+1)$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

അതായത്, $2\sqrt{3}+2$ എന്ന സംഖ്യയോടും $2(\sqrt{3}+1)$ എന്ന സംഖ്യയോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഒന്നുതന്നെയാണ്: അപ്പോൾ

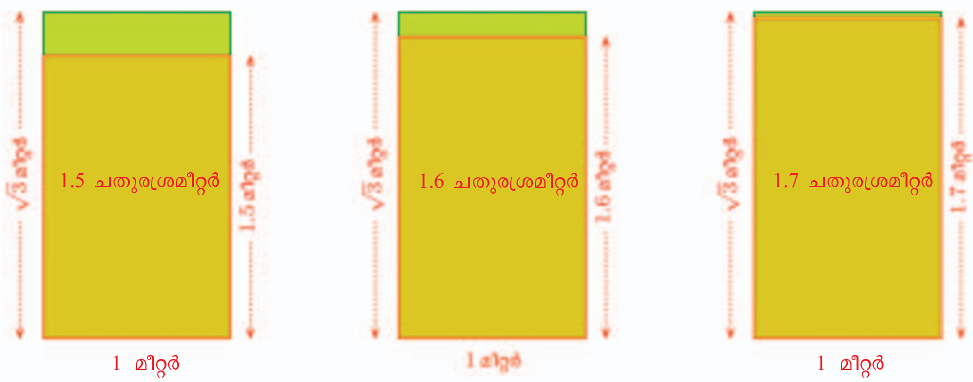
$$2\sqrt{3}+2 = 2(\sqrt{3}+1)$$

ഇനി മുകളിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്ന് നോക്കാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലമാണ് പരപ്പളവ്.

ഇവിടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായ $1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണോ?

ഇതുകാണാൻ, മുമ്പൊരിക്കൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഒരു വശം 1 മീറ്ററും മറ്റേ വശം $\sqrt{3}$ മീറ്ററിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യാനീളങ്ങളും ആയ ചതുരങ്ങൾ ഇതിനുള്ളിൽ വരച്ചു നോക്കാം.



തുടർന്ന് അകത്തെ ചതുരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ 1.73, 1.732,. . .എന്നിങ്ങനെ മീറ്റർ ആയി എടുക്കുമ്പോൾ അവയുടെ പരപ്പളവുകളും ഇതേ സംഖ്യകൾ ചതുരശ്രമീറ്ററിലായി കിട്ടും.

അതായത്, വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$മീറ്ററും 1 മീറ്ററുമായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\sqrt{3}$ചതുരശ്രമീറ്റർതന്നെയാണ്.

ഇനി ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നായാലോ? ഈ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ്. ഇതിനെ സംഖ്യാപരമായി വിശദീകരിക്കാൻ, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നിവയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി ഗുണിച്ച് വേണ്ടത്ര ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുക്കണം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732	1.7320	1.73205 . . .
$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421 . . .
$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$	:	2.4	2.44	2.449	2.4494	2.44948 . . .

$$\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2.44948\ .\ .\ .$$

ദശാംശക്കണക്ക്

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനം വരെ ചുരുക്കിയെഴുതുമ്പോൾ, അടുത്ത സ്ഥാനത്തെ അക്കം 5 ൽക്കൂടുതലാണെങ്കിൽ, നമുക്കു വേണ്ട സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയാണ് എടുക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ആയതിനാൽ, ഈ ഗുണനഫലത്തെ ഒരു ദശാംശസ്ഥാനത്തേക്ക് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 2.4 എന്നാണ്.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട് 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, 1.4142^2, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ($\sqrt{2} = 1.41421$ . . . എന്നെഴുതുന്നതിന്റെ അർഥംതന്നെ ഇതല്ലേ?) 1.7^2, 1.73^2,1.732^2, 1.7320^2, 1.73205^2,. . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നും കണ്ടു.

അപ്പോൾ ഈ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരണമല്ലോ?

മാത്രവുമല്ല, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

$$1.7^2 \times 1.4^2 = (1.7 \times 1.4)^2$$

$$1.73^2 \times 1.41^2 = (1.73 \times 1.41)^2$$

$$1.732^2 \times 1.414^2 = (1.732 \times 1.414)^2$$

എന്നെല്ലാം കാണാം. ഇതിലെ 1.7×1.4, 1.73×1.41 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ പട്ടികയിലെ അവസാന വരിയിൽ കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ 2 നോടും, 3 നോടും, 6 നോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

3	:	1.7^2	1.73^2	1.732^2	1.7320^2	1.73205^2 . . .
2	:	1.4^2	1.41^2	1.414^2	1.4142^2	1.41421^2 . . .
6	:	2.4^2	2.44^2	2.449^2	2.4494^2	2.44948^2 . . .

ഇതിലെ അവസാനവരിയിൽ എന്താണ് കാണുന്നത്?

2.4, 2.44, 2.449, 2.4494, 2.44948, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

പുതിയ സംഖ്യകളുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\sqrt{6} = 2.44948 \ldots$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് നേരത്തേ കണ്ടു. അപ്പോൾ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

2 നും 3 നും പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും, ഇതുപോലെതന്നെ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമാണെന്നു കാണാം (വർഗമൂലങ്ങൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആണെങ്കിൽ ഇതു ശരിയാണെന്ന് എഴാംക്ലാസിൽതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.)

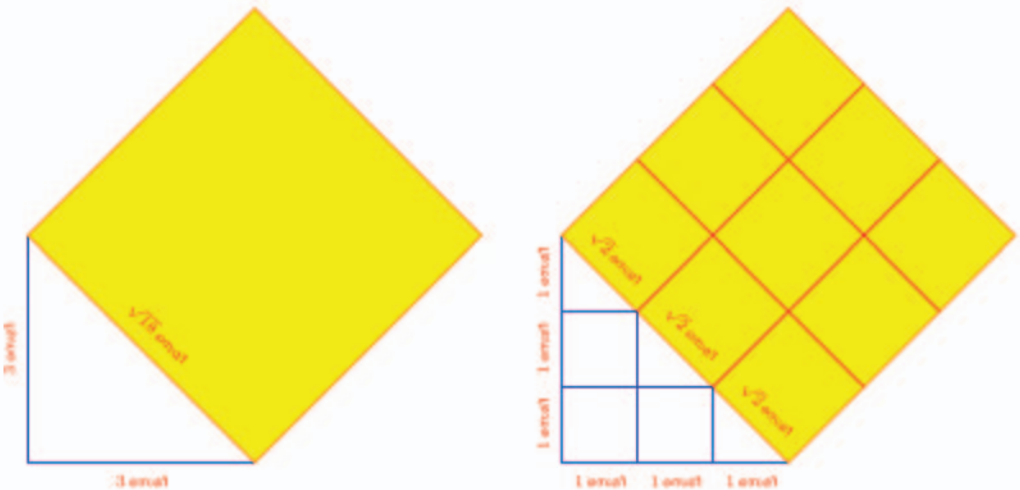
***x, y* എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$**

വർഗമൂലങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ലംബവശങ്ങൾ രണ്ടും 3 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം നോക്കാം. പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, ഈ കർണം വശമായ സമചതുരത്തിന്റ പരപ്പളവ് $3^2 + 3^2 = 18$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{18}$ സെന്റിമീറ്റർ.

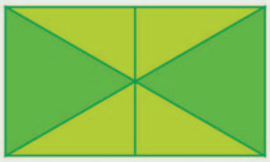
ഇനി 18 നെ 9×2 എന്നെഴുതിയാൽ ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

ഇക്കാര്യം ജ്യാമിതീയമായും കാണാം.



(1) ഒരേ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ രണ്ടെണ്ണം നെടുകെ മുറിച്ചതും, രണ്ടെണ്ണം മുഴുവനായും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കി.



സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളമുള്ള വശങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ മുറിച്ചു മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ലംബകമുണ്ടാക്കുന്നു.

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(3) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സമഭുജമാണ്.

പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും, അകത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

(5) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ഗുണനഫലം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $\sqrt{3}, \sqrt{12}$ ii) $\sqrt{3}, \sqrt{1.2}$ iii) $\sqrt{5}, \sqrt{8}$

iv) $\sqrt{0.5}, \sqrt{8}$ v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}, \sqrt{3\frac{1}{3}}$

ഹരണം

$2 \times 3 = 6$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{6}{2} = 3$ എന്നോ, $\frac{6}{3} = 2$ എന്നോ ഹരണമായും എഴുതാമല്ലോ. ഇതുപോലെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ എന്ന ഗുണനത്തെയും ഹരണമായി എഴുതാം.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ഏത് x, y എടുത്താലും $x \times y = z$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{z}{x} = y$ എന്നും $\frac{z}{y} = x$ എന്നും ഹരണമായി എഴുതാം.

ഇതുപോലെ,

> x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും,
>
> $$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$
>
> എന്ന ഗുണനത്തെ ഹരണമായി
>
> $$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \qquad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$ എന്നെഴുതാം.

ഇനി $\frac{6}{2} = 3$ ഉം, $\frac{6}{3} = 2$ ഉം ആയതിനാൽ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും കാണാം. നേരത്തെ കണ്ടതെന്താണ്?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ഈ രണ്ടു ജോടി സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം;

ഇതുപോലെ $3 \times \frac{2}{3} = 2$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും തുടർന്ന് ഈ ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ എന്നും എഴുതാം

ഇനി ഇത്തരം വർഗമൂലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $\sqrt{\frac{1}{2}}$ കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

എന്നെഴുതാം, തുടർന്ന് $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഏതെങ്കിലും ദശാംശസംഖ്യകൊണ്ട് ഒന്നിനെ ഹരിച്ച് $\frac{1}{\sqrt{2}}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം കണക്കാക്കാം.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$$ (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചോളൂ.)

മറ്റൊരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ആയതിനാൽ ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാം.

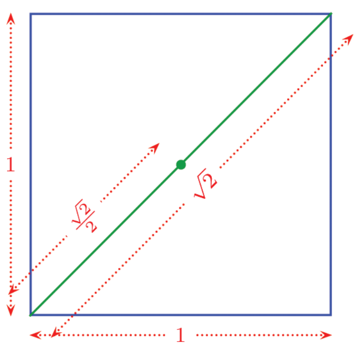
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

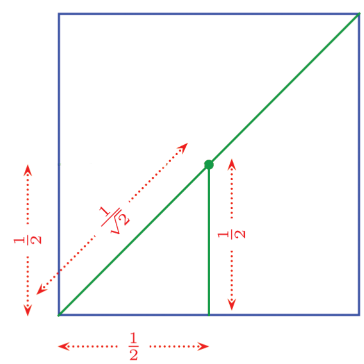
ഇനി

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$ (ഇതിന് കാൽക്കുലേറ്റർ വേണ്ടല്ലോ?)

എന്നു എളുപ്പത്തിൽ കാണാമല്ലോ.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്നത്, ജ്യാമിതീയമായും കാണാം

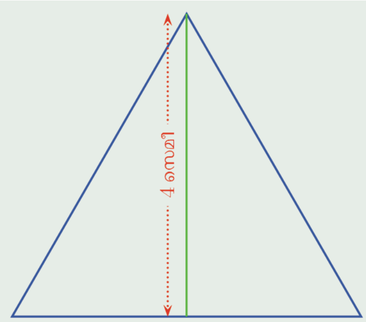




ഇതുപോലെ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ഉം കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

?

(1) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

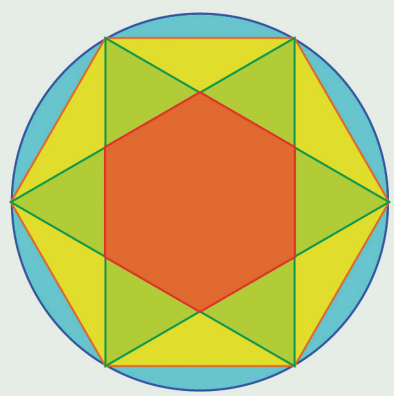


(2) ഒരു സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ച ചിത്രമാണ് ഇത്.

i) അകത്തെ ചുവന്ന ഷഡ്ഭുജവും സമഷഡ്ഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) വലിയ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചെറിയ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം?

iii) വലിയ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചെറിയ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്?

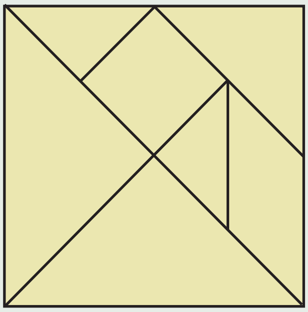


(3) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച്, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(5) $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$ എന്നും $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$ എന്നും തെളിയിക്കുക. ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

(6) 4 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തെ 7 ഭാഗങ്ങളാക്കിയ ടാൻഗ്രാം ചിത്രമാണ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഇതിന്റെ ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.



4 സെ.മീ.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ നീളങ്ങളെയും സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ലെന്ന് സമർഥിക്കുന്നു.			
• ഭിന്നസംഖ്യയായി എഴുതാൻ കഴിയാത്ത വർഗമൂലങ്ങളെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• അത്തരം സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകളുടെ ജ്യാമിതീയമായ അർഥവും അവയോടു ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്ന മാർഗവും വിശദീകരിക്കുന്നു.			

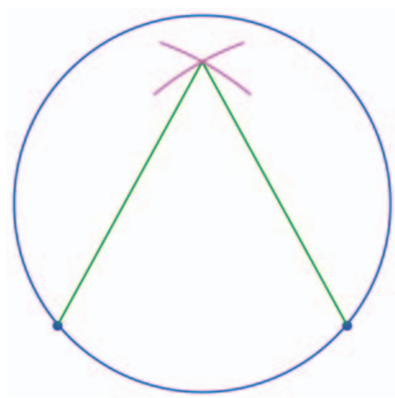
5

വൃത്തങ്ങൾ

വൃത്തങ്ങളും വരകളും

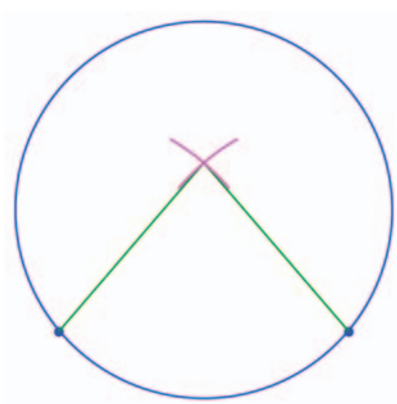
വളയോ ചെറിയൊരു വട്ടപ്പാത്രത്തിന്റെ അടപ്പോ, നോട്ടുബുക്കിൽവച്ചൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ കേന്ദ്രമെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

വൃത്തത്തിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തുനിന്നും കേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ഒരേ അകലമാണ്.



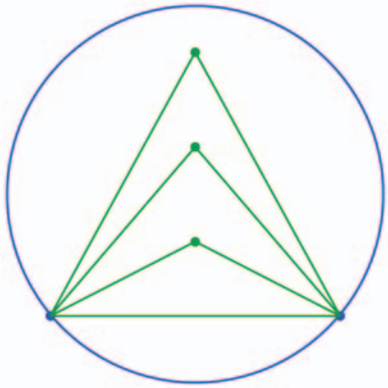
അപ്പോൾ ഈ വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ അവ രണ്ടിൽനിന്നും ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് കേന്ദ്രം. എങ്ങനെയാണ് അത്തരമൊരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക?

ഇത് കേന്ദ്രത്തിനു മേലേയായി, അകലമൽപ്പം കുറച്ചെടുത്താലോ?



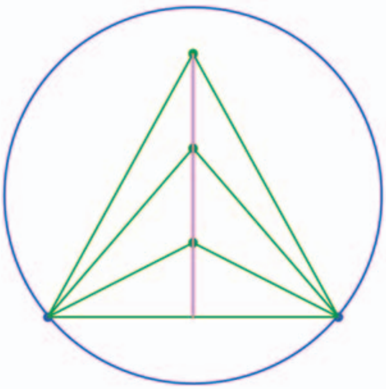
ഇപ്പോഴുമത്ര ശരിയായില്ല. ഇങ്ങനെ തെറ്റിയും തിരുത്തിയും വരച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനു പകരം, പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ച് അൽപമൊന്ന് ആലോചിക്കാം.

വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ അനേകം ബിന്ദുക്കളുണ്ട്. അവയിലേതാണ് കേന്ദ്രമെന്ന് മുൻകൂട്ടി നിശ്ചയിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



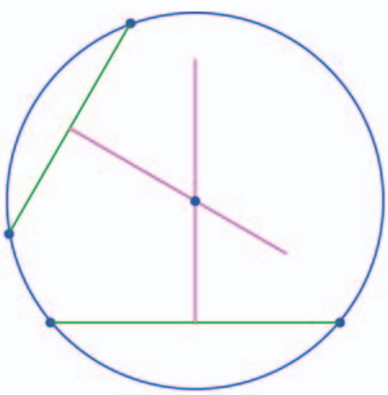
രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര പാദമായ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം മൂലകളല്ലേ?

ഇങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലാണെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്; (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം)



അപ്പോൾ നമ്മളന്വേഷിക്കുന്ന വൃത്തകേന്ദ്രം, വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലാണെന്നു കിട്ടി.

അതുകൊണ്ടായില്ലല്ലോ; ഈ വരയിലെ വിടെയാണ് കേന്ദ്രമെന്നറിയണ്ടേ?



വൃത്തത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലുമായിരിക്കണം കേന്ദ്രം; രണ്ടു വരകളിലും ആകണമെന്നതിനാൽ, അവ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുതന്നെ കേന്ദ്രം:

ജോലി കഴിഞ്ഞു; ഇനി അതിൽനിന്നറിഞ്ഞത് ഓർത്തുവയ്ക്കാം.

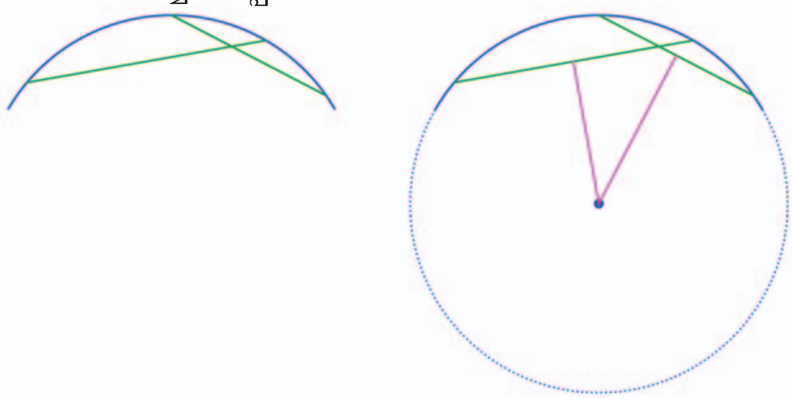
വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെയും ലംബസമഭാജി, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

"വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര" എന്നു നീട്ടിപ്പറയുന്നതിനു പകരം, അത്തരം വരകൾക്കെല്ലാം ഒരു പേരു കൊടുക്കാറുണ്ട്.

(ഏറെ ആലോചിക്കുകയും, അവസാനമെല്ലാം ചുരുക്കിപ്പറയുകയുമാണല്ലോ കണക്കിന്റെ രീതി). വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വരയെ പൊതുവായി ഞാൺ (chord) എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ തത്വം ഇങ്ങനെയാക്കാം.

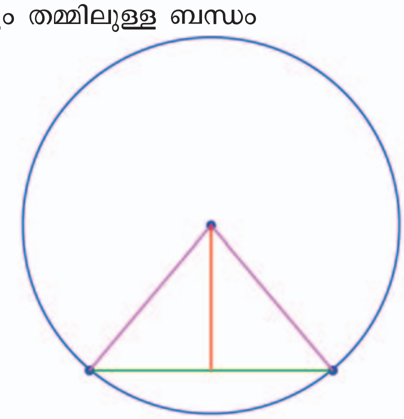
വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും ലംബസമഭാജി, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രം (ഉദാഹരണമായി, ഒരു വളക്കഷണം) കിട്ടിയാലും, ഇതുപോലെ വൃത്തകേന്ദ്രവും അതുവഴി മുഴുവൻ വൃത്തവും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. ഈ കഷണത്തിൽ രണ്ടു വരവരച്ച്, അവയുടെ ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?



ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങളും വൃത്തകേന്ദ്രവും ചേർന്നൊരു സമപാർശ്വത്രികോണമാകും എന്നതിൽനിന്നാണ് മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ തത്വത്തിലെത്തിയത്.

സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ പാദവും മൂന്നാം മൂലയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പലതരത്തിൽപ്പറയാമെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടു:



- മൂന്നാംമൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബം, പാദത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.
- മൂന്നാംമൂലയും പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, പാദത്തിനു ലംബമാണ്.
- പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലാണ് മൂന്നാംമൂല.

ഇതിൽ അവസാനം പറഞ്ഞതിൽ പാദം വൃത്തത്തിലെ ഞാണും, മൂന്നാംമൂല വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി എടുത്തതാണ് നമ്മുടെ വൃത്തതത്വം. ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു ത്രികോണതത്വങ്ങളും വൃത്തതത്വങ്ങളായി മാറ്റിയെഴുതാമല്ലോ.

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിനിന്നുള്ള ലംബം, ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

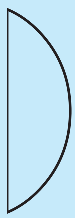
വൃത്തകേന്ദ്രവും ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഞാണിനു ലംബമാണ്.

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം: മൂലകളെല്ലാം ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തത്തിലായി ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ഒരേ നീളമുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഞാൺ വരച്ചാൽ, മൂന്നാമത്തെ വശം ഇവയ്ക്ക് തുല്യമാകണമെന്നില്ലല്ലോ (ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ!)

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ വശമായ ഞാൺതന്നെ കണക്കുകൂട്ടി വരയ്ക്കണം. അത്തരമൊരു ത്രികോണം വരച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ എങ്ങനെയിരിക്കുമെന്നു നോക്കാം (അതിന് GeoGebra ഉപയോഗിക്കാം: Regular Polygon ഉപയോഗിച്ച് ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക. Circle Through Three Points ഉപയോഗിച്ച് അതിന്റെ മൂലകളിൽകൂടി വൃത്തം വരയ്ക്കുക).

ഞാണും ചരടും

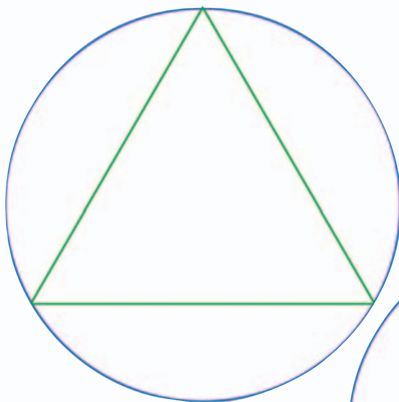
ഒരു വില്ലിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിൽ വലിച്ചു കെട്ടുന്ന ചരടിനെയാണ് സാധാരണയായി "ഞാൺ" എന്നു പറയുന്നത്. ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തഭാഗവും രേഖയും നോക്കിയാൽ ഏതാണ്ട് ഒരു വില്ലുപോലെ തോന്നുമല്ലോ.

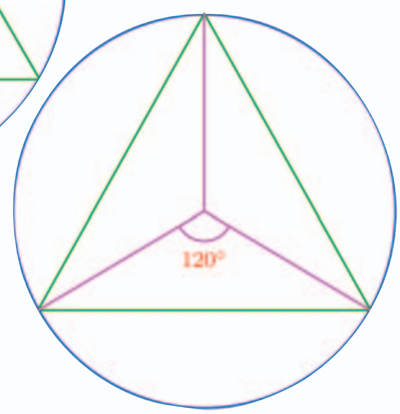


വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ എന്നത് ഈ വില്ലിലെ ചരടിന്റെ സ്ഥാനത്താണുതാനും.

സംസ്കൃതത്തിലെ "ജ്യാ" എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് "ഞാൺ" എന്ന മലയാള വാക്കുണ്ടായത്. പ്രാചീന ഭാരതത്തിലെ ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ "ജ്യാ" എന്ന സംസ്കൃത പദമാണ് ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത്.

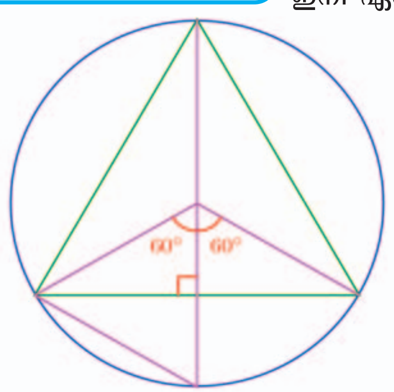
ഇംഗ്ലീഷിലെ Chord എന്ന വാക്ക്, ലാറ്റിൻ ഭാഷയിലെ Chorda എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് വന്നത്. കയറ് എന്നാണിതിന്റെ അർത്ഥം. ചരട് എന്നതിന് ഇപ്പോൾ ഇംഗ്ലീഷിൽ Cord എന്ന വാക്കാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

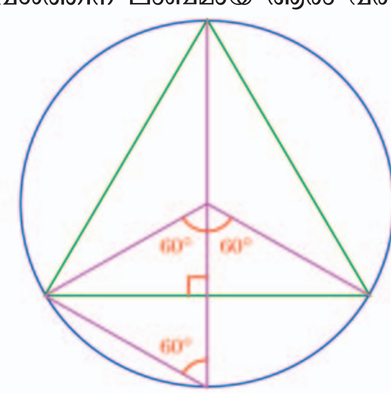




ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളും വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന മൂന്നു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ് (കാരണം?) അതിനാൽ, ഈ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളെല്ലാം 120° യാണ്.

ഇനി ഏതെങ്കിലും വശത്തിന് ലംബമായ ആരം വരയ്ക്കുക.





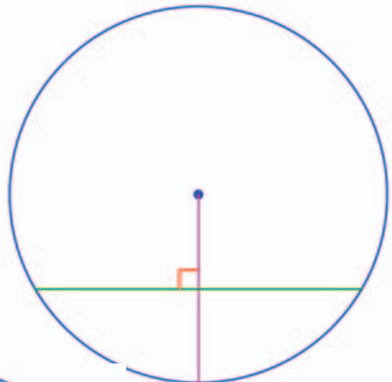
ഇടത്തെ ചിത്രത്തിലും, തുടർന്ന് വലത്തെ ചിത്രത്തിലും അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകൾ 60° എന്നു കണക്കാക്കിയതെങ്ങനെ എന്നാലോചിച്ചുനോക്കൂ.

ഏതായാലും, ഈ ചെറിയ (പിങ്ക്) സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബമാണ് വലിയ (പച്ച) സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം. അതിനാൽ അത് ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഈ വശത്തിനെ സമഭാഗം ചെയ്യണം.

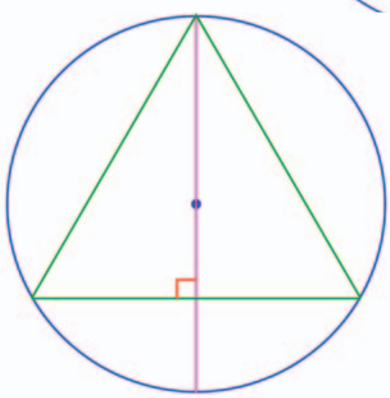
അതായത്, വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശം, അതിനു ലംബമായ ആരത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്: വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ആരത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയായ ഞാൺ, വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശമാണോ?

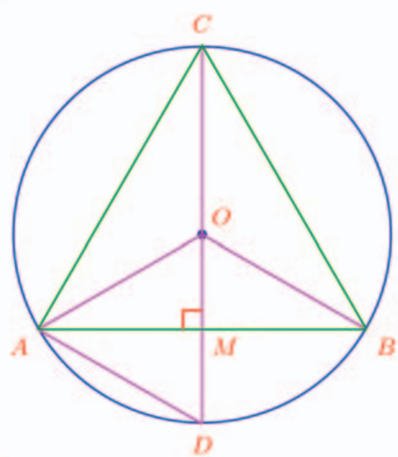
വരച്ചു നോക്കാം. ആദ്യമൊരു ആരം വരച്ച്, അതിന്റെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക.



ഇനി ഈ ആരം നീട്ടി വ്യാസമാക്കുക; അതിന്റെ അറ്റവും ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങളും യോജിപ്പിക്കുക.

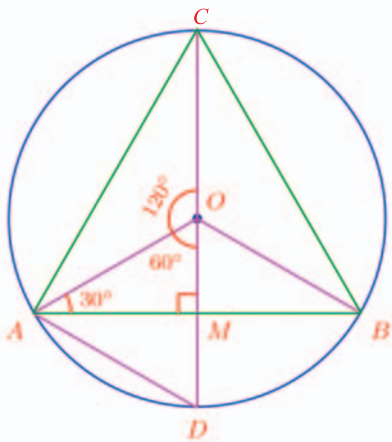


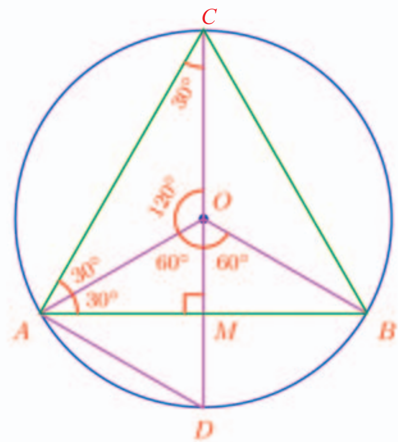
ഇത് സമഭുജത്രികോണംതന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കാൻ, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ വരകൾ വരയ്ക്കുക.



ABC സമഭുജത്രികോണമാണെന്നു തെളിയിക്കാൻ, AB, AC, എന്നീ വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നും, ഇവ ചേരുന്ന കോൺ CAB യുടെ അളവ് 60° ആണെന്നും കണ്ടാൽമതി.

ആദ്യം OAD എന്ന ത്രികോണം നോക്കുക: OA, OD ഇവ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളായതിനാൽ തുല്യമാണ്; A എന്ന ബിന്ദു, OD എന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലായതിനാൽ OA, DA ഇവയും തുല്യമാണ്; അപ്പോൾ OAD ഒരു സമഭുജത്രികോണമാണ്. ഇതനുസരിച്ച്, ചില കോണുകൾ, ചുവടെ ഇടതുവശത്തുള്ള ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ കണക്കാക്കാം; തുടർന്ന് വലതുവശത്തുള്ള ചിത്രത്തിലെപ്പോലെയും;

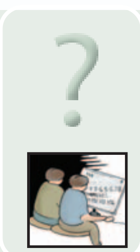




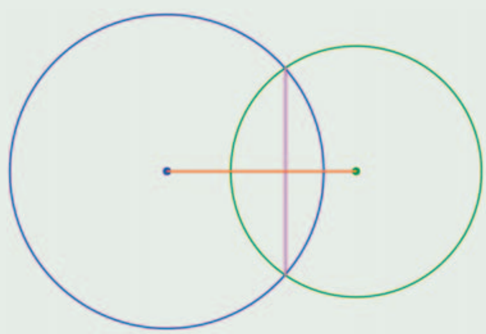
അങ്ങനെ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ A യിലെ കോൺ 60° എന്നു കിട്ടി.

AB യും AC യും തുല്യമാണെന്നു കാണാൻ, OAB, OAC എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കുക; രണ്ടിലും ഒരു വശം OA യാണ്. OB, OC എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. OAB എന്ന ത്രികോണത്തിൽ OA, OB ഇവ ചേരുന്ന കോണും, OAC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ OA, OC ഇവ ചേരുന്ന കോണും 120° തന്നെ. അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ AB, AC ഇവയും തുല്യമാണ്.

അങ്ങനെ ഒരു കോൺ 60° ആയ സമപാർശ്വത്രികോണമാണ് ABC; അതായത്, സമഭുജത്രികോണം. വൃത്തത്തിൽ സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കാനൊരു എളുപ്പവഴിയായില്ലേ?

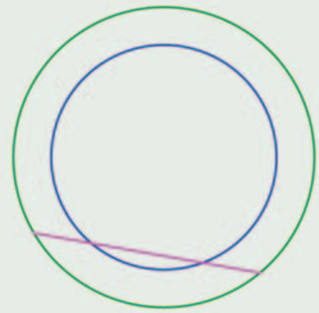


(1) രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

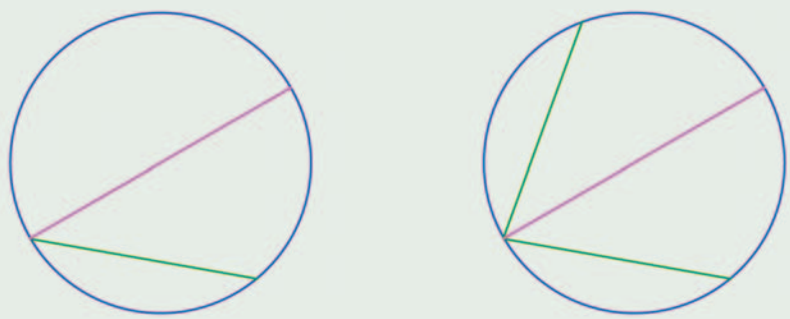


(2) ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും, ഒരു വരയുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്;

വരയുടെ ഇരുഭാഗത്തും, വൃത്തങ്ങൾക്കിടയിലെ ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



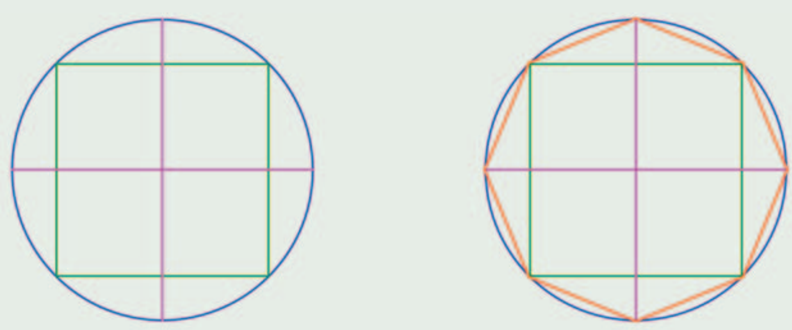
(3) വൃത്തത്തിൽ ഒരു ഞാണും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുകൂടി ഒരു വ്യാസവും വരയ്ക്കുന്നു. വ്യാസത്തിന്റെ മറുഭാഗത്ത്, ഇതേ ചരിവിൽ മറ്റൊരു ഞാണും വരയ്ക്കുന്നു.



ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വരയ്ക്കുന്ന ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ ചേരുന്ന കോണിനെ, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിലൂടെയുള്ള വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ വ്യാസങ്ങൾ വൃത്തത്തെ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളും, സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

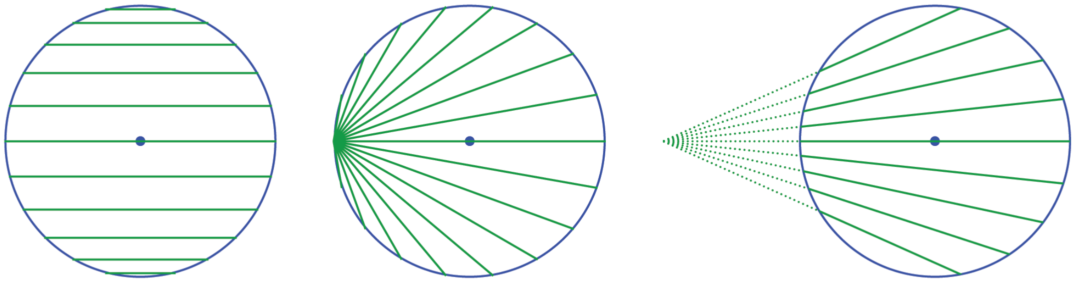


ഇതൊരു സമഅഷ്ടഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക

തുല്യഞാണുകൾ

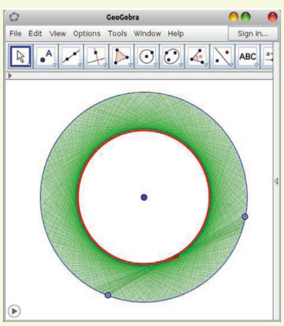
വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഞാണുകളാണ് വ്യാസങ്ങൾ, ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളംകൂടിയ ഞാണുകളും വ്യാസങ്ങൾതന്നെ.

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നകലുംതോറും, ഞാണിന്റെ നീളം കുറഞ്ഞുവരും:

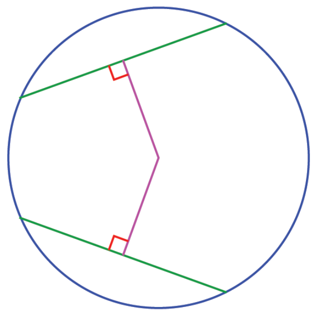


നിരങ്ങിനീങ്ങിയാലും കറങ്ങിനീങ്ങിയാലും, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണുന്നില്ലേ?

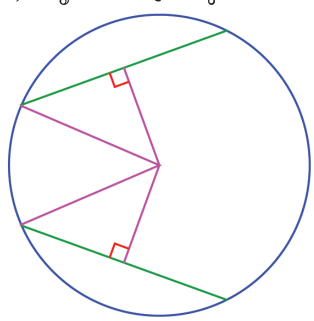
ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഈ ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി Trace On നൽകുക. ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾക്ക് Animation നൽകി നോക്കൂ. ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്താണ്? എന്തുകൊണ്ടാണങ്ങനെ? ഞാണിന് Trace On നൽകി നോക്കൂ. ഞാണിന് നിറം നൽകി ചിത്രം മനോഹരമാക്കുകയുമാവാം.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



വൃത്തകേന്ദ്രത്തിനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ. ഇവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണിക്കാൻ, ഓരോന്നിന്റെയും ഒരറ്റം, വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



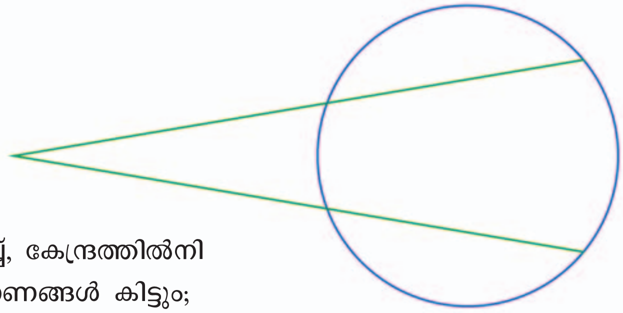
ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കർണങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളാകയാൽ തുല്യമാണ്; ഒരു ജോടി ലംബവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുമുണ്ട്. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്, മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബം മുറിച്ച കഷണങ്ങളായതിനാൽ, ഈ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾ ഞാണുകളുടെ പകുതിയാണ്, അങ്ങനെ ഞാണുകളുടെ പകുതികൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം; ഞാണുകളും.

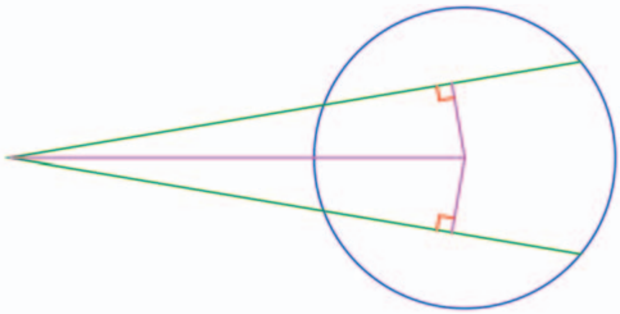
വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

മറിച്ച്, ഞാണുകൾ തുല്യമാണ് എന്നെടുത്തു തുടങ്ങിയാൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കാമോ? ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

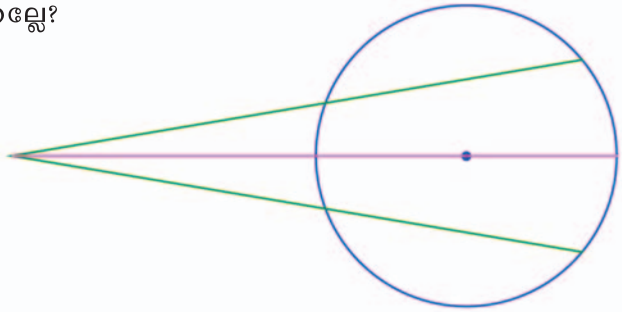
ഇതുപയോഗിച്ചൊരു കണക്കുനോക്കാം. വലതുവശത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ നീട്ടി, വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ മുട്ടിക്കുന്നു.



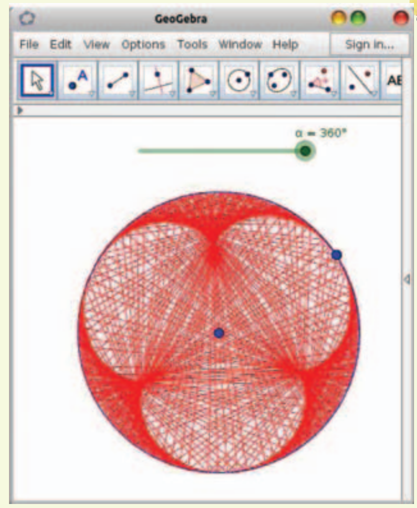
ഈ ബിന്ദുവും, വൃത്തകേന്ദ്രവും ചേർത്തു വരച്ച്, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരച്ചാൽ, രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും;



രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും കർണം ഒരേ വരയാണ്. ഞാണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങളും തുല്യമാണ്. അങ്ങനെ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഒരു ജോടി ലംബവശങ്ങളും തുല്യമായി. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഇവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്; അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രവും, ഞാണുകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, നീട്ടിവരച്ച ഞാണുകൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണ്. ഈ വര വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസം നീട്ടിയതല്ലേ?



വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ ചേരുന്ന കോണിനെ, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് നേരത്തെ ഒരു കണക്കിൽ കണ്ടല്ലോ. കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് വൃത്തത്തിനു പുറത്താണെങ്കിലും ഇത് ശരിയാണെന്ന് ഇപ്പോൾ കണ്ടു.

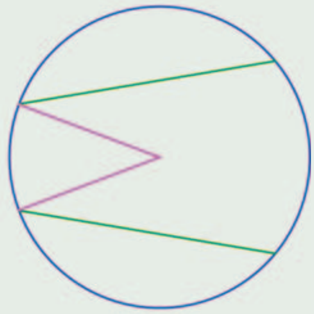


ഇത്തരം ചിത്രങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഒരു Angle slider α നിർമിക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ α എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. ഇതുപോലെ $\angle B'AB'' = \alpha$ വരത്തക്കവിധം മറ്റൊരു ബിന്ദു B'' വൃത്തത്തിൽ നിർമിക്കുക. B', B'' എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാൺ വരച്ച് Trace On നൽകുക. സ്ലൈഡറിന് Animation നൽകി നോക്കൂ. $\angle B'AB'' = \alpha$ എന്നതിന് പകരം 2α, 3α, 4α, ... എന്നിങ്ങനെ നൽകി നോക്കൂ. 3α എന്ന് നൽകുമ്പോഴുള്ള ചിത്രമാണ് മുകളിൽ.

(1) വൃത്തത്തിലെ ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകളെല്ലാം കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

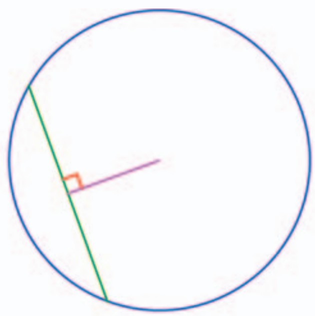
(2) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു ഞാണുകൾക്കിടയിലുള്ള കോണിനെ ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു. ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

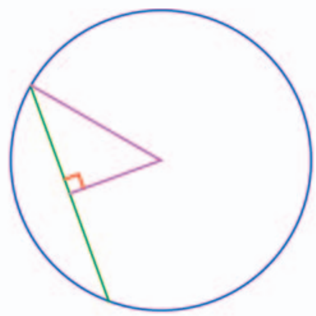
(3) ചിത്രത്തിൽ, ആരങ്ങളും ഞാണുകളും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ തുല്യമാണ്.
ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ഞാണുകളുടെ നീളം

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലമാണ്, ഞാണുകളുടെ നീളം നിശ്ചയിക്കുന്നതെന്നു കണ്ടല്ലോ. അതിന്റെ കണക്കെന്താണെന്നു നോക്കാം.





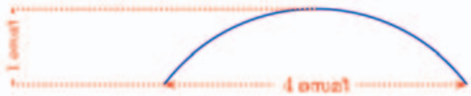
മുകളിലെ ഇടത്തെ ചിത്രത്തിൽ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണും, അതിലേയ്ക്ക് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബവും ആണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്; വലത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഞാണിന്റെ ഒരറ്റം വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഒരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയതും.

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, ഒരു ലംബവശം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബവും, മൂന്നാമത്തെ വശം ഞാണിന്റെ പകുതിയുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമുപയോഗിച്ച്, ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം കണക്കാക്കാം;

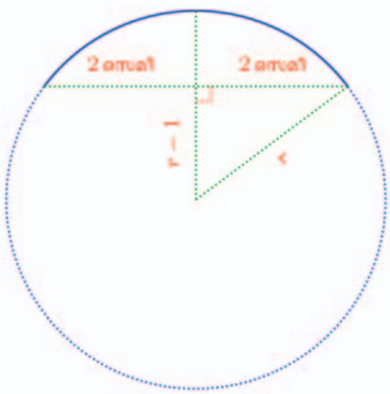
വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും പകുതിയുടെ വർഗം, ആരത്തിന്റെയും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു ഞാണിലേയ്ക്കുള്ള ലംബദൂരത്തിന്റെയും വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് (ലംബമായി) 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം $4^2 - 3^2 = 7$; അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം $2\sqrt{7}$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ഈ കണക്കുനോക്കൂ: ഒരു വളക്കഷണത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം, 1 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്:



മുഴുവൻ വളയുടെ ആരം കണക്കാക്കണം. ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മുഴുവൻ വള സങ്കൽപിക്കാം;



വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$r^2 - (r-1)^2 = 4$$

എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ $2r - 1 = 4$ എന്നും, അതിൽ നിന്ന് $r = 2\frac{1}{2}$ എന്നും കിട്ടും; അതായത്, വളയുടെ ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ.

താമരക്കണക്ക്

ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ **ലീലാവതി** എന്ന ഗണിതപുസ്തകത്തെക്കുറിച്ചു കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതിലെ ഒരു ശ്ലോകത്തിന്റെ വിവർത്തനം ഇങ്ങനെയാണ്:

"ചക്രവാകപ്പക്ഷികളും, ക്രൗഞ്ചപ്പക്ഷികളും കളിയാടുന്ന ഒരു തടാകത്തിൽ, അര കൈപ്പാട് ഉയരത്തിൽ ഒരു താമര മൊട്ട് ഉയർന്നു നില്ക്കുന്നു. കാറ്റത്ത് മെല്ലെ ആടി, അത് രണ്ടു കൈപ്പാട് അകലെയായി ജലത്തിൽ മുങ്ങി. വേഗം പറയൂ, കണക്കുകാരാ, തടാകത്തിന്റെ ആഴമെത്ര?"

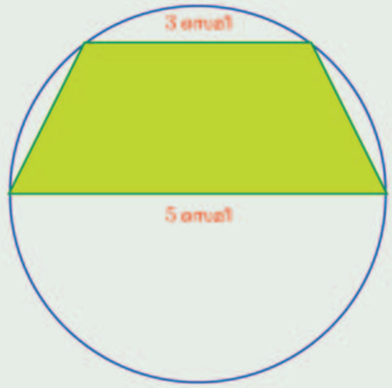
ചക്രക്രൗഞ്ചാകുലിതസലിലേ
ക്വാപിദൃഷ്ടം തഡാഗേ
തോയാമൂർദ്ധ്വം കമലകലികാഗ്രം
വിതസ്തതിപ്രമാണം
മന്ദം മന്ദം ചലിതമനിലേനാഹതം
ഹസ്തയുഗ്മം
തസ്മിത്മഗ്നം ഗണക, കഥയ
ക്ഷിപ്രമംഭ: പ്രമാണം

(1) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളമെത്രയാണ്?

(2) ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസത്തിന് ഇരുവശത്തുമായി, 6, 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള സമാന്തര ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമെത്രയാണ്? ഇതേ നീളമുള്ള സമാന്തര ഞാണുകൾ, വ്യാസത്തിന്റെ ഒരേ വശത്തു വരച്ചാൽ, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്തായിരിക്കും?

(3) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിൽ താഴത്തെ വശം വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, മുകളിലെത്തെ വശം അതിനു സമാന്തരമായ ഞാണുമാണ്.

ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



(4) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, 4 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള സമാന്തരമായ രണ്ടു ഞാണുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 5 സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

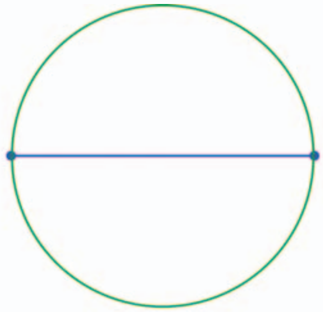
ബിന്ദുക്കളും വൃത്തങ്ങളും

വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളെക്കുറിച്ചാണ് ഇത്രയും നേരം പറഞ്ഞുകൊണ്ടിരുന്നത്; ഇനി മറിച്ചൊരു ചോദ്യം, ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം. ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

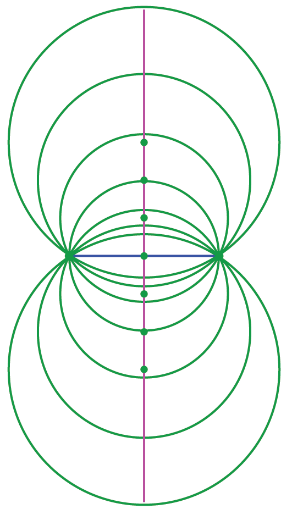
നോട്ടുബുക്കിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?

വളരെയെളുപ്പം ചെയ്യാവുന്നത്, ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുകയാണ്; മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?



അങ്ങനെയൊരു വൃത്തം വരച്ചാൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അതിന്റെ ഞാണാകും, അപ്പോൾ വൃത്തകേന്ദ്രം, ഈ വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലായിരിക്കണം.

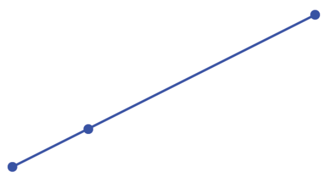
ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവും കേന്ദ്രമായി ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വരയും അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും വരയ്ക്കുക. ലംബസമഭാജിയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, വരയുടെ ഒരു അഗ്രബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിന് Animation നൽകി നോക്കൂ. വൃത്തത്തിന് Trace On നൽകാവുന്നതാണ്.

അപ്പോൾ പുതിയൊരു ചോദ്യം; ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

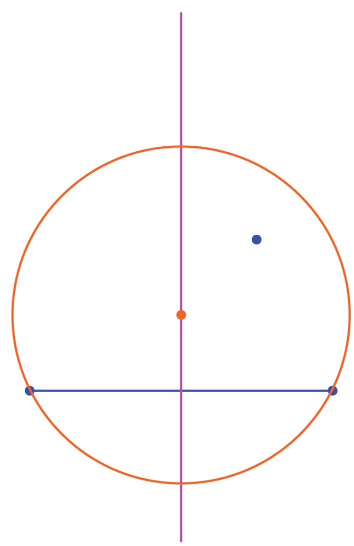
ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ സാധിക്കില്ല.



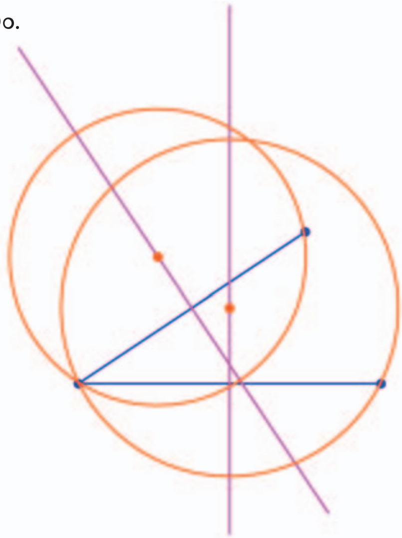
ഒരേ വരയിലല്ലെങ്കിലോ?

വരയ്ക്കാൻ തുടങ്ങുന്നതിനു മുമ്പ് അൽപമൊന്നാലോചിക്കാം.

ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായെടുത്താലും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.



ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ജോടി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായെടുത്താലും അവയിലൂടെയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

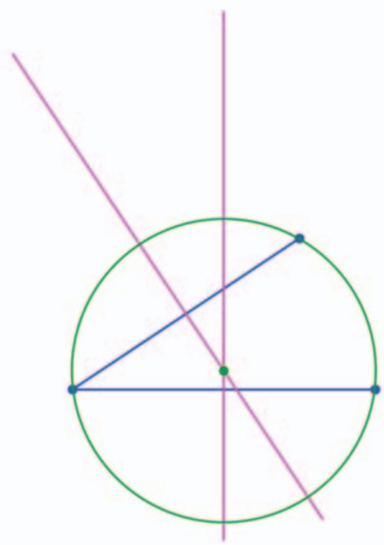


അങ്ങനെ രണ്ടു ജോടി ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

പക്ഷേ, നമുക്കു വേണ്ടത്, മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന ഒറ്റ വൃത്തമല്ലേ?

ആദ്യമെടുത്ത ഒരു ജോടി ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം ആദ്യത്തെ സമഭാജിയിലായിരിക്കണം. രണ്ടാമത്തെ ജോടിയിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം രണ്ടാമത്തെ സമഭാജിയിലുമായിരിക്കണം.

രണ്ടു സമഭാജിയിലുമുള്ള ബിന്ദു എടുത്താലോ? അതായത്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു?



വരയും വട്ടവും

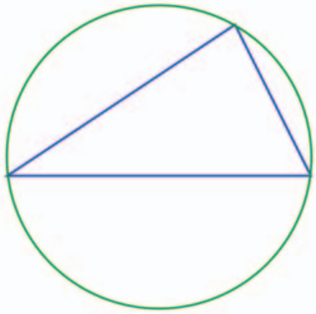
ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന എത്ര വരകൾ വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം. അതു പോലെ വൃത്തങ്ങളും.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരു വര മാത്രമല്ലേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുള്ളൂ? പക്ഷേ, വൃത്തങ്ങൾ എത്രവേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം.

ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയണമെന്നില്ല. അങ്ങനെ വര വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അവയിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കയില്ല. വര വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കാത്ത മൂന്നു ബിന്ദുക്കളായാലോ, അവയിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ഏതെങ്കിലും നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? വൃത്തമോ?

മിച്ചമുള്ള ഒരു ജോടി ബിന്ദുക്കളുംകൂടി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഒരു ത്രികോണമാകും; വൃത്തം അതിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയും കടന്നുപോകും;



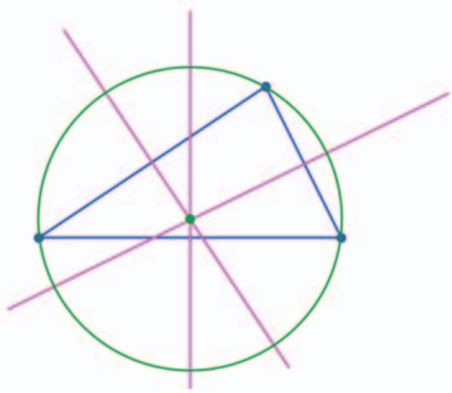
ഇങ്ങനെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം (circumcircle) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ, ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയുമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Circle Through 3 Points ഉപയോഗിക്കാം. ഇതു പയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.

ഒരു Angle Slider α നിർമിച്ച് ഒരു കോൺ α ആയി ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. Midpoint or Centre ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തകേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്താം. Slider നീക്കി α മാറ്റുമ്പോൾ പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറുന്നത് നോക്കൂ. പരിവൃത്തകേന്ദ്രം ത്രികോണത്തിനകത്ത് വരുന്നതെപ്പോഴാണ്? പുറത്ത് വരുന്നതോ? ഇത് എപ്പോഴെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും വശത്ത് വരുമോ?

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യകൂടി കാണാം. ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും, ഇടതു വശത്തിന്റെയും ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചാണ് പരിവൃത്തകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിച്ചത്. വലതു വശം പരിവൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.



ഏതു ത്രികോണത്തിലും മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു.

(1) രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായും അവ ചേരുന്ന കോൺ 60°, 90°, 120° ഇവയിലൊന്നായും ഓരോ ത്രികോണം വരച്ച്, അവയുടെയെല്ലാം പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. (പരിവൃത്തത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക)

(2) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

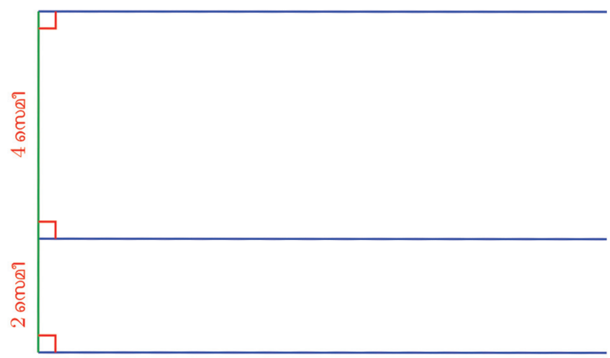
പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണും, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പലതരത്തിൽ വിശദീകരിക്കുന്നു. • വൃത്തഭാഗത്തിൽനിന്ന് മുഴുവൻ വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്നു. • തുല്യ ഞാണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ചും അവ ചേരുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസവുമായുള്ള കോണുകൾ ഉപയോഗിച്ചും വിശദീകരിക്കുന്നു. • ഞാണുകളുടെ നീളവും, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തുന്നു.			

6 സമാന്തരവരകൾ

സമാന്തരഭാഗം

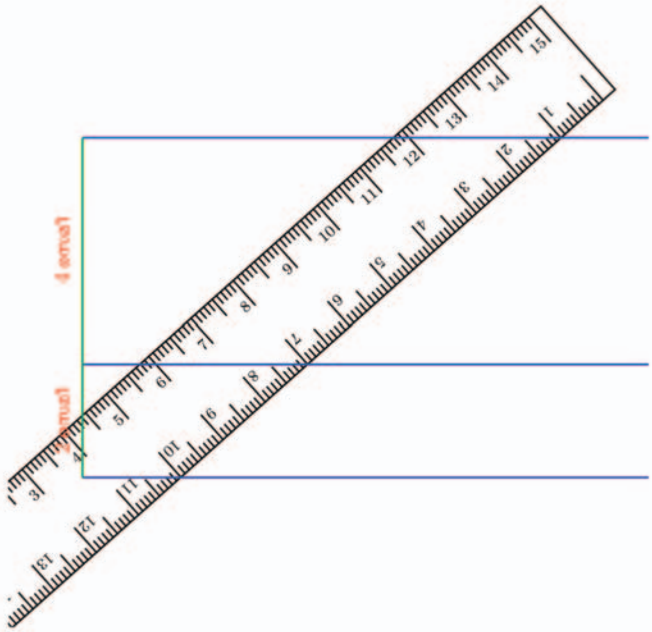
സമാന്തരവരകളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിച്ചു; അവയുപയോഗിച്ച് പലതും വരച്ചു. സമാന്തരവിശേഷങ്ങൾ ഇനിയുമുണ്ട് പലതും.

ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വരയും, അതിനു സമാന്തരമായി 2 സെന്റിമീറ്റർ താഴെ ഒരു വരയും, അതിനു സമാന്തരമായി 4 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിൽ മറ്റൊരു വരയും വരച്ചു തുടങ്ങാം:



ഇനി താഴത്തെ വരയിൽ എവിടെനിന്നും കുത്തനെ അളന്നാൽ, വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും തന്നെ:

ചരിച്ചളന്നാലോ?

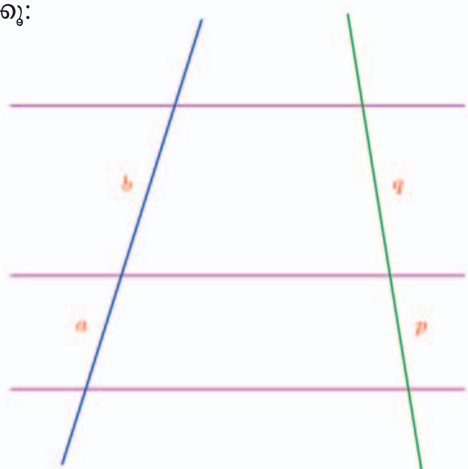


സ്കേലിന്റെ വലതുവക്ക് നോക്കൂ; ഈ ചരിവിൽ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

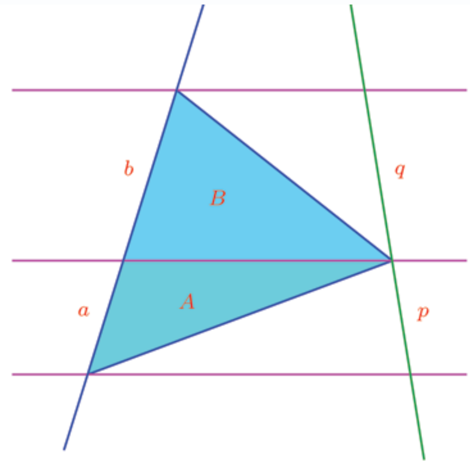
ഇനിയും പല രീതിയിൽ ചരിച്ചുവച്ചു നോക്കൂ; എന്താണ് കാണുന്നത്? എങ്ങനെ അളന്നാലും, ഏറ്റവും താഴത്തെ വരയും നടുവിലെ വരയും തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുതന്നെയല്ലേ, നടുവിലെ വരയും ഏറ്റവും മുകളിലെ വരയും തമ്മിലുള്ള അകലം?

മറ്റൊരുരീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, കുത്തനെയുള്ള അകലങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണോ ഏതു ചരിവിലുമുള്ള അകലങ്ങളുടേതും?

എങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാലും ഇതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യം നമ്മുടെ ഊഹമെന്താണെന്ന് കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



വിലങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തര വരകൾ; അവയെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന രണ്ടു ചരിഞ്ഞ വരകൾ. ഇടതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നും, വലതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം p, q എന്നുമെടുത്താൽ $a : b$ എന്ന അംശബന്ധവും, $p : q$ എന്ന അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണോ എന്നാണ് അന്വേഷിക്കേണ്ടത്.



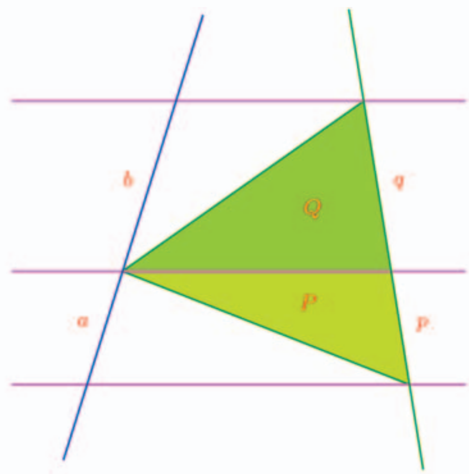
അതിന് ആദ്യം നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായ $a : b$ യെ രണ്ടു പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമായി മാറ്റാം:

വലതുവശത്തുള്ള ചിത്രത്തിൽ, $a : b$ എന്ന അംശബന്ധം, താഴെയും മുകളിലുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണല്ലോ (**പരപ്പളവ്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**)

ഈ പരപ്പളവുകളെ A, B എന്നെടുത്താൽ,

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

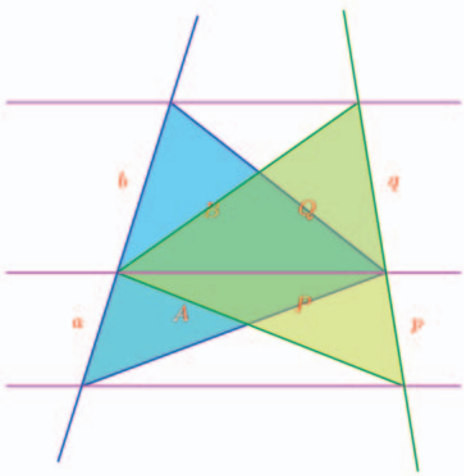
ഇതുപോലെ p, q എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെയും, പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമാക്കാം:



ചിത്രത്തിലേതുപോലെ, പച്ച ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ P, Q എന്നെടുത്താൽ,

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

ഇനി എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും ഒരുമിച്ചുവച്ചു നോക്കാം:



ഇപ്പോൾ താഴത്തെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെയും പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെയും ഒരു വശം ഒരേ വരയാണ്; അവയുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ ഈ വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്:

$$A = P$$

ഇതുതന്നെയല്ലേ മുകളിലെയും നീലയും പച്ചയും ത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യവും?

$$B = Q$$

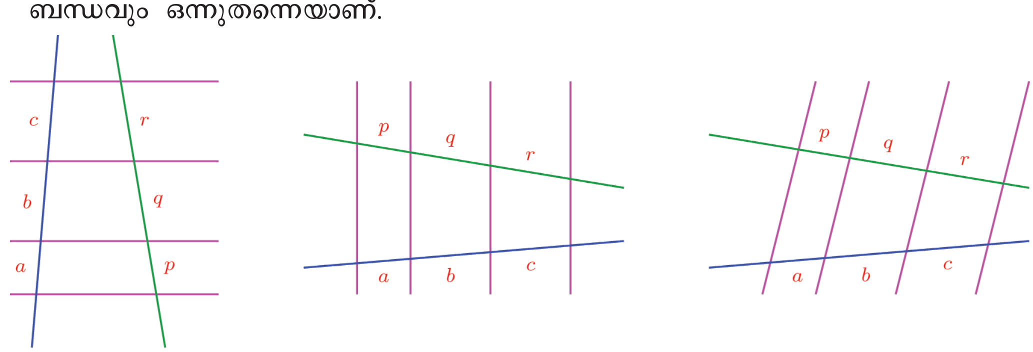
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ എന്നും, $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ എന്നും നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോൾ ഇതിലെ $A = P$ യും $B = Q$ യും ആണെന്നും കിട്ടി. അങ്ങനെ

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

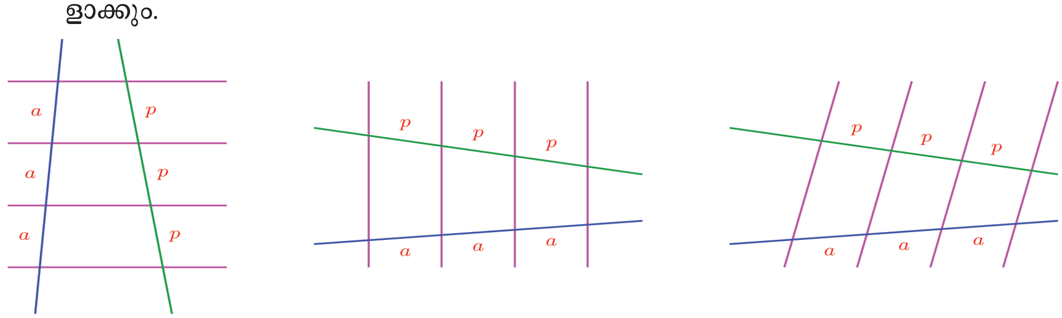
അതായത്, മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ ഏതു രണ്ടു വരകളേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്. മൂന്നിലധികം സമാന്തരവരകളായാലും, ഇതു പോലെതന്നെ തുടരാമല്ലോ:

മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ, ഏതു രണ്ടു വരകളെയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഉദാഹരണമായി ചുവടെയുള്ള മൂന്നു ചിത്രങ്ങളിലും a, b, c എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും p, q, r എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.



അപ്പോൾ ചില സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ സമഭാഗങ്ങളാക്കുകയാണെങ്കിലോ? ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ഇവ ഏതു വരയെയും സമഭാഗങ്ങളാക്കും.



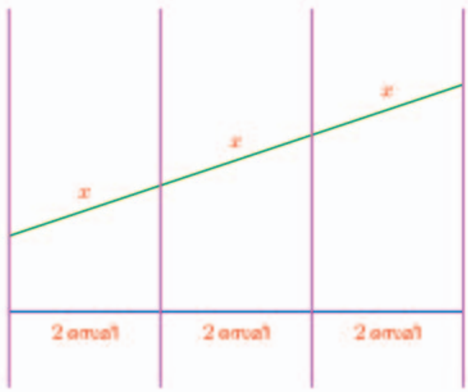
മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ തുല്യഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഏതു വരയെയും തുല്യഭാഗങ്ങളായിത്തന്നെ മുറിക്കും.

ഇനി ഈ തത്ത്വങ്ങളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ നോക്കാം.

7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കാം; ഒരറ്റത്തു നിന്ന് 3.5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു കുത്തിട്ടാലും മതി. മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയിൽ ഇതെളുപ്പമാണ്.

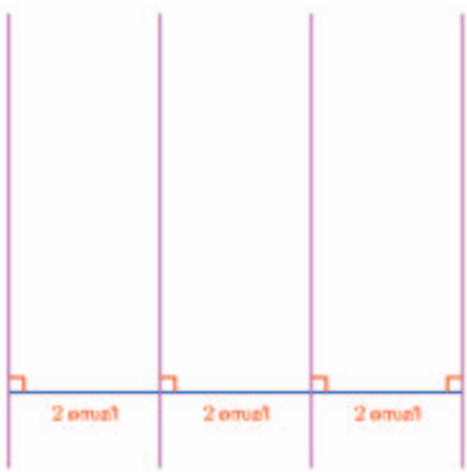
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന നാലു സമാന്തര വരകൾ, ഏതു വരയെയും മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:

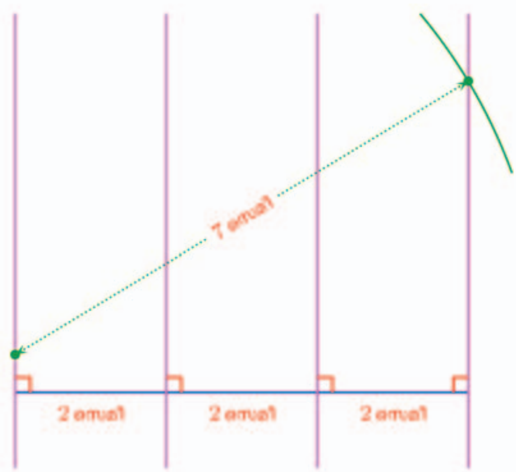


രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ നീളം 7 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാലോ?

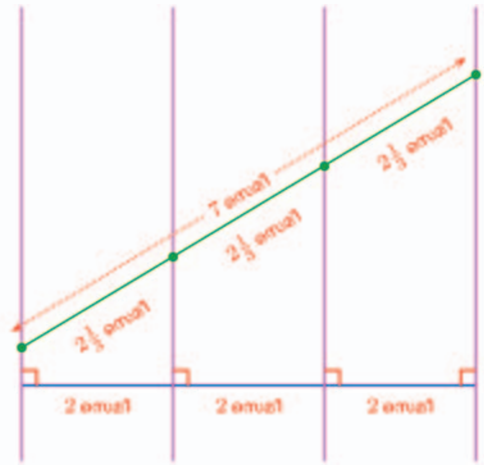
അപ്പോൾ നമ്മുടെ പ്രശ്നം തീർക്കാനുള്ള വഴി തെളിഞ്ഞില്ലേ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിൽ 2 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക; ആദ്യത്തെ ലംബത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, ഇത് അവസാനത്തെ ലംബത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.



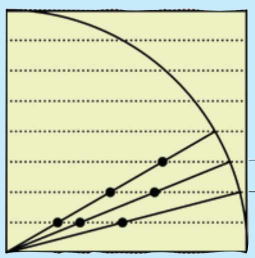


ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും, അതിന്റെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളുമായി:



വൃത്ത വിഭജനം

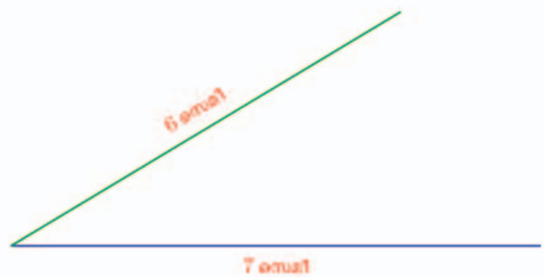
ചിത്രം നോക്കൂ:



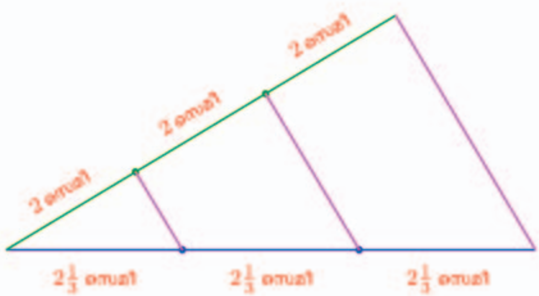
4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ, രണ്ടും മൂന്നും, നാലും സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നത് കണ്ടില്ലേ? ഇതുപോലെ എട്ട് സമഭാഗങ്ങൾ വരെ ഈ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ സാധിക്കുമല്ലോ. ഇതുപോലെ വരയിട്ട നോട്ടു പുസ്തകത്തിൽ ഒരു വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 7 സമഭാഗങ്ങളാക്കാമോ?

മറ്റൊരു രീതിയിലും വരയ്ക്കാം:

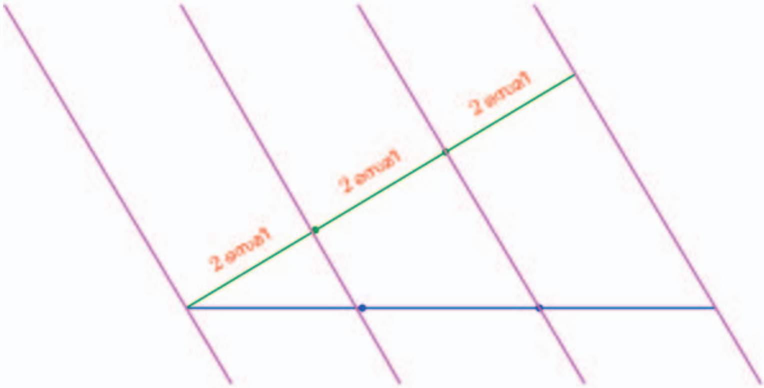
ആദ്യം 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വര അൽപം ചരിച്ചു വരയ്ക്കുക:



വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇനി താഴത്തെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, മുകളിലെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ആ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?



ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നു മനസിലായില്ലെങ്കിൽ, അൽപം നീട്ടിയ സമാന്തരവരകളും, നാലാമതൊരു സമാന്തരവരയും സങ്കൽപിച്ചുനോക്കൂ.



നിഴൽക്കണക്ക്

ഒരു മരത്തിന്റെ ഏറ്റവും താഴത്തെ ചില്ല വരെയുള്ള ഉയരം 1 മീറ്ററും അതുവരെയുള്ള നിഴലിന്റെ നീളം 2 മീറ്ററുമാണ്. നിഴലിന്റെ ആകെ നീളം 8 മീറ്റർ.

മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

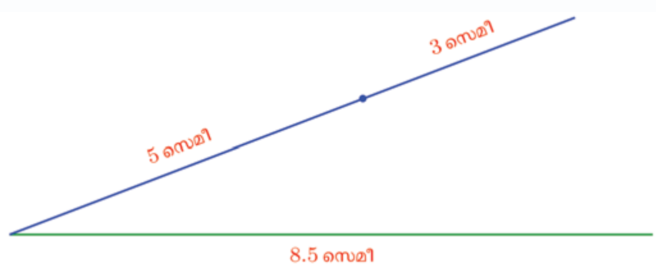
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഇവിടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവെന്താണ്?

നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഇതിന്റെതന്നെയായി, 17 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവിൽ ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

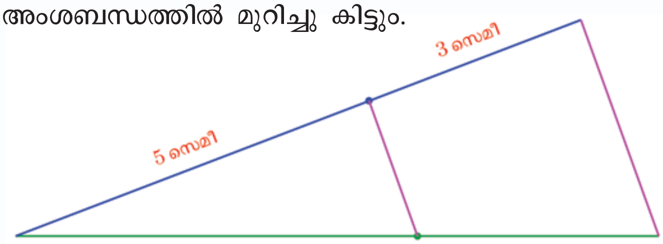
ചുറ്റളവ് 17 സെന്റിമീറ്ററെന്നാൽ, നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും തുക 8.5 സെന്റിമീറ്റർ. ഈ നീളമുള്ള വരയെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായി ചതുരം വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

അപ്പോൾ ആദ്യം 8.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കാം. ഇതിനെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ കണക്കിന്റെ രണ്ടാം വഴിയിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ മറ്റൊരു വരയും വരച്ച്, അതിനെ 5 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററുമായി ഭാഗിക്കാം:

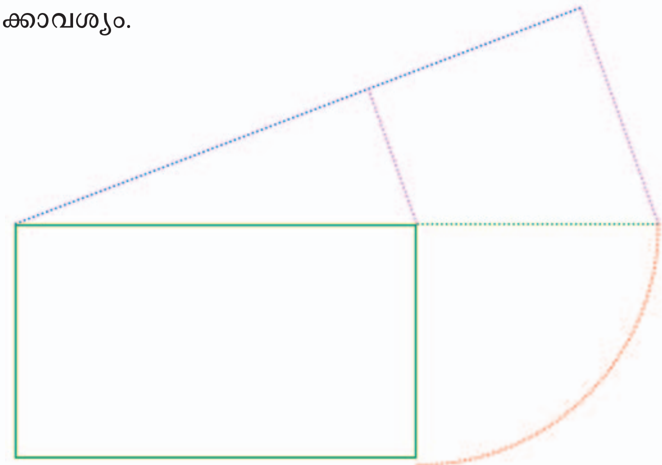


ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി AB എന്ന വരയും AC എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. Min = 0, Max = 1 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ c നിർമിക്കുക. A കേന്ദ്രമായി, ആരം AB യുടെ c ഭാഗം വരത്തക്കവിധം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. (ഇതിനായി വൃത്തത്തിന്റെ ആരം നൽകാനുള്ള ജാലകത്തിൽ c * AB എന്നോ ca എന്നോ നൽകിയാൽ മതി. a എന്നത് AB നീളമാണ്. ഈ വൃത്തം AB യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇതുപോലെ A കേന്ദ്രമായി ആരം AC യുടെ c ഭാഗം വരത്തക്കവിധം ഒരു വൃത്തം വരച്ച് ഇത് AC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AD, AE എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നീളങ്ങൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം? എന്തുകൊണ്ട്? സ്ലൈഡർ നിരക്കി, D, E ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. BC, DE എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക. അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

ഇനി വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച്, അതിനൊരു സമാന്തരവരയും വരച്ചാൽ, താഴത്തെ വരയും 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ മുറിച്ചു കിട്ടും.



ഈ കഷണങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായ ചതുരമാണ് നമുക്കാവശ്യം.

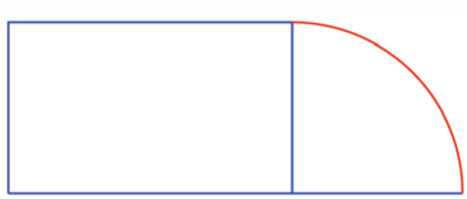


അൽപം വ്യത്യാസമുള്ള മറ്റൊരു കണക്ക്:

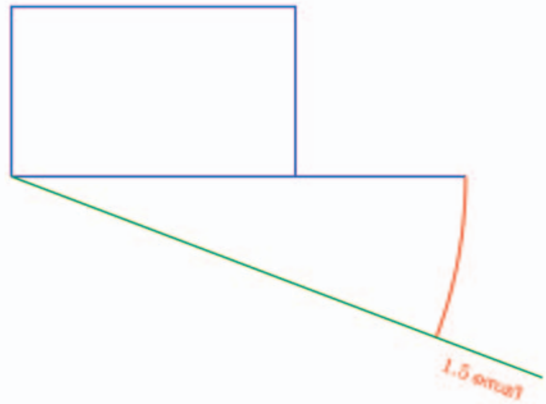
ഇവിടെ ഒരു ചതുരം വരച്ചിട്ടുണ്ട്:

ഇതിന്റെ നീളവും വീതിയുമൊന്നും പറഞ്ഞിട്ടില്ല. വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം മാറാതെ, ചുറ്റളവ് 3 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വരയ്ക്കണം.

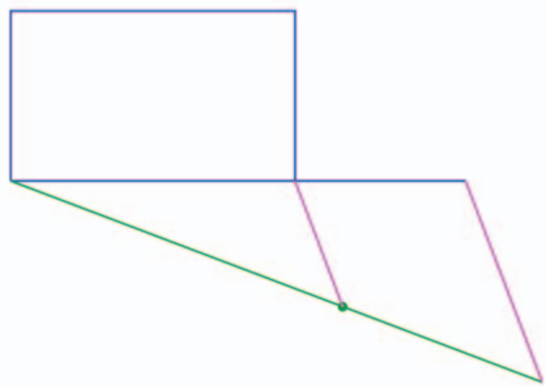
അതിനാദ്യം നീളവും വീതിയും ഒരു വരയിലാക്കാം:



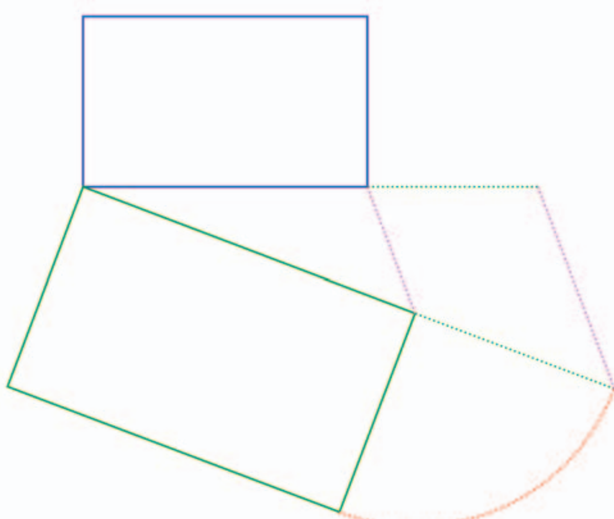
ഇനി ഇതിനു താഴെ, ഇതേ നീളമുള്ള വര അൽപം ചരിച്ചു വരച്ച്, അതിനെ 1.5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി നീട്ടാം: (എന്തുകൊണ്ട്?)



ഇനി പഴയതുപോലെ വരകളുടെ അറ്റം യോജിപ്പിച്ച്, സമാന്തരവര വരച്ച്, താഴത്തെ വരയെ ഭാഗിക്കാം:



ഇനി ഈ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളും നീളവും വീതിയുമായി ചതുരം വരച്ചാൽ മതി:



(1) 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വര വരച്ച് അതിനെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുക.

(2) 15 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവും, വീതിയും നീളവും 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

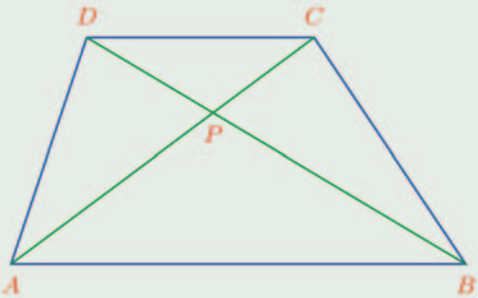
(3) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള ത്രികോണം, ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കുക

i) സമഭുജത്രികോണം.

ii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 : 5

iii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 4

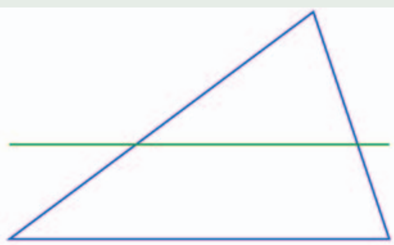
(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ *ABCD* എന്ന ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ *P* എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു:



$PA \times PD = PB \times PC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

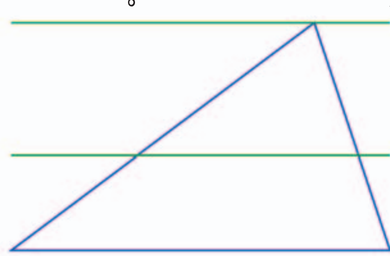
ത്രികോണഭാഗം

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽത്തന്നെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വര വരയ്ക്കുക:



ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽ മൂലയിലൂടെ ഒരു വര കൂടി താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചാലോ?



ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. AB എന്ന വശത്ത് ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തി, അതിലൂടെ BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര AC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. D, E എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ AB, AC എന്നീ വരകളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ മുറിക്കുന്നതെന്ന് പരിശോധിക്കൂ. നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാവുന്നതാണ്.

ഇപ്പോൾ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നു; മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒന്നു തന്നെ ആയിരിക്കണം. ഈ ഭാഗങ്ങൾ, ആദ്യം വരച്ച വര വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്?

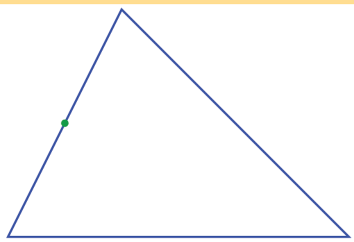
ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് മുറിക്കുന്നത്.

ഇങ്ങനെ സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ഒരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടിയാണെങ്കിലോ?

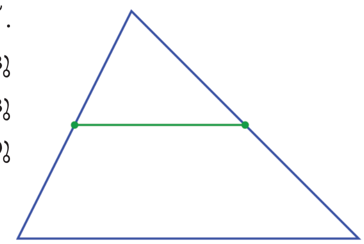
ആ വശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തുല്യമാണ്; ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞ തത്വമനുസരിച്ച്, മറ്റേ വശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളും തുല്യമാകണം. ഇതും എടുത്തു പറയേണ്ട ഒരു കാര്യമാണ്:

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തെ മുട്ടുന്നതും അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലാണ്.

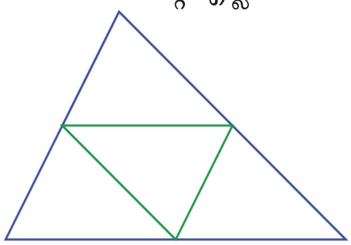
ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:

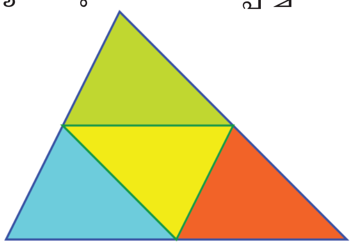


ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ താഴത്തെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരവര വരയ്ക്കണം. ഈ വര വലതുവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നു പോകുമെന്നാണല്ലോ കണ്ടത്. അപ്പോൾ, വലതുവശത്തിന്റെയും മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി, ഇടതുവശത്തെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായ വരയായി:



ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?





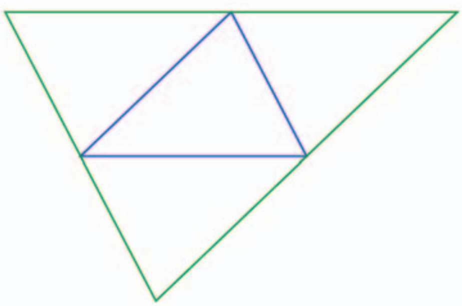
ഈ നാലു ചെറുത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം? നടുവിലെ മഞ്ഞ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാണ്.

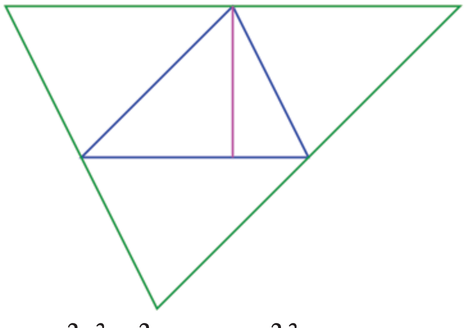
ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യം നീലത്രികോണവും മഞ്ഞത്രികോണവും എടുക്കാം. നീലത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശവും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശവും ഒരേ വരയാണ്. നീലത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ താഴെയുള്ള കോണും തുല്യമാണ്; മറിച്ചും (എന്തുകൊണ്ട്?) അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്. ഇതുപോലെ പച്ചത്രികോണവും, ചുവന്ന ത്രികോണവും എല്ലാം മഞ്ഞത്രികോണത്തിനു തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അതായത്, ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്.

ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കിട്ടും. ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോ വശവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ പകുതിയാണ്. അതായത്,

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ നീളം, മൂന്നാമത്തെ വരയുടെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇനി ഒരു ചെറിയ ത്രികോണത്തിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ഓരോ മൂലകളിലൂടെയും എതിർവശത്തിനു സമാന്തരവര വരച്ചാലോ?



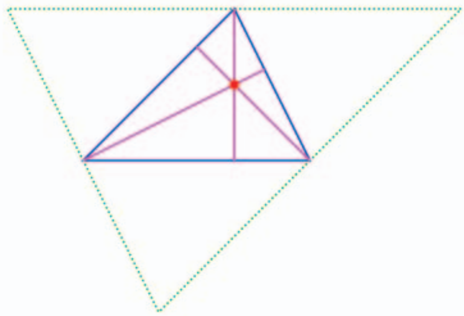


ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു പകർപ്പുകൾ കൂടി ചേർത്തുവച്ച വലിയ ത്രികോണമായി, അല്ലേ?

ഇതിൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ്.

അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലകളിൽ നിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്ക് ലംബം വരച്ചാലോ? വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികളായി. ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ

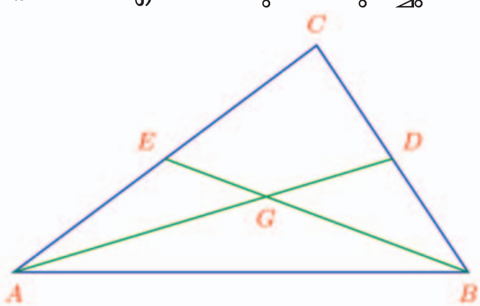
ലംബസമഭാജികളെല്ലാം ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്ന് **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ:



ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തേയ്ക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും.

ഇതേ തത്വം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്നും തെളിയിക്കാം. ഇത്തരമൊരു വരയെ ത്രികോണത്തിന്റെ നടുവര (median) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

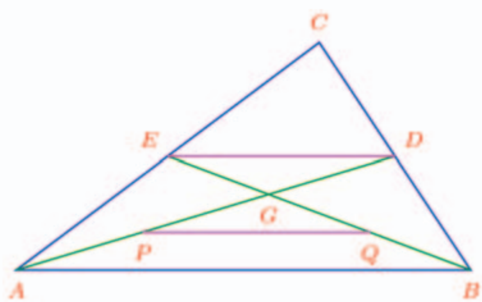
ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ രണ്ടു മൂലകളിൽനിന്നുമുള്ള നടുവരകൾ G എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു.



ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്. അതായത്,

$$ED = \frac{1}{2} AB$$

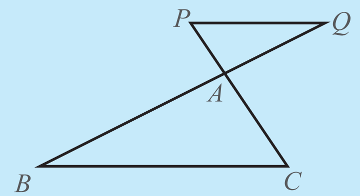
ഇനി താഴത്തെ വശത്തിന്മേൽത്തന്നെ GAB എന്ന മറ്റൊരു ചെറിയ ത്രികോണമുണ്ടല്ലോ; അതിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾകൂടി യോജിപ്പിച്ചാലോ?



$$PQ = \frac{1}{2} AB$$

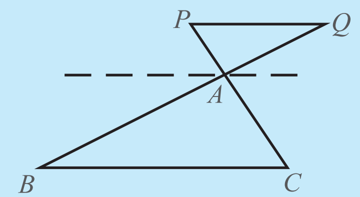
ത്രികോണ ബാഹ്യം

ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി ത്രികോണത്തിനു പുറത്ത് വരച്ചാലും ആ വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഖണ്ഡിക്കുന്നതെന്നു കാണാം. ചിത്രം നോക്കൂ.



BC യ്ക്കു സമാന്തരമാണ് PQ

A യിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വര കൂടി വരയ്ക്കുക.



അപ്പോൾ

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AQ}$$

കൂടാതെ, ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\frac{PC}{AP} = \frac{AP + AC}{AP} = 1 + \frac{AC}{AP}$$

$$\frac{QB}{AQ} = \frac{AQ + AB}{AQ} = 1 + \frac{AB}{AQ}$$

എന്നും കാണാം.

ഈ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

അപ്പോൾ

$$PQ = ED$$

$PQDE$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ, PQ, ED എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായതിനാൽ, ഈ ചതുർഭുജമൊരു സാമാന്തരികമാണ്; അതിനാൽ അവയുടെ വികർണങ്ങളായ PD, QE ഇവ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യും; അതായത്,

$$PG = GD$$

AG യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണല്ലോ, P; അപ്പോൾ

$$AP = PG = GD$$

ഇതുപോലെ

$$BQ = QG = GE$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, നടുവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു, അവയെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.

ഇനി A, B, ഇവയിലൂടെയുള്ള നടുവരകൾക്കു പകരം, B, C എന്നീ മൂലകളിലൂടെയുള്ള നടുവരകളാണ് വരയ്ക്കുന്നതെങ്കിലോ?

അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു BE യെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും; അതായത്, മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു G തന്നെയാണ്.

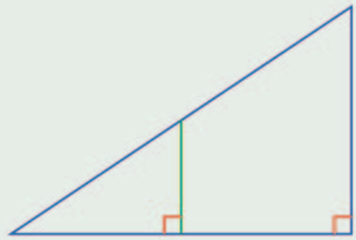
ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും നടുവരകൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും; ആ ബിന്ദു നടുവരകളെയെല്ലാം, മൂലകളിൽനിന്ന് 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും.

നടുവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം (centroid) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ നീളവും, ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെ നീളവും കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, കർണത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക:

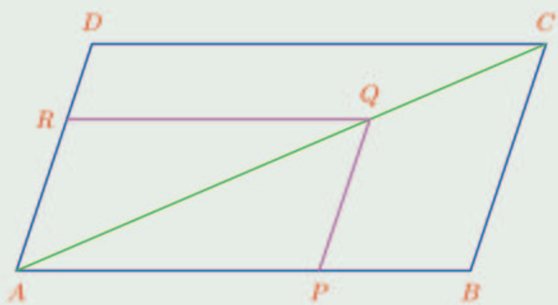


i) ഈ ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് മൂന്നു മൂലകളിലേയ്ക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

iii) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, കർണത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

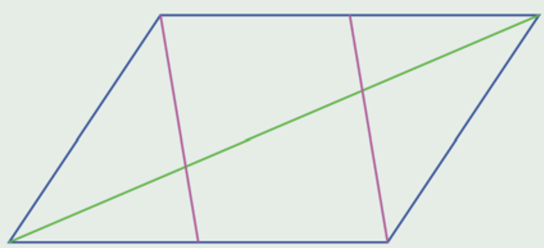
(3) $ABCD$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ AB യിലെ ഒരു ബിന്ദു P യിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര AC യുമായി Q ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. Q യിലൂടെ AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, AD യുമായി R ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു:



i) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AR}{RD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AR}{AD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

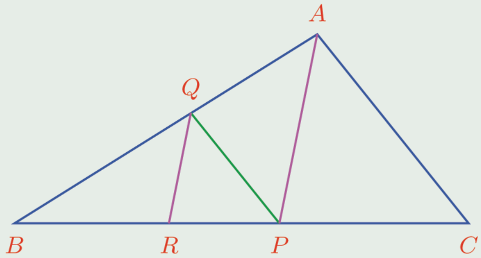
(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലകളെ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു:



ഈ വരകൾ ചിത്രത്തിലെ വികർണത്തെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

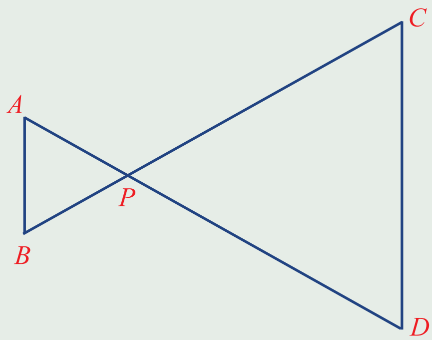
(5) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികം ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക. ആദ്യത്തെ ചതുർഭുജം ചതുരമായാലോ? സമഭുജസാമാന്തരികമായാലോ?

(6) ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, BC യിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ AC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, AB യുമായി Q യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. Q യിൽ നിന്ന് AP യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, BC യുമായി R ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു:



$\frac{BP}{PC} = \frac{BR}{RP}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(7) ചിത്രത്തിൽ AB, CD എന്നിവ സമാന്തരമാണ്.



$AP \times PC = BP \times PD$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

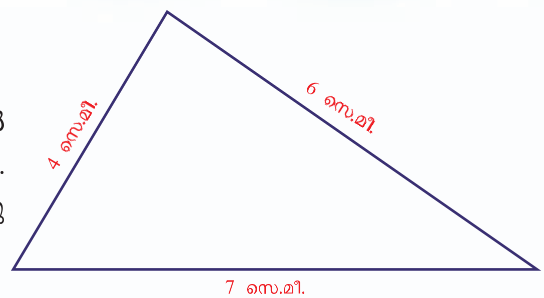
പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• സമാന്തരവരകൾ മറ്റു വരകളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ മുറിക്കുന്നു എന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഇതുപയോഗിച്ച് ഏത് വരയേയും നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ മുറിക്കാൻ കഴിയുന്നു.			
• അംശബന്ധം മാറാതെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കൂട്ടിയും, കുറച്ചും വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്നു.			
• ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നതിന്റെ കണക്ക് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം എന്ന ആശയം വിശദീകരിക്കുന്നു.			

7

ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യം

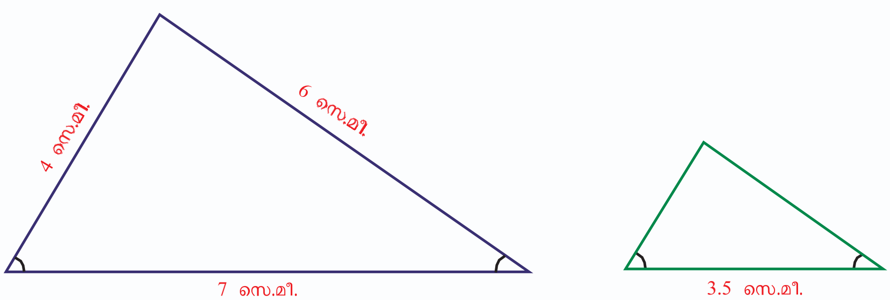
കോണുകളും വശങ്ങളും

വശങ്ങളുടെ നീളം പറഞ്ഞാൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ അറിയാമല്ലോ. വശങ്ങൾ 4, 6, 7 സെന്റിമീറ്ററായി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

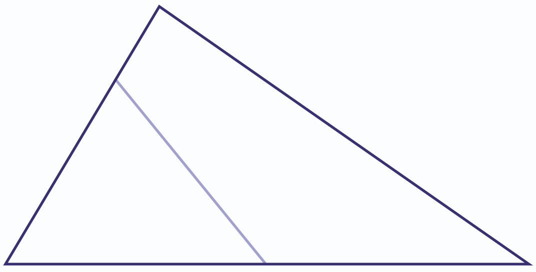


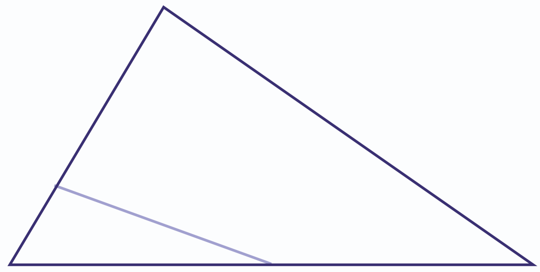
ഇനി ഇതൽപ്പം ചെറുതാക്കി വരയ്ക്കണം. ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന് പകുതി നീളം മതി; അതായത് 3.5 സെന്റിമീറ്റർ. ഒരു കാര്യംകൂടിയുണ്ട്; കോണുകളൊന്നും മാറരുത്. എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം അളക്കുക; 3.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴെയുള്ള കോണുകൾ വരയ്ക്കുക:



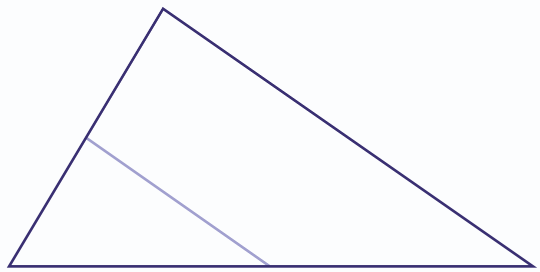
കോണുകൾ അളക്കാതെ കുറെക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാൻ വല്ല വഴിയുമുണ്ടോ? വലിയ ത്രികോണത്തിൽത്തന്നെ ഏറ്റവും വലിയ വശം പകുതിയാക്കി വരയ്ക്കാൻ പറ്റുമോ എന്നുനോക്കാം. താഴത്തെ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ ഏതു വര വരച്ചാലും, ഒരു വശം 3.5 സെന്റിമീറ്ററും, ഒരു കോൺ ഈ ത്രികോണത്തിന്റേതു തന്നെയുമായ ചെറുത്രികോണം കിട്ടും:





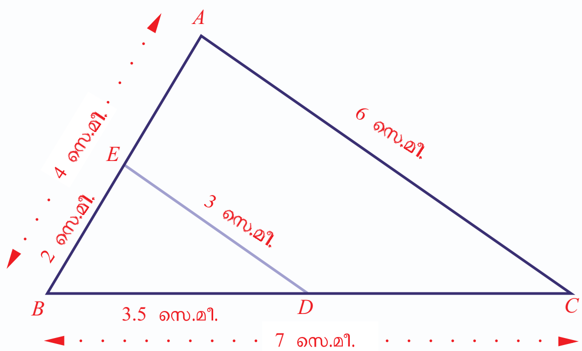
പക്ഷേ ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ വലതുവശത്തെ കോൺ വലുതും, മുകളിലെ കോൺ ചെറുതുമായിപ്പോയി; രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മറിച്ചും. കോണുകൾ തുല്യമായി വരയ്ക്കാൻ എന്താണുവഴി?

വലതുവശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചാലോ?



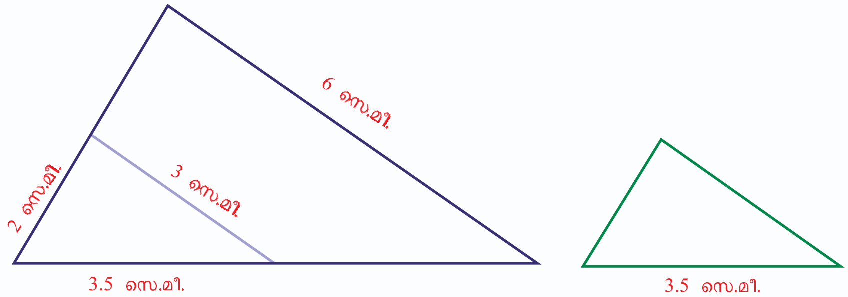
ഇപ്പോൾ കോണുകളെല്ലാം ശരിയായില്ലേ? (എങ്ങനെ?)

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യവും കാണാം. ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ വര, ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ വലതുവശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചതാണ്; അതിനാൽ ഈ വര ഇടതുവശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും; മാത്രവുമല്ല, ഇതിന്റെ നീളം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയുമാണ് (**സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**)

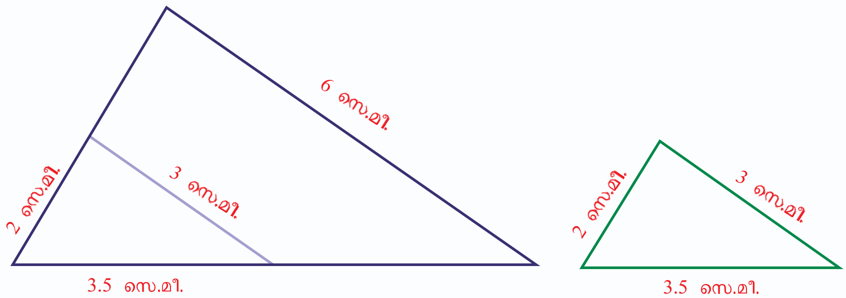


അതായത്, കോണുകൾ മാറ്റാതെ വലിയ വശം മാത്രം പകുതിയാക്കി ഇങ്ങനെ വരച്ചപ്പോൾ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും പകുതിയായി.

നേരത്തെ കോണളന്നു വരച്ച ത്രികോണത്തിനും ഇതു ശരിയാണോ?



ഇടതു ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിലും, വലതു ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിലും താഴത്തെ വശത്തിന് ഒരേ നീളമാണ്; വരച്ചതനുസരിച്ച് അതിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലെ കോണുകൾക്കും ഒരേ വലുപ്പംതന്നെ. അതിനാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ് (എട്ടാം ക്ലാസിലെ തുല്യ **ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം)



ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായാലും ഇതു ശരിയാകുമല്ലോ. അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ മാറ്റാതെ ഏറ്റവും വലിയ വശം പകുതിയാക്കിയാൽ, മറ്റു വശങ്ങളും പകുതിയാകും.

ഇവിടെ ചില ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്:

- പകുതിക്കു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും മടങ്ങോ ഭാഗമോ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമോ?
- ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിനു പകരം, ഏറ്റവും ചെറിയ വശമോ ഇടത്തരം വശമോ മാറ്റിയാലും ഇതു ശരിയാകുമോ?

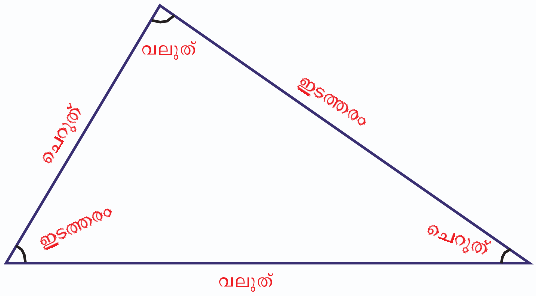
അംശബന്ധങ്ങളുടെ ഭാഷ ഉപയോഗിച്ച്, രണ്ടു ചോദ്യങ്ങളും ചേർത്ത് ഒന്നാക്കാം:

> ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ വശങ്ങൾ തമ്മിലും, ഇടത്തരം വശങ്ങൾ തമ്മിലും, ഏറ്റവും വലിയ വശങ്ങൾ തമ്മിലുമെല്ലാം ഒരേ അംശബന്ധമാണോ?

ഇതിൽ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളെ വേർതിരിച്ചു പറയാൻ ചെറുത്, ഇടത്തരം, വലുത് എന്നിങ്ങനെ പറയുന്ന

ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0 ആയി ഒരു സ്ലൈഡർ d ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് നീളം AB യുടെ d മടങ്ങോ ഭാഗമോ വരത്തക്കവിധം ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇതിനായി വരയുടെ നീളം dAB എന്നു കൊടുത്താൽ മതി. ഇനി $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ ആകത്തക്കവിധം ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കണം. ഇതിനായി Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് E, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α, $\angle A$ യുടെ അളവ് നൽകുക. അതേപോലെ D, E എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ β എന്ന് clockwise ആയി നൽകുക. DE′, ED′ എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ? കോണുകളും സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിച്ച് മാറ്റി നോക്കൂ.

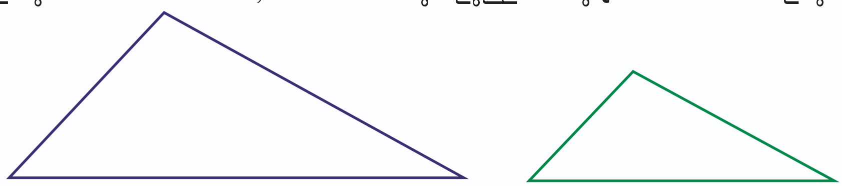
തിനു പകരം മറ്റൊരുരീതിയുണ്ട്. ഏതു ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങളുടെ വലുപ്പം, അവയുടെ എതിരെയുള്ള കോണുകൾക്കനുസരിച്ചാണല്ലോ.



അപ്പോൾ നമ്മുടെ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാകും:

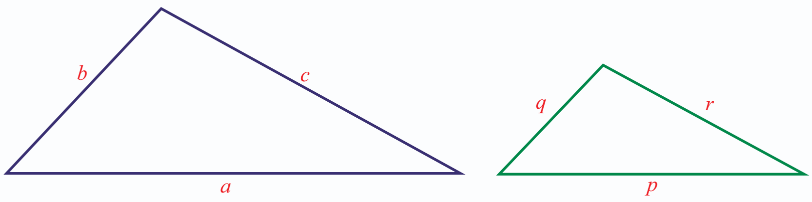
> ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ രണ്ടു കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികളെല്ലാം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളെടുക്കാം:

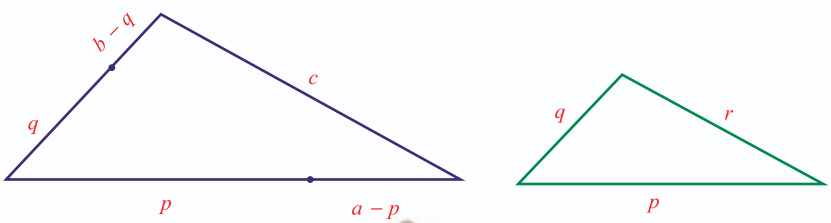


ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും ഇടതുകോണുകൾക്കും, വലതു കോണുകൾക്കും, മുകളിലെ കോണുകൾക്കും ഒരേ വലുപ്പമാണ്. ഇവയുടെ താഴത്തെ വശങ്ങൾ തമ്മിലും, ഇടതുവശങ്ങൾ തമ്മിലും വലതുവശങ്ങൾ തമ്മിലും ഒരേ അംശബന്ധമാണോ എന്നാണ് പരിശോധിക്കേണ്ടത്.

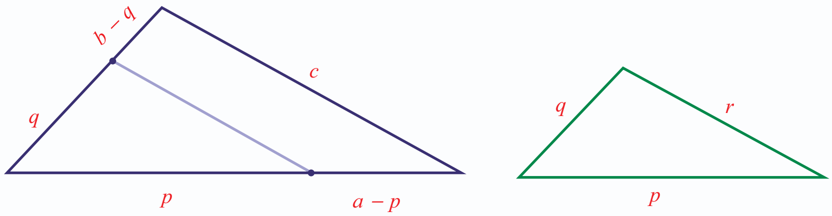
വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c എന്നും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം p, q, r എന്നും ചുവടെക്കാണുന്നതു പോലെ എടുക്കാം:



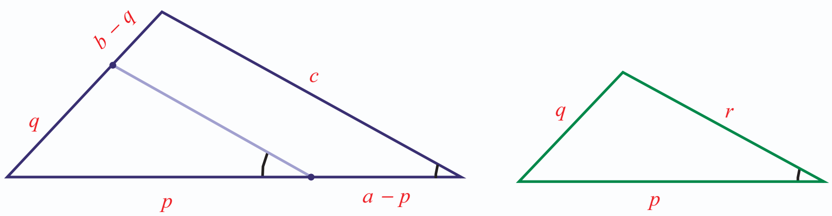
ആദ്യം താഴത്തെയും ഇടതുവശത്തെയും നീളങ്ങൾ ഒത്തുനോക്കാം. അതിന്, ചെറിയ നീളങ്ങൾ, വലിയ നീളങ്ങളിൽത്തന്നെ അടയാളപ്പെടുത്താം.



ഈ സ്ഥാനങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചു വരച്ചാലോ?



ഇപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ അകത്തും പുറത്തുമുള്ള ചെറുത്രികോണങ്ങളിൽ താഴത്തെ വശങ്ങളും ഇടതുവശങ്ങളും തുല്യമാണ്; ഇവ ചേരുന്ന കോണുകളും തുല്യമാണ്. അതിനാൽ ഇവയുടെ മറ്റു കോണുകളും തുല്യമാണ് (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). മാത്രവുമല്ല, ആദ്യമേ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, പുറത്തെ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾതന്നെയാണ്. അപ്പോൾ ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്.



വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വലതുവശവും, ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ വരയും, താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലായതിനാൽ അവ സമാന്തരമാണ്; അപ്പോൾ ഉള്ളിലെ വര മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെയും ഭാഗിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാകണം. അതായത്,

$$\frac{a-p}{p} = \frac{b-q}{q}$$

ഇതു ലഘൂകരിച്ച്

$$\frac{a}{p} - 1 = \frac{b}{q} - 1$$

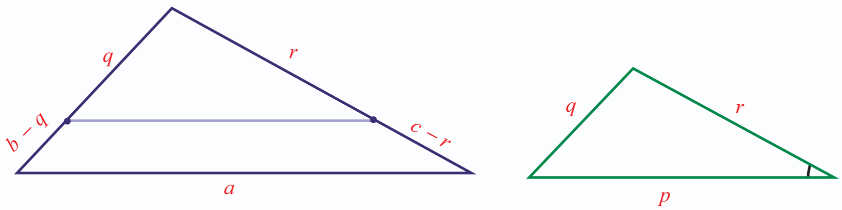
എന്നും തുടർന്ന്

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$$

ഇതുപോലെ, പുറത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം വലിയ ത്രികോണത്തിലെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ

$$\frac{b-q}{q} = \frac{c-r}{r}$$

എന്നു കിട്ടും:



ഇതിൽ നിന്ന്

$$\frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

എന്നും കാണാം.

ഇപ്പോൾ കണ്ട രണ്ടു കാര്യങ്ങളും ചേർത്ത് $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ എന്നെഴുതാം.

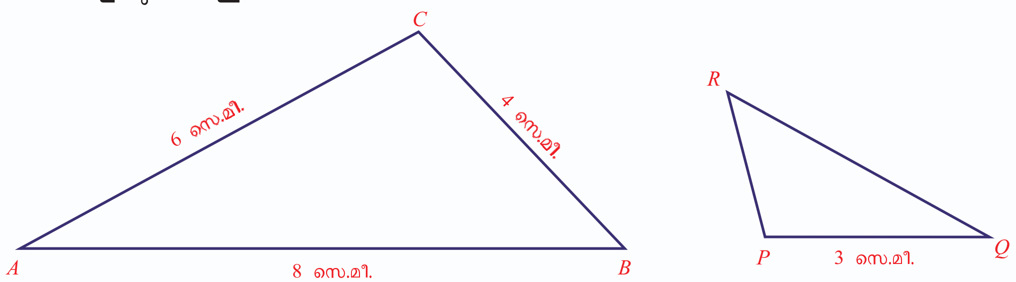
ഇതിൽ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെക്കുറിച്ചോ, വശങ്ങളെക്കുറിച്ചോ പ്രത്യേകിച്ചെന്തെങ്കിലും പറയാത്തതിനാൽ, ഇക്കാര്യം എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും ശരിയാണ്.

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, രണ്ടു തുല്യ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികളെല്ലാം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിലും പറയാം: ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളെടുത്താൽ, അതിലൊന്നിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശം മറ്റൊന്നിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണോ അത്രയും മടങ്ങോ ഭാഗമോ തന്നെയാകണം ഇടത്തരം വശങ്ങളും ഏറ്റവും വലിയ വശങ്ങളും. ഈ മടങ്ങിനെ, അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗത്തിനെ, മാറ്റത്തിന്റെ തോത് (scale factor) എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്.

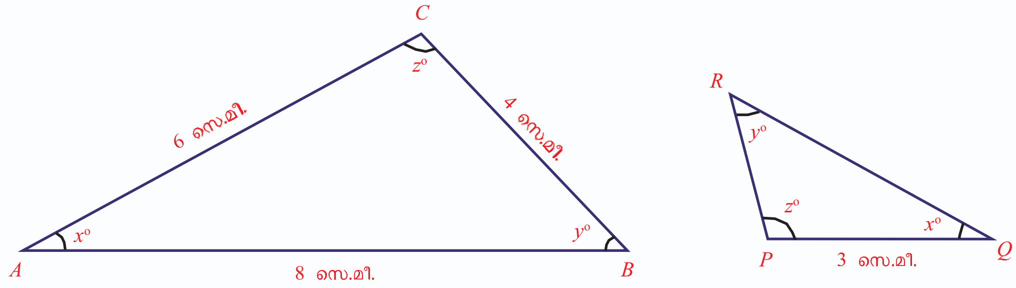
ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്:



$$\angle P = \angle C \quad \angle Q = \angle A \quad \angle R = \angle B$$

PQR എന്ന ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ആദ്യം കോണുകളുടെ അളവുകൾ x°, y°, z° എന്നെടുത്ത്, ചിത്രത്തിൽ തുല്യമായ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം.



ഇനി തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികൾ എഴുതാം.

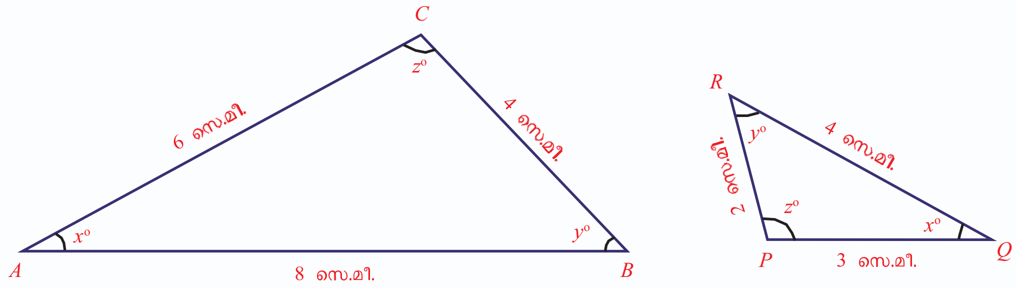
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

ഇതിൽ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെയും നീളം അറിയാമല്ലോ.

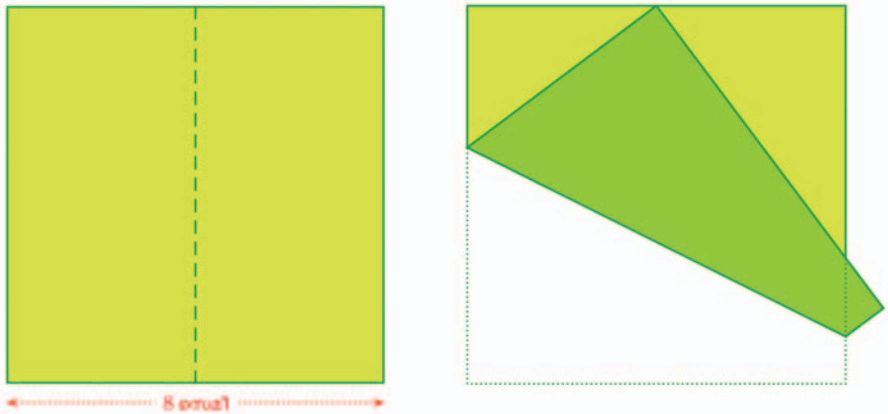
x	BC	$= 4$	PR
y	AC	$= 6$	$PQ = 3$
z	AB	$= 8$	QR

ഇതിൽ y° കോണിന്റെ എതിർവശങ്ങളിൽ, വലുതിന്റെ പകുതിയാണ് ചെറുത്. അപ്പോൾ മറ്റു കോണുകളുടെയും എതിർവശങ്ങളും ഇങ്ങനെതന്നെ ആകണം.

x	BC	$= 4$	$PR = 2$
y	AC	$= 6$	$PQ = 3$
z	AB	$= 8$	$QR = 4$

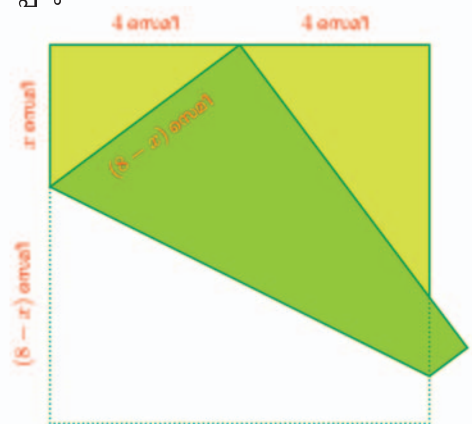


മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കടലാസിന്റെ താഴത്തെ ഒരു മൂല, മുകൾവശത്തിന്റെ കൃത്യം നടുവിലേക്ക് മടക്കിവയ്ക്കുന്നു.



ഇപ്പോൾ മുകളിൽ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടിയില്ലേ? ഇവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണെന്നു നോക്കാം.

ഇടതു ത്രികോണത്തിലെ കുത്തനെയുള്ള വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



അപ്പോൾ ഇടത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, പൈഥാഗറസ് തത്വം ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$(8-x)^2 - x^2 = 4^2$$

ഇതു ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയാക്കാം.

$$8(8-2x) = 16$$

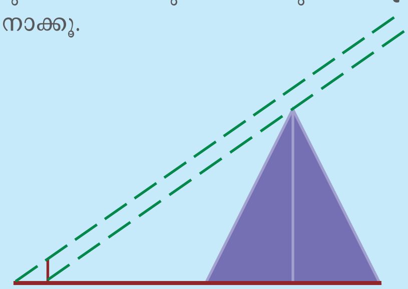
ഇതിൽ നിന്ന് $x = 3$ എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 5 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

വളരെപ്പഴയ നിഴൽക്കണക്ക്

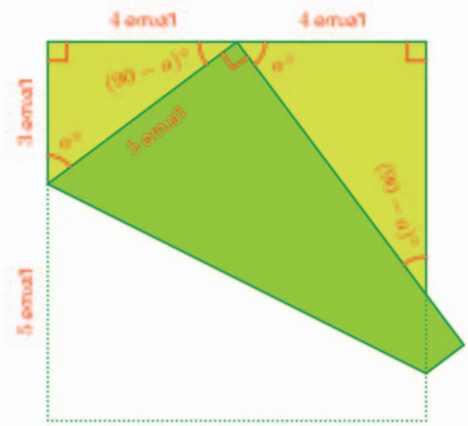
ഗ്രീസിലെ ഗണിതജ്ഞനായ ഥേലീസ്, ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യത എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച്, കടലിൽക്കിടക്കുന്ന കപ്പലിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കിയ കഥ കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ?

ഥേലീസിനെക്കുറിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു കഥയുണ്ട്. ഈജിപ്റ്റിലെ രാജാവ്, ഒരു പിരമിഡിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കാൻ ഥേലീസിനോട് ആവശ്യപ്പെട്ടുവത്രേ. ഥേലീസിന്റെ മാർഗം ഇങ്ങനെയാണ് രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. “പിരമിഡിന്റെ നിഴലിന്റെ അറ്റത്ത്, സ്വന്തം വടി കുത്തിനിർത്തി, സൂര്യരശ്മികളുണ്ടാക്കിയ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, നിഴലുകളുടെ അംശബന്ധം, പിരമിഡിന്റേയും വടിയുടേയും അംശബന്ധത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് കാണിച്ചു.”

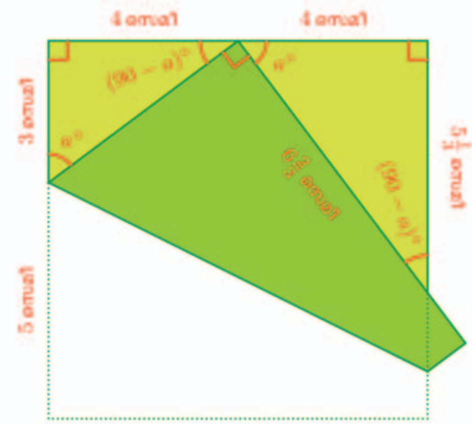
ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കൂ.



വലതു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ നോക്കാം. ഇടതു ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ കോൺ a° എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു കോണുകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

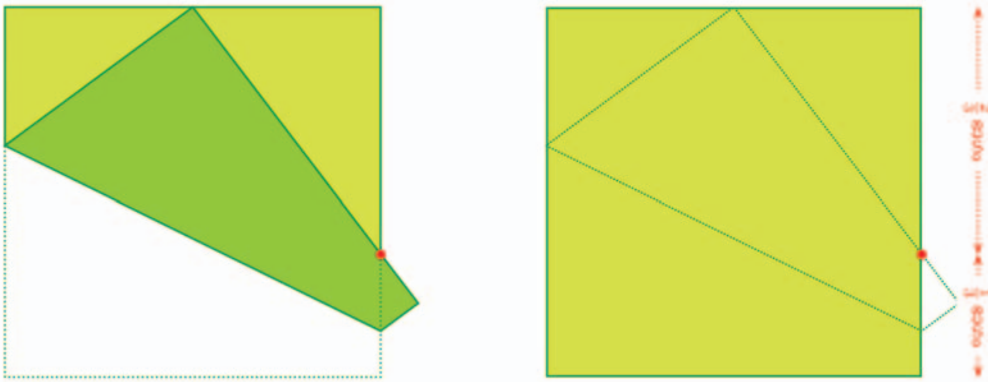


രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, തുല്യകോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. ഇടതു ത്രികോണത്തിലെ $(90-a)^\circ$ കോണിനെതിരെയുള്ള വശം 3 സെന്റിമീറ്ററും, വലതു ത്രികോണത്തിൽ 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അപ്പോൾ, വലതു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടാമത്തെ ലംബവശവും, കർണവും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ ഈ വശങ്ങളുടെ $\frac{4}{3}$ മടങ്ങാണ്. അതായത് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ ചിത്രത്തിലേതുപോലെയാണ്.

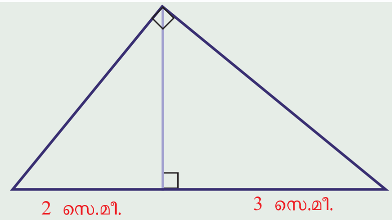


ഏതു വലുപ്പത്തിലുള്ള സമചതുരക്കടലാസ് ഇങ്ങനെ മടക്കിയാലും കിട്ടുന്ന രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 4 : 5 ആകുമോ?

മറ്റൊന്നുകൂടിയുണ്ട്: മടക്കിയ വശം വലതുവശത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തി, കടലാസ് വീണ്ടും നിവർത്തിയാൽ, വലതുവശത്തിന്റെ മൂന്നിലൊരു ഭാഗം കിട്ടും:



(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്ന് കർണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, കർണത്തിനെ 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.



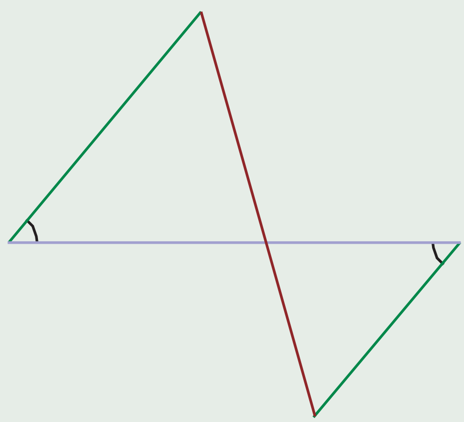
i) ലംബം മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ii) ലംബത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

iii) വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

iv) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്നു കർണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നും, അത് കർണത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം a, b, എന്നുമെടുത്താൽ $h^2 = ab$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) വിലങ്ങനെയുള്ള ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള കോണുകൾ മുകളിലും താഴെയുമായി വരച്ച്, ചരിഞ്ഞ വരകളിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്നു.

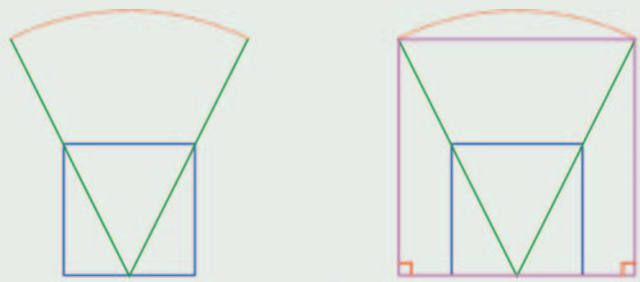


i) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും, ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള ചരിഞ്ഞ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

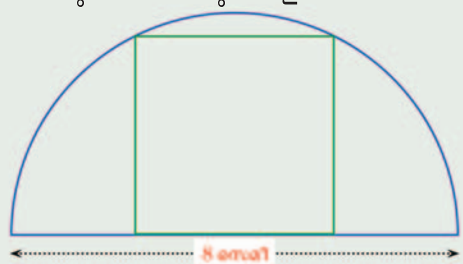
iii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുക.

(3) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും മുകൾ വശത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളും യോജിപ്പിച്ച്, ഒരേ നീളത്തിൽ നീട്ടുന്നു. ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുകയും, അവയിൽനിന്ന് സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം നീട്ടിയ വരയിലേക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

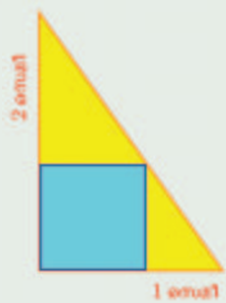


i) ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജവും സമചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ, ഒരു അർധവൃത്തത്തിൽ രണ്ടു മൂലകളും, അതിന്റെ വ്യാസത്തിൽ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുമായി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.



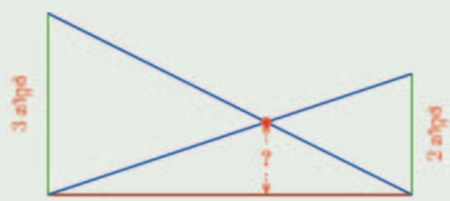
(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ മട്ടമൂലയും, മൂന്നു വശങ്ങളിലെയും ഓരോ ബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി ഒരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



i) സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ii) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(5) 3 മീറ്ററും 2 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ കുത്തനെ നിലത്തു നാട്ടി. ഓരോ കമ്പിന്റെയും മുകളറ്റത്ത് നിന്ന് മറ്റെ കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിലേക്ക് കയർ വലിച്ചു കെട്ടിയിരിക്കുന്നു.



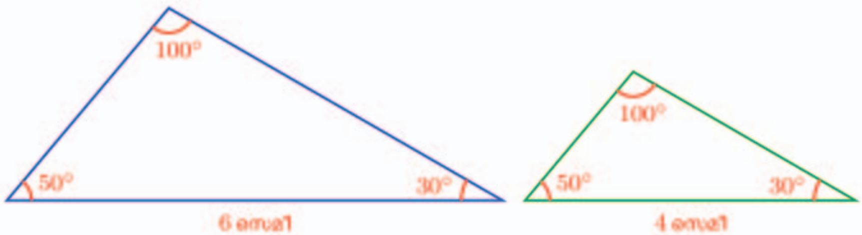
i) കയറുകൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, നിലത്തുനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?

ii) കമ്പുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയായാലും ഈ ഉയരം മാറുന്നില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

iii) കമ്പുകളുടെ നീളം a, b എന്നും, കയറുകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നുമെടുത്ത് a, b, h ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

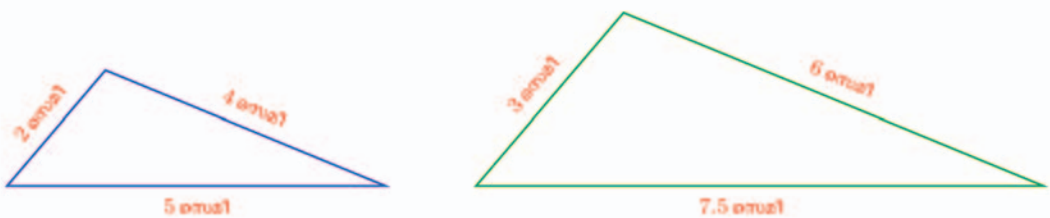
വശങ്ങളും കോണുകളും

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്നു കണ്ടു. ഉദാഹരണമായി ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ.



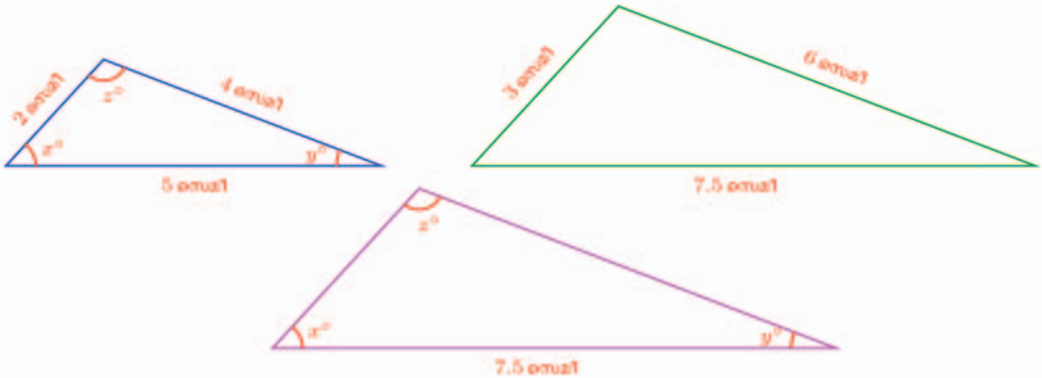
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണ്; ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശവും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗം തന്നെയാണ്; ഇടത്തരം വശങ്ങളും ഇതുപോലെതന്നെ.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതാക്കുകയോ വലുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ കോണുകൾ മാറാതിരിക്കുമോ?

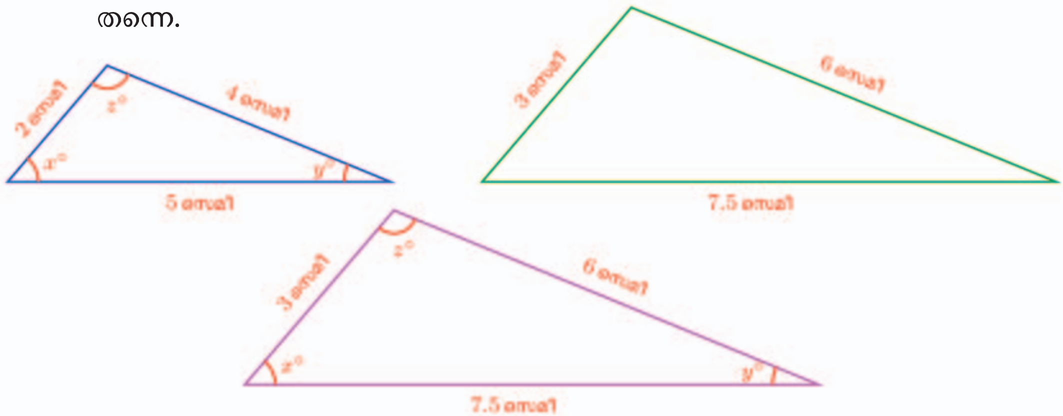


ചിത്രത്തിൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണോ?

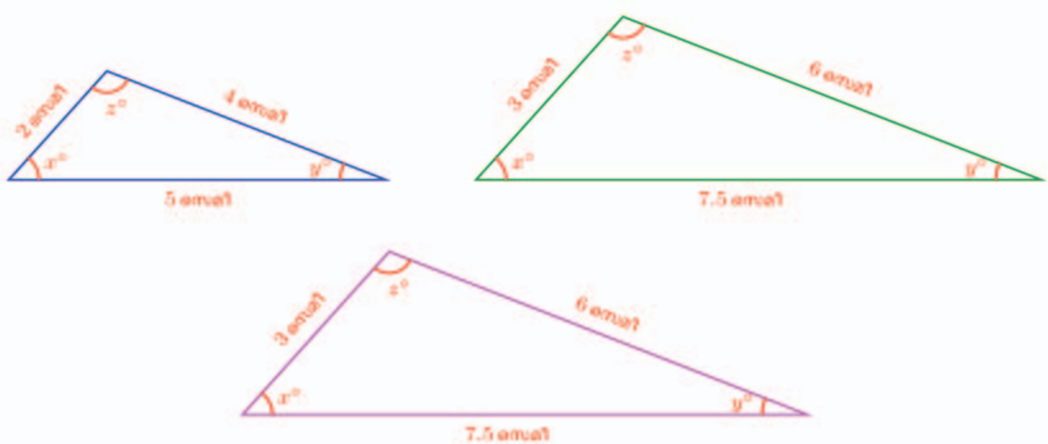
അതു തീരുമാനിക്കാൻ, മൂന്നാമതൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാം: ഏറ്റവും വലിയ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റേത്; അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള കോണുകൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളിലുള്ളവ.



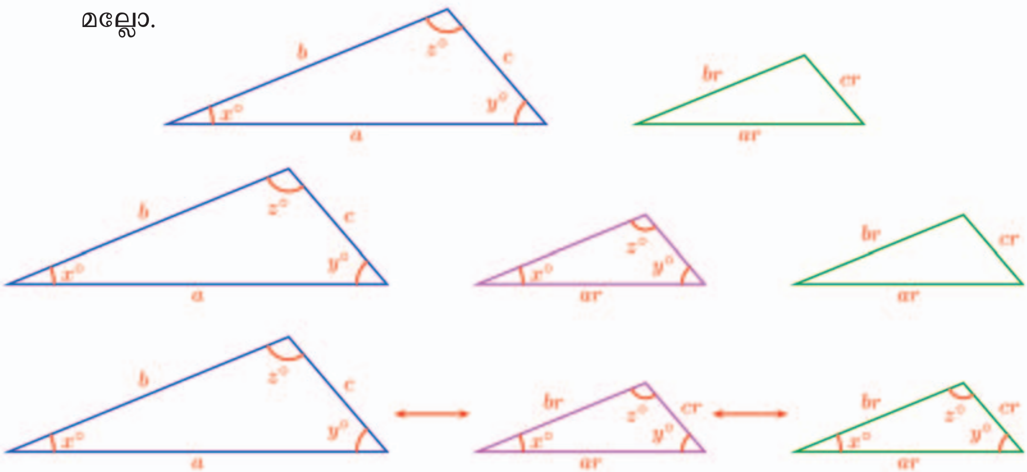
ഈ പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ, പഴയ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾതന്നെ ആയതിനാൽ, നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെ വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായിരിക്കണം; ഏറ്റവും വലിയ വശം ഒന്നര മടങ്ങായതിനാൽ, മറ്റു വശങ്ങളും അങ്ങനെ തന്നെ.



അതായത്, പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും, പഴയ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളെല്ലാം തുല്യമാണ്; അപ്പോൾ ഇവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ് (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

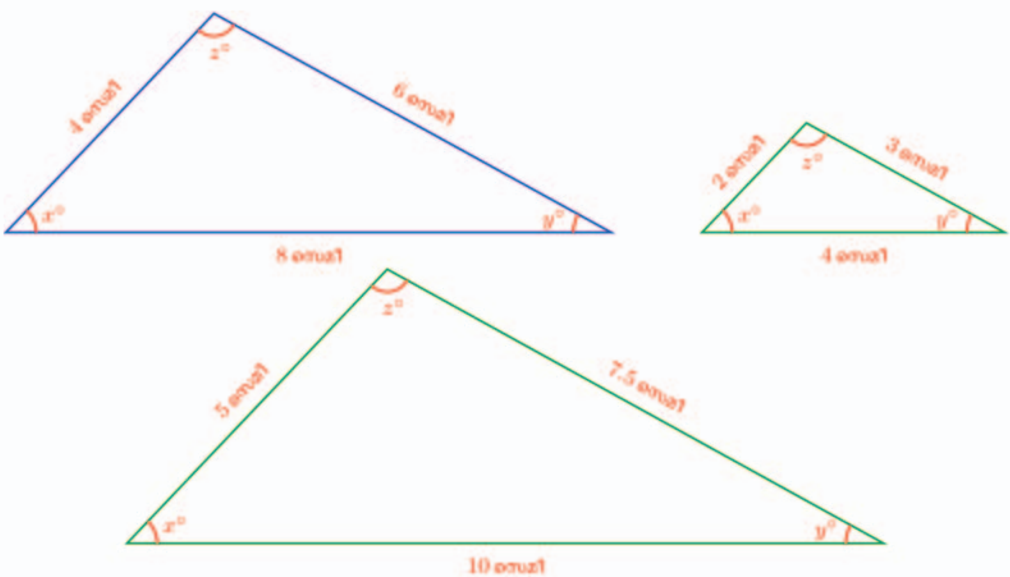


ഇപ്പോൾ ആദ്യത്തെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കിട്ടിയില്ലേ? വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതോ വലുതോ ആയ ഏതു രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളെടുത്താലും, ഇതേപോലെ ഒരു ഇടനിലത്രികോണത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ, അവയ്ക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാമല്ലോ.



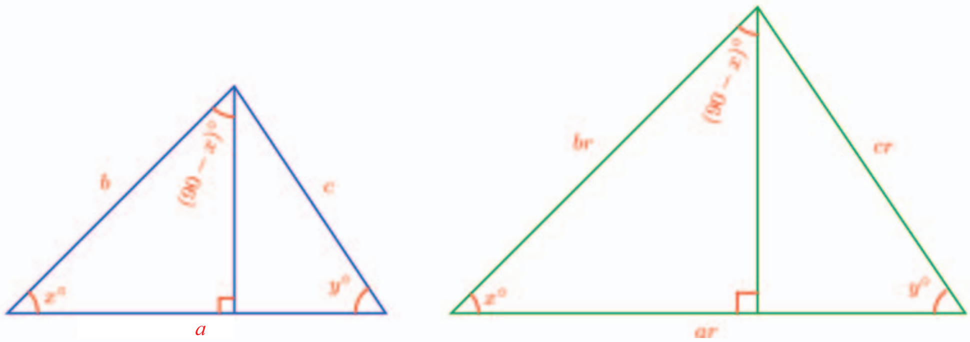
വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായ ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം ഒരേ കോണുകളാണ്.

അപ്പോൾ കോണുകൾ മാറാതെ ഒരു ത്രികോണം ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി മാറ്റാൻ, കോണുകൾ അളക്കണമെന്നില്ല; വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയാൽ മതി:

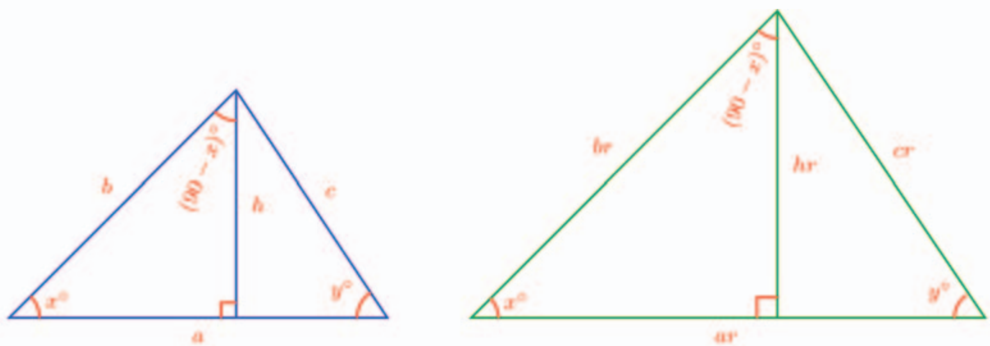


ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ, ചുറ്റളവുകളും അതേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്നും കാണാൻ വിഷമമില്ല. (ചെയ്തുനോക്കൂ!)

പരപ്പളവുകൾ മാറുന്നത് എങ്ങനെയാണ്? അതറിയാൻ, ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണ്. പരപ്പളവ് ഒത്തുനോക്കാൻ, ഒരേ കോണുള്ള മൂലകളിൽ നിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കാം:



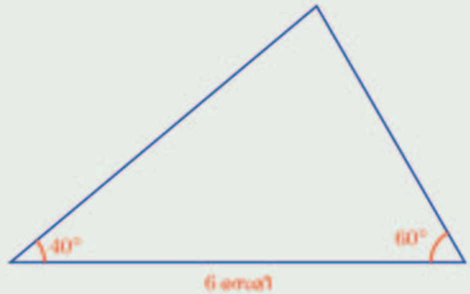
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും ഇടതുഭാഗത്തുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക: രണ്ടിലും കോണുകൾ x°, 90°, $(90 - x)^\circ$ തന്നെയാണ്; ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. നീല മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം b യും, പച്ച മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം br ഉം ആണ്. അപ്പോൾ നീല ത്രികോണത്തിലെ ലംബം h എന്നെടുത്താൽ പച്ച ത്രികോണത്തിലെ ലംബം hr ആണ്.



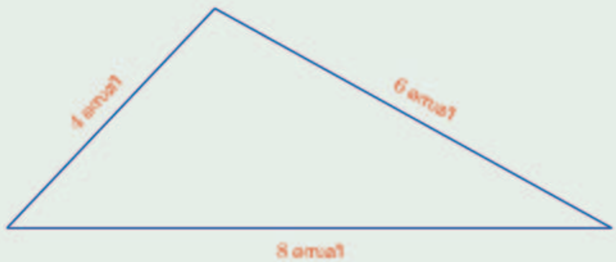
ഇനി മുഴുവൻ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ. നീല ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ah$; പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ahr^2$

അപ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോത്, വശങ്ങൾ മാറുന്ന തോതിന്റെ വർഗമാണ്.

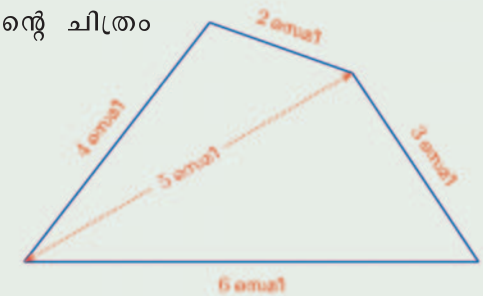
(1) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളം $\frac{3}{4}$ ഭാഗവുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.



(2) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളം $1\frac{1}{4}$ മടങ്ങുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.



(3) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം നോക്കൂ.



i) ഇതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളമെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

ii) കോണുകൾ വ്യത്യസ്തവും, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഇതിലെ വശങ്ങളുടെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

ത്രികോണവിശേഷം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഇവയുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണ്; മറിച്ച് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഒന്നിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണ് രണ്ടാമത്തതിന്റെയും. ഇത് ബഹുഭുജങ്ങളിൽ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് മാത്രമുള്ള സവിശേഷതയാണ്.

മൂന്നാംവഴി

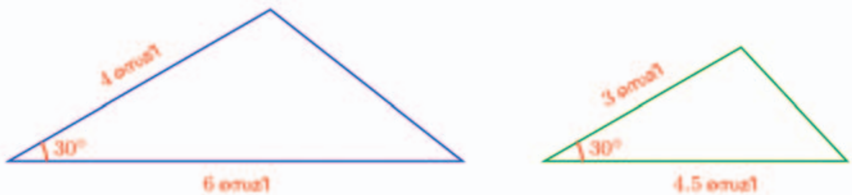
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകളും അറിയാമെങ്കിൽ കോണുകൾ മാറാതെ, വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി, മാറ്റി വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് ആദ്യഭാഗത്ത് കണ്ടു: അറിയാവുന്ന വശം വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റിവരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും അതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽ മതി; മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും അതേ തോതിൽ മാറിക്കൊള്ളും.

മൂന്നു വശങ്ങളുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിൽ ഇത്തരത്തിൽ മാറ്റിവരയ്ക്കുന്ന രീതി രണ്ടാം ഭാഗത്തിലും കണ്ടു: എല്ലാ വശങ്ങളും വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരച്ചാൽ മതി; കോണുകൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റേതുതന്നെയായിരിക്കും.

ഇനി മാറ്റേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും, അവ ചേരുന്ന കോണുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കുക.

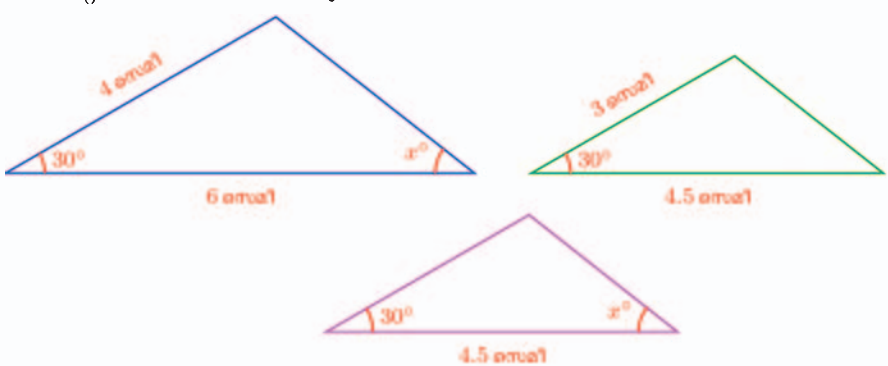
കോണുകൾ മാറാതെ ഇതിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കണം.

വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും, 4 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും $\frac{3}{4}$ ഭാഗവും അവ ചേരുന്ന കോൺ 30° യുമായി ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.

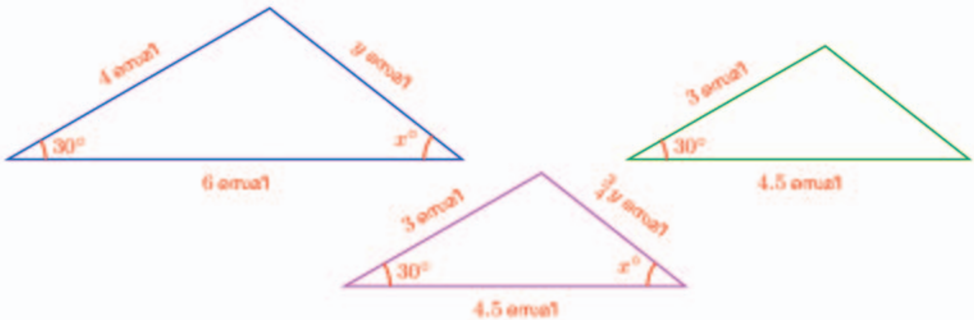


പക്ഷേ ഈ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശവും ആദ്യത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണെന്ന് അറിയില്ലല്ലോ.

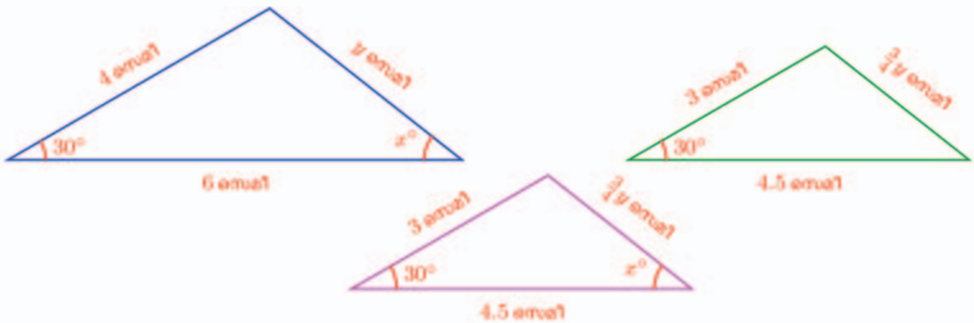
അതിന് നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ഇടയ്ക്കൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാം: താഴത്തെ വശം 4.5 സെന്റിമീറ്റർ; അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ കോണുകൾ.



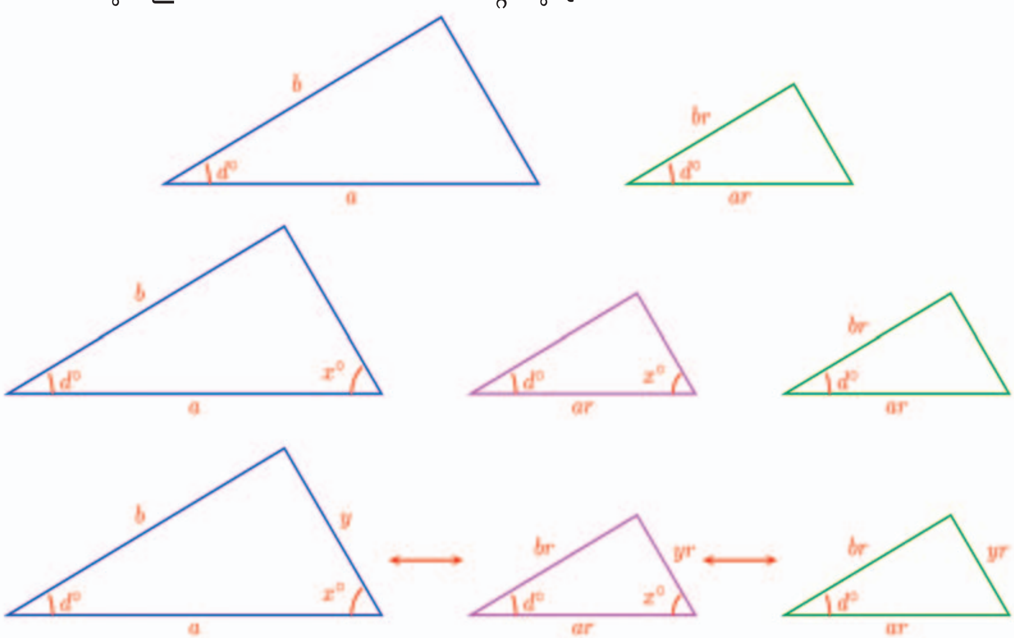
ഈ പുതിയ ത്രികോണത്തിലും ആദ്യത്തെ വലിയ ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, അവയുടെ വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണ്; അപ്പോൾ മറ്റുവശങ്ങളും അങ്ങനെതന്നെയാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ അറിയാത്ത വശത്തിന്റെ നീളം y സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:



ഇനി പുതിയ ത്രികോണവും, പഴയ ചെറിയ ത്രികോണവും ഒത്തുനോക്കാം: ഇവയിൽ, രണ്ടു വശങ്ങളും, അവ ചേരുന്ന കോണും തുല്യമാണ്; അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

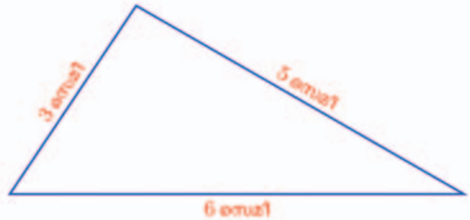


അങ്ങനെ ആദ്യത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശവും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം തന്നെയാണെന്നു കാണാം. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളും കോണും എന്തായിരുന്നാലും ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.

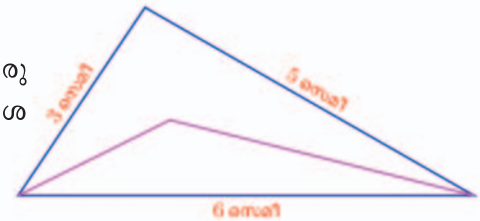


രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലും, അവ ചേരുന്നത് ഒരേ കോണിലുമായ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്നാംവശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണ്.

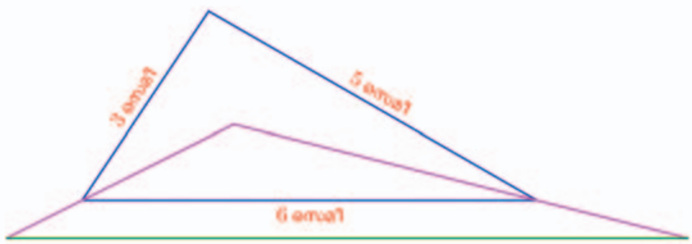
ഈ തത്വമുപയോഗിച്ച്, വശങ്ങളോ കോണുകളോ അളക്കാതെതന്നെ ഒരു ത്രികോണത്തിനെ വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക;



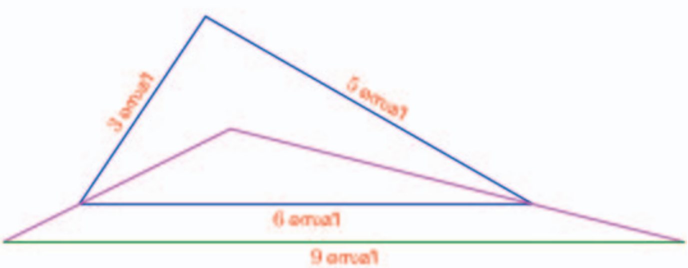
ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുക:



ഈ വരകളോരോന്നും, അവയുടെ പകുതികൂടി നീട്ടി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക:

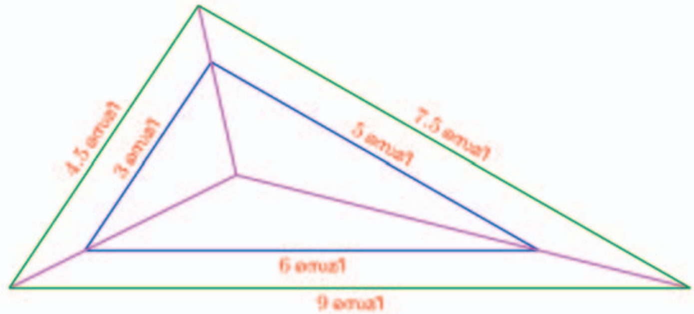


ഇപ്പോൾ പുതിയൊരു ത്രികോണവും അതിനുള്ളിലൊരു ചെറുത്രികോണവുമായി. വരച്ചതിന്റെ കണക്കനുസരിച്ച്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങളുടെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങൾ; ഈ വശങ്ങൾ ചേരുന്നത് രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണായതിനാൽ, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശവും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്.



ജിയോജിബ്രയിൽ ത്രികോണങ്ങളുടെ തോത് മാറ്റി വരയ്ക്കാൻ ഒരു വഴിയുണ്ട്. ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. D എന്ന ഒരു ബിന്ദു ത്രികോണത്തിനകത്തോ പുറത്തോ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Ray ഉപയോഗിച്ച് D യിൽനിന്നും ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലേക്ക് വരകൾ വരയ്ക്കുക. Min = 0 ആകത്തക്ക വിധം ഒരു സ്ലൈഡർ g നിർമിക്കുക. D കേന്ദ്രമായി ആരം g ∗ AD വരത്തക്കവിധം ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അത് AD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. അതുപോലെ D കേന്ദ്രമായി ആരം g ∗ BD ആയി വൃത്തം വരച്ച് BD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F ഉം, ആരം g ∗ CD വരുന്ന വൃത്തം വരച്ച് CD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു G യും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി വൃത്തങ്ങൾ മറച്ചുവയ്ക്കാം. EFG എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ത്രികോണത്തിന്റേയും വശങ്ങളും കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. g = 1 ആകുമ്പോൾ ഏന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? g ആയി 0.5, 2 എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോഴോ? D യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ത്രികോണത്തിനകത്തെ ബിന്ദു, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുമായി ഇതേപോലെ യോജിപ്പിച്ചു നീട്ടിയാലോ?



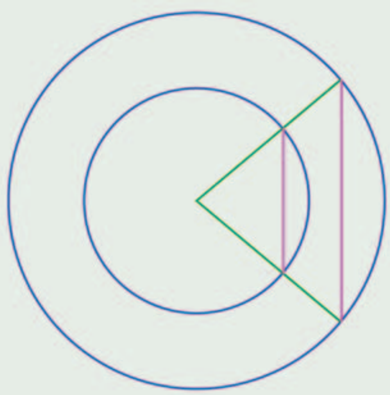
സദൃശത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Dilate from Point ഉപയോഗിക്കാം. Min = 0 വരത്തക്ക വിധം സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന് അകത്തോ പുറത്തോ ആയി ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Dilate from Point ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലും തുടർന്ന് ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Scale Factor ആയി a എന്ന് നൽകുക. ത്രികോണത്തിന് സദൃശമായി മറ്റൊരു ത്രികോണം കിട്ടും. a യും ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റി നോക്കൂ. ത്രികോണത്തിന് പകരം ഏത് രൂപത്തിന്റെയും സദൃശരൂപങ്ങൾ ഇതുപോലെ നിർമിക്കാം.

വശങ്ങളെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങായില്ലേ? വശങ്ങളുടെ നീളമറിയില്ലെങ്കിലും ഇങ്ങനെ മാറ്റിവരയ്ക്കാം.

വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളെ സദൃശം (similar) ആണെന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതുവരെ കണ്ട തത്വങ്ങളനുസരിച്ച്, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകാൻ, ചുവടെപ്പറയുന്ന ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ബന്ധമുണ്ടായാൽ മതി.

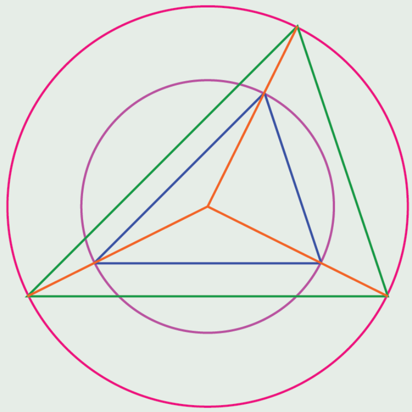
- ഒരേ കോണുകളാകുക
- വശങ്ങളിലെയെല്ലാം മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുക.
- രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുകയും, അവ ഒരേ കോണിൽ ചേരുകയും ചെയ്യുക.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരേ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളെ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ആരങ്ങൾ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച്, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

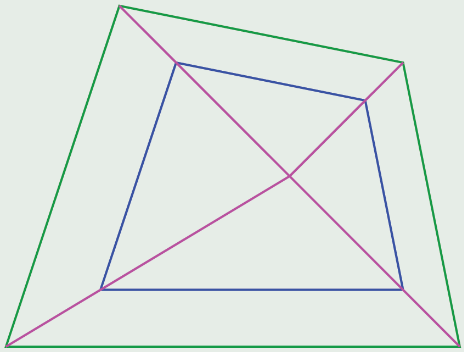
(2) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ പരിവൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ നീട്ടി, അതേ കേന്ദ്രമായ മറ്റൊരു വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുന്നു.



i) ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) ത്രികോണങ്ങളിലെ വശങ്ങൾ മാറിയ തോത്, വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ മാറിയ തോതു തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ഒരു ചതുർഭുജത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവും ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ, ഒരേ തോതിൽ പുറത്തേക്കു നീട്ടുന്നു; ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ചതുർഭുജമുണ്ടാക്കുന്നു.



i) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കിയതാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഗവേഷണം

സദൃശത്രികോണങ്ങളിലെ കോൺസമഭാജികൾ, നടുവരകൾ, പരിവൃത്ത ആരങ്ങൾ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള കോണുകളും അറിയാവുന്ന ത്രികോണത്തിനെ, വശങ്ങളെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി മാറ്റി വരയ്ക്കുന്നു.			
• വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്ന് തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• മൂന്നു വശങ്ങളും അറിയാവുന്ന ത്രികോണത്തിനെ, കോണുകൾ മാറാതെ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി മാറ്റി വരയ്ക്കുന്നു.			
• രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലും, അവ ചേരുന്നത് ഒരേ കോണിലുമായ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്നാംവശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വശങ്ങളോ കോണുകളോ അളക്കാതെ, ഒരു ത്രികോണത്തിനെ വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കുന്നു.			
• വശങ്ങളോ കോണുകളോ അളക്കാതെ, ഏതു ബഹുഭുജത്തിനെയും വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കുന്നു.			

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ