ಗಣಿತ

MATHEMATICS

ಅಧ್ಯಾಪಕ ಪಠ್ಯ

TEACHER TEXT

ತರಗತಿ

X

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ತಯಾರಿಸಿದವರು

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT), ಕೇರಳ

2016

TEACHER TEXT - MATHEMATICS - STD IX

PARTICIPANTS IN THE WORKSHOP

T.P. Prakashan
GHSS Vazhakkad, Malappuram
Unnikrishnan M.V.
GHSS Pakkam, Kasaragod
Narayanan K.
BARHSS Bovikkanam, Kasaragod.
Ubaidulla K.C.
SOHSS Arikkod, Malappuram
Ramesan N.K.
RGMHSS Mokeri, Kannur
Jabeer K.
GVHSS Mogral, Kasaragod.
Vijayakumar T.K.
GHSS Cherkala, Kasaragod.
Sujith Kumar G.
GWHSS Cherukunnu, Kannur

Ramanujam R.
MNKMGHSS Pulappatta, Palakkad.
T. Sreekumar
GGHSS Karamana,
Thiruvananthapuram.
K.J. Prakash
GMGHSS Pattam, Thiruvananthapuram.
Anil Kumar M.K.
SKMJHSS Kalpatta, Waynad.
Krishnaprasad M.
PMSAVHSS Chappanangadi,
Malappuram.
Balagangadharan V.K.
AEO Parappanangadi, Malappuram.

Proof Verified by

P. Yahiya, GVHSS Payyanakkal, Kozhikode

Experts

Dr. E. Krishnan
Prof. (Rtd.), University College, Thiruvananthapuram.
Venugopal C.
Asst. Prof. Govt. College of Teacher Education, Thiruvananthapuram.

Academic Co-ordinator

Dr. Meena S.
Research officer, SCERT, Thiruvananthapuram

Translation Kannada

Harsha Kumar M., SGKHS Kudlu
Krishna Prakash S., SNHS Perla
Prapullachandra C.H., GHSS Adoor
Balakrishna P., BEMHSS Kasaragod.
Raghava, GHSS Belluru
Nagaraja N., SSHS Sheni

Language Experts

Dr. Shrikrishna Bhat P.
Professor (Rtd), Govt College Kasaragod
Dr. Subrahmanya Bhat,
(Rtd. Principal), Govt. College, Kasaragod
Prof. Rama Bhat,
Rtd. HOD, Govt. College, Kasaragod

State Council of Educational Research & Training (SCERT)
Vidhyabhavan, Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012

ಮುನ್ನುಡಿ

ಪ್ರಿಯ ಶಿಕ್ಷಕರೇ,

ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕು ಕಾಯ್ದೆ ಜಾರಿಯಾದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಗುಣಮಟ್ಟದ ಶಿಕ್ಷಣ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗದ ಮಕ್ಕಳ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಖಾತರಿಪಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಸಮಸ್ತ ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲೂ ಅತಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಹಾಗೂ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ನಿರ್ಧಾರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬುದೇ ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಕೋನವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು 'ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಚೌಕಟ್ಟು 2005' ಶಿಫಾರಸು ಮಾಡಿದೆ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಕಾಲೋಚಿತವಾಗಿ ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿ ಒಟ್ಟು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕಾರ್ಯನಿರತಗೊಳಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರವೇ ಈ ಗುರಿಯನ್ನು ತಲುಪಲು ಸಾಧ್ಯ. ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷಗಳ ಹಾಗೂ ರಾಷ್ಟ್ರಮಟ್ಟದ ತೀರ್ಮಾನದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ಹತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪಾಠಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಪನಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾಗುವಂತೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರಗೊಳಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ. ತರಗತಿ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಯೋಜನೆ ಮಾಡಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ಸೂಚನೆಗಳು, ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳು, ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿರ್ದೇಶಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಒಳಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮುನ್ನಡೆಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚರ್ಚಾಸೂಚಕಗಳನ್ನೂ ಚರ್ಚೆಯ ಬಳಿಕ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಬೇಕಾದ ಆಶಯಗಳನ್ನೂ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದ ಭಾಗವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದ ಆಶಯಗಳಿಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿಗೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಭಾಗವಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಕೈಪಿಡಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕರ ಕೈಪಿಡಿಯು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ತರಗತಿ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಕ್ರಿಯಾಧಾರಿತವಾಗಿ ನಡೆಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಯೋಜನೆಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂದು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ. ತರಗತಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸಕ್ರಿಯ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಗೊಳಿಸಲು ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೂ ಶಿಕ್ಷಕರ ಕೈಪಿಡಿಗೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ ಶಿಕ್ಷಕರ ಸೃಜನಶೀಲತೆಗೆ ಮುಖ್ಯ ಪಾತ್ರವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಅರಿತಿರಬೇಕು.

ಶುಭ ಹಾರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ,

ಡಾ. ಜೆ. ಪ್ರಸಾದ್
ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಯೂನಿಟ್‌ಗಳ ಮೂಲಕ...

ಕೇರಳ ಶಾಲಾ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ 2013
ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಪನಗಳು

1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಸಾಮಾಜಿಕ ಬದುಕಿನ ಗುಣಮಟ್ಟದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಕೇರಳವು ದೇಶಕ್ಕೆ ಮಾದರಿಯಾಗಿದೆ. ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದ ವ್ಯಾಪಕತೆ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆರೋಗ್ಯದ ಗುಣಮಟ್ಟ ಎಂಬಿವುಗಳೇ ಕೇರಳದ ಈ ಸಾಧನೆಗೆ ಪ್ರಧಾನ ಕಾರಣವಾಗಿವೆ. ಸಮಾಜದ ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಗಳ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಶಾಲೆಗೆ ಕಳುಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೂ, ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಗುಣಮಟ್ಟದ ಶಿಕ್ಷಣ ಎಂಬುದು ಕೇರಳದ ಶಿಕ್ಷಣ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಎದುರಿಸುವ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸವಾಲಾಗಿದೆ. 1986 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ನೀತಿಯ ಅಂಗವಾಗಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ಕಾಪಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಮೂಲಭೂತ ಸೌಕರ್ಯಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕ ತರಬೇತಿ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಆಯೋಜಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಇದರೊಂದಿಗೆ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶಿಶುಕೇಂದ್ರಿತ, ಚಟುವಟಿಕೆ ಆಧಾರಿತ, ಪ್ರಕ್ರಿಯಾತ್ಮಕ ಹಾಗೂ ಕಾಲೋಚಿತವಾಗಿ ಪರಿಷ್ಕರಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಾಗಿವೆ. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು ನಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬ ತಿಳುವಳಿಕೆ ಮೂಡಿತು. ಇದರಂತೆ ಮಗುವನ್ನು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ7ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಕೇಂದ್ರಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ನಾಂದಿ ಹಾಡಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಬದುಕಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳೂ ಪ್ರತಿ ಕ್ಷಣ ಬದಲಾಗುತ್ತಿವೆ. ಅಧ್ಯಾಪನ ಶಾಸ್ತ್ರ, ಅಧ್ಯಯನ ಮನಶ್ಶಾಸ್ತ್ರ ಮೊದಲಾದ ವಿಷಯಗಳ ಹೊಸ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾದ ಅನುಭವಗಳು ಉತ್ತಮ ರೀತಿಯ ಕಲಿಕೋಪಕರಣಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾನುಭವಗಳ ವಿನಿಮಯ ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ನಡೆಸಲು ನಮ್ಮನ್ನು ಪ್ರೇರೇಪಿಸಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗದ ಮಕ್ಕಳ ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ನಾವು ಗುರಿಯಿರಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

“ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆಯುಳ್ಳ, ವಿಭಿನ್ನ ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ, ಬೌದ್ಧಿಕ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿರುವ ಎಲ್ಲ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕಲಿಯಲು ಹಾಗೂ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕು. ಲಿಂಗ, ಜಾತಿ, ಭಾಷೆ, ಸಂಸ್ಕೃತಿ, ಧರ್ಮ, ಅಂಗವೈಕಲ್ಯಗಳೇ ಮೊದಲಾದ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೀರಲು ಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣ ನೀತಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಸಾಲದು. ಎಳೆಯ ಪ್ರಾಯದಿಂದಲೇ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಕಲಿಕಾ ಗುರಿಗಳನ್ನೂ, ಅಧ್ಯಾಪನ ರೀತಿಗಳನ್ನೂ ಆರಿಸಿ ರೂಪಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. (NCF 2005, ಪು.27)

- ವಿಭಿನ್ನ ಸಾಮಾಜಿಕ ಮತ್ತು ಆರ್ಥಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆಯುಳ್ಳವರು.
- ವಿಭಿನ್ನ ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಮತ್ತು ಬೌದ್ಧಿಕ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವುಳ್ಳವರು.

ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದವರಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಗಳಿಸಲು ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಎಲ್ಲಾ ವಲಯಗಳಲ್ಲಿ

ಸೂಕ್ಷ್ಮವೂ ಶಾಸ್ತ್ರೀಯವೂ ಆಗಿರುವ ಧೋರಣೆಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕಾದುದು ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಕೋನವಾಗಬೇಕು ಎಂದು ಎನ್.ಸಿ.ಎಫ್. ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತದೆ. ಕಾಲೋಚಿತವಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ನವೀಕರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕ್ರಿಯಾತ್ಮಕವಾಗಿಸುವುದರಿಂದ ಮಾತ್ರ ಈ ಗುರಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಈಗ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರಂತರವಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಎಲ್ಲರ ಅನುಭವ, ಸಂಶೋಧನೆ ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಯನ ಶೋಧಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಸಮರ್ಪಕತೆಯಿಂದ ಮತ್ತಷ್ಟು ಸಮರ್ಪಕತೆಗೆ ಎಂಬ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಮೀಪನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸ್ವೀಕರಿಸಲಾಗುವುದು.

1.2 ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಪರಿಷ್ಕರಣೆಯ ಅಗತ್ಯ

ಕಳೆದ ಐದು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಹೊಸ ಆಶಯಗಳು ಮೂಡಿಬಂದಿವೆ. ಭಾರತದಲ್ಲಿ 2009 ರಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾರಿಗೆ ಬಂದ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ ಹಕ್ಕು ಕಾಯಿದೆಯಿಂದ ಶಿಕ್ಷಣವು ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕಾಗಿ ಬದಲಾಗಿದೆ. ಹಕ್ಕು ಆಧಾರಿತ ವಿದ್ಯಾಲಯ (Right based Educational Institution) ಎಂಬ ಗುರಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಮ್ಮ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗುಣಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಏರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗುಣಮಟ್ಟ ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದೇಶದ ಗುಣಮಟ್ಟವಲ್ಲ. ಇದು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಹಂತವನ್ನು ದಾಟುವ ಮಗು ಜಗತ್ತಿನ ಯಾವುದೇ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಆರ್ಜಿಸಬೇಕಾದ ಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಅನುಭವಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಜಾಗತಿಕ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾರಿಗೊಂಡಿರುವ ಉತ್ತಮ ಅಧ್ಯಯನ, ಅಧ್ಯಾಪನ ಮಾದರಿಗಳು ಕೇರಳದ ಮಕ್ಕಳಿಗೂ ಸಿಗಬೇಕಾದುದು ಅಗತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಇದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕು ಕಾಯ್ದೆಯಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ, ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಎಂಬಿವುಗಳ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಕಾನೂನುಗಳು ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಪರಿಷ್ಕರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಕಡ್ಡಾಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕು ಕಾಯಿದೆ 2009

ಸೆಕ್ಷನ್ –29 (ಅಧ್ಯಾಯ 5)

ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಹಾಗೂ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಸೂಚಕಗಳು

1) ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಹಾಗೂ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಣಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಆಯಾ ಸರಕಾರದ ಅಧಿಸೂಚನೆಯ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಲಾಗುವ ಒಂದು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಅಧಿಕಾರ ಸ್ಥಾನದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಬೇಕು.

2) ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಅಧಿಕಾರ ಸ್ಥಾನ 1 ನೇ ಉಪವಿಭಾಗದ ಪ್ರಕಾರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಹಾಗೂ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಣಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

a) *ಸಂವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾದ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಹೊಂದಿಕೆ.*

b) *ಮಗುವಿನ ಸರ್ವತೋಮುಖವಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆ.*

c) *ಮಗುವಿನ ಜ್ಞಾನ, ಸಾಮರ್ಥ್ಯ, ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದು.*

d) *ದೈಹಿಕ ಹಾಗೂ ಮಾನಸಿಕ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳ ಸಂಪೂರ್ಣ ಬೆಳವಣಿಗೆ.*

e) *ಮಗುವಿಗೆ ಇಷ್ಟವಾದ, ಶಿಶು ಕೇಂದ್ರಿತವಾದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿರುವ ಕಲಿಕೆ.*

f) *ಕಲಿಕೆಯ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಮಗುವಿನ ಮಾತೃಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ನೀಡುವುದನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕಗೊಳಿಸಬೇಕು.*

g) *ಭಯ, ಮಾನಸಿಕ ಒತ್ತಡ ಉಂಟಾಗುವ ಸ್ಥಿತಿ, ಆತಂಕ ಇವುಗಳಿಂದ ಮಗುವನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸಿ, ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಮಗುವಿಗೆ ಸಹಾಯ ನೀಡುವುದು.*

h) *ಮಗುವಿನ ಜ್ಞಾನಗ್ರಹಣ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದ ಸಮಗ್ರ ಮತ್ತು ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ.*

ಉಚಿತ ಹಾಗೂ ಕಡ್ಡಾಯ ಶಿಕ್ಷಣಕ್ಕಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಕೇರಳದ ಕಾನೂನುಗಳು ಹಾಗೂ ಪರಿಚ್ಛೇದಗಳು 2011

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಅಧಿಕಾರಗಳು

1. 29ನೇ ಪರಿಚ್ಛೇದದ ಪ್ರಕಾರ ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನಾ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT) ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಅಧಿಕಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.
2. (1)ನೇ ಉಪಪರಿಚ್ಛೇದದ ಅಡಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಪ್ರಕಾರ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಅಧಿಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ, ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಸೂಚಕ ತಯಾರಿಸುವಾಗ ಈ ಕಾನೂನಿನ 29ನೇ ಪರಿಚ್ಛೇದದ (2)ನೇ ಉಪಪರಿಚ್ಛೇದದ ಅಂಶ (a) ಯಿಂದ (f) ವರೆಗಿನ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಭಾದಕವಾಗದಂತೆ;
   (a) ಸಕಾಲಿಕಲವೂ ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಗುಣವೂ ಆಗಿರುವ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಮತ್ತು ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳಿಗೆ ಮೂಲಭೂತವಾದ ಜೀವನ ನೈಪುಣ್ಯವನ್ನು ರೂಢಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಕಲಿಕಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳೂ ಒಳಗೊಂಡಂತೆ ಇತರ ಕಲಿಕಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಿಗೆ ರೂಪು ನೀಡುವುದು;
   (b) ಒಂದರಿಂದ ಎಂಟರ ವರೆಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಷಯಕ್ಕೂ ಅಗತ್ಯವಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಕಲಿಕಾ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಬೇಕಲ್ಲದೆ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಮೌಲಿಕವಾದ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ವಿಕಾಸಗೊಳಿಸಿ ಮಕ್ಕಳ ಕಲಿಕಾ ಪರಿಣಾಮಕ್ಕಾಗಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯ ಮಾನದಂಡಗಳಿಗೆ ರೂಪು ನೀಡುವುದು;
   (c) ಕಲಿಕೆ ಮತ್ತು ಬೋಧನೆಯ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಸೇವಾಕಾಲದ ಅಧ್ಯಾಪಕ ತರಬೇತಿ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು;
   (d) 1995ರ ನ್ಯೂನತೆಗಳಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗಾಗಿರುವ (ಸಮಾನ ಹಕ್ಕುಗಳು, ಹಕ್ಕುಗಳ ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಹಾಗೂ ಪೂರ್ಣ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ) ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ನ್ಯೂನತೆಗಳಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ನೀಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಸೇವಾಪೂರ್ವ ಮತ್ತು ಸೇವಾಕಾಲದ ತರಬೇತಿ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಿಗೆ ರೂಪು ನೀಡುವುದು;
   (e) ನಿರಂತರವೂ ಸಮಗ್ರವೂ ಆದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ಜಾರಿಗೆ ತರುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನೂ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನೂ ತಯಾರಿಸುವುದು.
   (f) ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಧೋರಣೆಗಳು ಹಾಗೂ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳು, ಪಠ್ಯಕ್ರಮ, ಬೋಧನೆಯ ಮೂಲಕ ಮಕ್ಕಳ ಮೇಲಾಗುವ ಪರಿಣಾಮ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಕುರಿತು ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನೂ ಅಧ್ಯಯನಗಳನ್ನೂ ಕೈಗೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಜಾರಿಗೊಳಿಸುವುದು.

ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕು ಕಾಯ್ದೆಯ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ನಿರಂತರ ಹಾಗೂ ಸಮಗ್ರವಾದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವು ಸಾಂವಿಧಾನಿಕ ಬಾಧ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಬೇಕು. ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕ ಪರಿಷ್ಕರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬೇಕು.

ಕೇರಳ ಶಾಲಾ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ (2013) ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

1) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಕೇಂದ್ರಿತ, ಪ್ರಕ್ರಿಯಾತ್ಮಕ, ಚಟುವಟಿಕೆ ಪ್ರಧಾನ, ಮೌಲ್ಯಾಧಾರಿತ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ.

2) ಬೌದ್ಧಿಕ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಮನೋಭಾವ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಮಗುವಿನ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳಿಗೆ ಒತ್ತು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

3) ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣ ಎಂಬ ತಾತ್ವಿಕ ನೆಲೆಗಟ್ಟಿನಲ್ಲಿರುವ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ.

4) ವಿನಿಮಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವೂ ಯೋಗ್ಯವೂ ಆದ ಅಧ್ಯಾಪನ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವಿದೆ.

5) ಕಲಿಕಾಸಾಧನೆ, ಮಕ್ಕಳ ವಿಭಿನ್ನ ಗುಣಮಟ್ಟ ಇವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿದು ವಿವಿಧ ಕಲಿಕಾ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನುಷ್ಠಾನಗೊಳಿಸುವುದು. ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಕಲಿಕೆ, ಆಶಯಗ್ರಹಣ ರೀತಿ, ಹೊಸ ಚಿಂತನೆಗಳು, ಯೋಚಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು. ಸಹಕಾರ ಕಲಿಕೆ, ಸಹವರ್ತಿ ಕಲಿಕೆ, ಚಿಂತನೆಗಳ ಪ್ರತಿಫಲನ, ವೈಯಕ್ತಿಕ ಮತ್ತು ಗುಂಪಿನ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವುದು ಮೊದಲಾದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು.

6) ಉಚಿತ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಎಂಬ ಹಾಗೆ ಎಲ್ಲ ಮಕ್ಕಳ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯ ನೀಡಬೇಕು.

7) ಪ್ರಿ–ಪ್ರೈಮರಿಯಿಂದ ಹೈಯರ್ ಸೆಕಂಡರಿ ವರೆಗೆ ಸಮಗ್ರವಾದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ.

8) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಗತಿಗೂ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ಹೂರಣವನ್ನು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ವಿಷಯಗಳ ಹೂರಣದೊಂದಿಗೆ ಏಕೀಕರಿಸಿ, ಕೇರಳದ ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಗುವುದು.

9) ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ಮಾತೃಭಾಷೆ(ಪರಿಸರ ಅಧ್ಯಯನದೊಂದಿಗೆ) ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಎಂಬ ಮೂರು ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗುವುದು.

10) ಒಂದರಿಂದ ನಾಲ್ಕನೇ ತರಗತಿಯವರೆಗಿನ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮ ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗುವುದು.

11) ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಭಾಷೆ ಹಾಗೂ ಮಾತೃಭಾಷೆ ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ಭಾಷಾ ಕಲಿಕೆಗೆ ವಿಶೇಷವಾದ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯ ನೀಡಲಾಗುವುದು.

12) ಪ್ರಿ–ಪ್ರೈಮರಿ ಶಿಕ್ಷಣಕ್ಕಾಗಿ ಏಕೀಕೃತ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ, ಔಪಚಾರಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದ ಅಂಗವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಾಗುವುದು.

13) ಮಾಹಿತಿ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವನ್ನು (ICT) ಒಂದು ಪಠ್ಯವಿಷಯ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕಿಂತ ಪಠ್ಯವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸಂವಹನಮಾಡುವ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಿ ಬಳಸಬೇಕು.

14) ವಿಶೇಷವಾದ ಪರಿಗಣನೆಗೆ ಅರ್ಹರಾದ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ಹಾಗೂ ನೂತನವಾದ ಕಲಿಕಾ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿ ಅನುಷ್ಠಾನಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿ ಅನುಷ್ಠಾನಗೊಳಿಸುವುದು.

15) ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದ ಸಮಗ್ರ ಮತ್ತು ನಿರಂತರವಾದ ಮೌಲ್ಯ ಮಾಪನ (**CCE**) ನಡೆಸಬೇಕು.

16) ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಶಿಕ್ಷಣ, ಕಲೆಯ ಶಿಕ್ಷಣ, ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಡ್ಡಾಯ ಪಠ್ಯವಿಷಯಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

17) ಹೈಯರ್ ಸೆಕಂಡರಿ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಾಲಾನುಸಾರಿಯಾಗಿ ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಬೇಕು.

18) ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ನಿಯಮದ ಬೆಳಕಿನಲ್ಲಿ ಹಕ್ಕು ಆಧಾರಿತ ಶಿಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಒತ್ತು ನೀಡಬೇಕು.

19) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಅಧ್ಯಾಪಕನೂ ಓರ್ವ ಸಹರಕ್ಷಕ (Mentor)ನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೇರಿ, ಬೇಕಾದ ಕಾಳಜಿಯನ್ನು, ರಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಗುವಿಗೆ ಒದಗಿಸಬೇಕು.

20) ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ವೃತ್ತಿ ನೀತಿ ಸಂಹಿತೆಗೆ (Code of Professional Ethics for School Teacher) ಒತ್ತು ನೀಡಲಾಗುವುದು.

21) 21ನೇ ಶತಮಾನದ ಕಲಿಕಾ ನೈಪುಣ್ಯಗಳು (21st Century Learning skills) ಕಾಲೋಚಿತವಾಗಿ ಗಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಯೋಗ್ಯವಾಗಿವೆ.

22) ಮಾನವೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ತಲೆಮಾರನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಸಮರ್ಥವಾಗಿದೆ.

23) ಸಮಾನ ಅವಕಾಶ ಮತ್ತು ಸಮಾನತೆ (Equity and Equality) ಲಭಿಸುವ ಶಿಕ್ಷಣ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಸಹಜವಾದ ಕಲಿಕೆ, ಕಲಿಯುವ ಮಕ್ಕಳ ಬೌದ್ಧಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ತಲೆ, ಹೃದಯ, ಹಸ್ತ ಸಮನ್ವಯಗೊಂಡ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ (Curriculum for the harmony of head, Heart and Hand) ಎಂಬ ಕಾಣ್ಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಬೇಕು.

ಹಾಗಾದರೆ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಸಮೀಪನ ಹೇಗಿರಬೇಕು? ಅದರ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾದ ಅಡಿಪಾಯ ಹೇಗಿರಬೇಕು?

1.3 ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಸಮೀಪನ

ಪಂಚೇಂದ್ರಿಯಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸುತ್ತುಮುತ್ತಲಿನ ಪರಿಸರದಿಂದ ಕಲಿಯಲಿರುವ ಸಹಜ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಮಗು ಹುಟ್ಟುತ್ತದೆ. ಜಗತ್ತನ್ನು ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಲು, ಅರ್ಥಮಾಡಲು, ವ್ಯವಹರಿಸಲು, ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಲು ಶಾಲೆಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಮೂಲಕ ಮಗುವಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು. ತನ್ನ ಮುಂದಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಿ, ಆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿಕೊಂಡು ಕಲಿಕೆ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ವಿನಿಮಯ ಸಮೀಪನದ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಯಾವುವು?

- ಚಟುವಟಿಕೆ ಆಧಾರಿತವಾದುದು.
- ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ್ದು.
- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಗಟ್ಟಿಗೊಳಿಸುವುದು.

- ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಸಫಲಗೊಳಿಸಲು ಸಮರ್ಥವಾದುದು.
- ಪರಿಸರ ಆಧಾರಿತವಾದುದು.
- ವಿಕಾಸದ ವಲಯಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು.
- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸ್ವಭಾವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದುದು.
- ಕಲಿಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಣಯವೂ ಜತೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಜ್ಞಾನನಿರ್ಮಾಣ ಆಧಾರಿತವಾದ ಕಲಿಕಾ ರೀತಿಯು ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಆರ್ಜಿತ ಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಆಶಯ ಪರಿಸರವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾದ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದರಿಂದ ಸಹಜ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದು ಈ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ.

ಕಲಿಕಾನುಭವಗಳು

ಬದುಕಿನ ವಿಭಿನ್ನ ಹಿನ್ನೆಲೆಗಳಿಂದ ಬರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆರ್ಜಿತ ಜ್ಞಾನ, ಸಾಮರ್ಥ್ಯ, ಆಸಕ್ತಿ ಇವುಗಳು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರುವವಲ್ಲವೇ. ಈ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ವ್ಯಕ್ತಿ ಭಿನ್ನತೆಯನ್ನೂ ಬಹುಮುಖವಾದ ಬುದ್ಧಿಮತ್ತೆಯನ್ನೂ ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಕಲಿಕೆಯ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕಾದುದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಕಲಿಕಾ ಪರಿಸರ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಆಸಕ್ತಿ ಹಾಗೂ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು,

ಮಕ್ಕಳು ತೊಡಗಿಕೊಂಡಿರುವ ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದರೆ, ಅದು ಮಕ್ಕಳ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ಗಟ್ಟಿಗೊಳಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವುದು. ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಮಕ್ಕಳು ತಮ್ಮ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ತಾವೇ ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ತಾವು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಹೊರಗಿನ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳುವಂತೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಬೇಕು. ಬಾಯಿಪಾಠ ಹೊಡೆದು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕಿಂತ, ತಮ್ಮದೇ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳುವಂತೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ತಮ್ಮ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುವ ಪ್ರಧಾನ ಹೆಜ್ಜೆಗಳಾಗಿವೆ. ಬೌದ್ಧಿಕವಾದ ಊಹೆ ಅರ್ಥವತ್ತಾದ ಒಂದು ಬೋಧನ ಕ್ರಮವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಬೇಕು. ಹಲವಾರು ಬಾರಿ ತಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಅನುಭವಗಳಿಂದ ಅಥವಾ ಮಾಧ್ಯಮ ಸಂಪರ್ಕದಿಂದ ಮಕ್ಕಳ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಆಶಯಗಳು ರೂಪುಗೊಂಡಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವರಿಗೆ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದು. ತಿಳಿದಿರುವುದು ಮತ್ತು ತಿಳಿಯದಿರುವುದರ ಮಧ್ಯೆ ಹೊಸ ಜ್ಞಾನದ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗೆ ಮನೆ ಅಥವಾ ಸಮಾಜದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸುವ ಕರಕೌಶಲ್ಯದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಜ್ಞಾನ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವುದು. ಇಂತಹ ಎಲ್ಲ ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸಬೇಕು. ತಿಳುವಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಸಂವೇದನಶೀಲತೆಯಿರುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಈ ಕುರಿತು ಪ್ರಜ್ಞಾವಂತರಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಮಕ್ಕಳ ವಿಕಾಸ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಮನಗಂಡು, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿ ಹಾಗೂ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳಿ ಅವರನ್ನು ಮುನ್ನಡೆಸಲು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಸಾಧ್ಯ.

ಅನ್ವೇಷಣೆ, ನಿರೀಕ್ಷಣೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳುವುದು, ಚರ್ಚಾಕೂಟಗಳು ಇವುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ ರೂಪೀಕರಣ ಮತ್ತು ಆಶಯ ಸೃಷ್ಟಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳು ಸಕ್ರಿಯ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆಯ ಭಾಗವಾಗಿವೆ. ಶಾಲೆಗಳು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳುವುದಕ್ಕೂ ಚರ್ಚಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಶೋಧಿಸುವುದಕ್ಕೂ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದಕ್ಕೂ ನಿಗಮನವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲೂ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಒದಗಿಸಬೇಕು.

ಎನ್.ಸಿ.ಎಫ್. 2005 ಪುಟ. 41,42

ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಿಯಾಗಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ತರಗತಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಕೇಂದ್ರಿತ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗುವಂತೆ ಚಟುವಟಿಕೆ ಆಧಾರಿತ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವಲ್ಲವೇ?

ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ

- ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ ತನ್ನ ಅನುಭವಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣ (Knowledge Construction) ಮಾಡುವನು.
- ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣವನ್ನು ವೈಯುಕ್ತಿಕ ಮತ್ತು ಸಾಮಾಜಿಕ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕು.
- ವಿವಿಧ ಕಲಿಕಾ ಶೈಲಿಗಳನ್ನು (Learning Style) ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ವಿವಿಧ ಇಂದ್ರಿಯಾನುಭವಗಳನ್ನು (Multisensory Experiences) ನೀಡುವ ಮೂಲಕ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಯಶಸ್ವಿಗೊಳಿಸಬಹುದು.
- ಕಲಿಕಾನುಭವಗಳನ್ನು ಸಕ್ರೀಯವಾಗಿ (spiralling) ಮಂಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ಕಲಿಕೆಯು ಸಾಕಷ್ಟು ಫಲಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.
- ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ನಮನೀಯತೆ (Flexibility), ಹೊಂದಾಣಿಕೆ (Adaptations), ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಆಯ್ಕೆ (Selection) ಇವುಗಳನ್ನು ನಡೆಸುವ ಮೂಲಕ ವಿಭಿನ್ನ ಅಭಿರುಚಿಯ ಕಲಿಕೆಯ ಆಸಕ್ತರನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.
- ಸಾಕಷ್ಟು ಕಲಿಕಾನುಭವಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ದೊರಕಿದಾಗಲೇ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆ (Learning outcome) ದೃಢವಾಗುವುದು.
- ಕಲಿಕೆ ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿ ನಡೆಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು.
- ವಿಷಯಾಧಾರಿತ ವಸ್ತು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಲಿಕೆಯ ಅಗತ್ಯ ಇವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ವಿವಿಧ ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆ (Learning Outcome) ಯನ್ನು ಗಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯ.
- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಗುವಿನ ಸಮಗ್ರ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು (Allround development) ಉದ್ದೇಶ ವಾಗಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು.

1.4 ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು (Learning Outcomes)

ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನೀಡಲಾಗುವ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಫಲವಾಗಿ ಜ್ಞಾನ, ಕೌಶಲ್ಯ, ಮನೋಭಾವ, ಮೌಲ್ಯಗಳು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಪಾದಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಕೆಲವಕ್ಕೆ ದೀರ್ಘಕಾಲ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವಾಗ ಶಾಲಾ

ಶಿಕ್ಷಣದ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮಗು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಗುರಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವು ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಸರಣಿಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕದಲ್ಲಿಯೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಾಧಿಸುವ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು ವಿಕಾಸಗೊಂಡು ತರಗತಿಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಗಳಿಸುವ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಅನಂತರ ನಿಗದಿತ ಶಿಕ್ಷಣ ಕಾಲಾವಧಿಯ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳಾಗಿ ಅವು ಬೆಳೆಯುತ್ತವೆ. ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಲೂ (observable) ಅಳೆಯಲೂ (measurable) ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದು ಅದರ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕದ, ತರಗತಿಯ, ಅವಧಿಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಮಗು ಗಳಿಸಬೇಕಾದ ಜ್ಞಾನ ಕೌಶಲ್ಯ, ಮೌಲ್ಯ, ಮನೋಭಾವಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಲಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಲು ಕಲಿಕಾಸಾಧನೆಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಿಂದ ಸಾಧ್ಯ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಸರಿಯಾದ ವಿನಿಮಯದ ಮೂಲಕ ಎಲ್ಲ ಮಕ್ಕಳ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬಹುದು.

- ವಿಷಯನಿಷ್ಠವಾದ ಕಲಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಗಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಜ್ಞಾನ (knowledge), ಕೌಶಲ್ಯ (skills), ಮನೋಭಾವ ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯ (attitude and value)ಗಳನ್ನು ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.
- ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಲೂ, ಅಳೆಯಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.
- ಹ್ರಸ್ವ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗಳಿಸುವ ವಿಭಿನ್ನ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳಿವೆ.

1.5 ಕಲಿಕಾ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಕಲಿಕಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು

ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಲು ಬಳಸುವ ವಿವಿಧ ಘಟಕಗಳೇ ಕಲಿಕಾ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು. ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಪೂರ್ಣತೆಗೆ ಕಲಿಕಾ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೇ ತೀರಬೇಕು.

- ಗ್ರಂಥಾಲಯ
- ಪ್ರಯೋಗಾಲಯ (ಭಾಷೆ, ಗಣಿತ, ವಿಜ್ಞಾನ)
- ಕಲಿಕೋಪಕರಣಗಳು
- ಡಿಸ್‌ಪ್ಲೇ ಫಲಕಗಳು
- ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಲ್ಯಾಬ್
- ಬಹುಮಾಧ್ಯಮ ಉಪಕರಣಗಳು

ಇದರ ಹೊರತಾಗಿ ಮಕ್ಕಳ ಕಲಿಕಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುವ ಅನೇಕ ವೇದಿಕೆಗಳು ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿವೆಯಲ್ಲವೇ? ಇವುಗಳನ್ನು ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

- ಬಾಲಸಭೆ
- ಅಸೆಂಬ್ಲಿ
- ಕ್ಲಬ್‌ಗಳು
- ಚರ್ಚಾ ಕೂಟಗಳು
- ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರವಾಸಗಳು
- ಸ್ವಯಂ ಸೇವಾ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು (SPC, NSS, Scout, NCC)

ಮಕ್ಕಳ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಇಂತಹ ಘಟಕಗಳು ಅತಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿವೆ.

1.6 ಕಲೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಿಪರಿಚಯ ಕಲಿಕೆ

ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆ

ಸೃಜನಶೀಲತೆ, ನಿರೀಕ್ಷಣ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಬುದ್ಧಿಮತ್ತೆಯನ್ನು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಲು ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆ ಅತಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆಗೂ ಮಹತ್ವವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಶಾಲಾ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಗೀತ, ನೃತ್ಯ, ಚಿತ್ರರಚನೆ, ಶಿಲ್ಪರಚನೆ, ನಾಟಕ, ಸಿನಿಮಾ ಮೊದಲಾದ ಪ್ರಕಾರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಮಕ್ಕಳ ಪ್ರತಿಭೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಪ್ರೋತ್ಸಾಹವನ್ನು ನೀಡುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉದ್ದೇಶಗಳು.

- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಹಜವಾದ ಕಲೆಯ ಅಭಿರುಚಿಗಳನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸುವುದು.
- ವಿವಿಧ ಕಲೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು, ಮಕ್ಕಳ ಅಭಿರುಚಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಕಲೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವುದು.
- ವಿವಿಧ ಕಲೆಗಳನ್ನು ಆಸ್ವಾದಿಸಿ, ಕಲೆಯ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಕಲೆಯ ಆಸ್ವಾದನೆ ಮಾಡಿ ಸಮಾಜ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಮಾನವೀಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮೂಡಿಸುವುದು.
- ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ವೈವಿಧ್ಯವನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು ಸಂಸ್ಕೃತಿ ಪ್ರೇಮವನ್ನು ಬೆಳಸುವುದು.
- ಕಲೆಯ ಸತ್ವವನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು ಹೊಸ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸುವುದು.
- ಕಲೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಇತರ ವಿಷಯಗಳ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಫಲಪ್ರದಗೊಳಿಸುವುದು (Art applied learning)
- ಬಹುಮುಖವಾದ ಬೌದ್ಧಿಕ ವಿಕಾಸದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸುವುದು.
- ವಿಭಿನ್ನ ಕೌಶಲ್ಯಗಳಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಆಕರ್ಷಿಸುವುದು.
- ಮಕ್ಕಳ ಆಸ್ವಾದನೆಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸುವುದು.

ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ

ಭಾವನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಸಮನ್ವಯ ಹಾಗೂ ಪ್ರಗತಿಗಾಗಿ ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ ತರಗತಿಯ ಅಡಿಪಾಯವು ಮಾನವ ಸಂಪನ್ಮೂಲದ ಪ್ರಗತಿಯಾಗಬೇಕು. ಎಲ್ಲ ಪ್ರಜೆಗಳ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನೂ, ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನೂ ರಾಷ್ಟ್ರ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸುವಂತೆ ಬೆಳೆಸುವುದೇ ಮಾನವ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ಪ್ರಗತಿಯ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿ ಮೂಡಿಸುವುದು, ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೊಸ ವೃತ್ತಿ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ವಕ್ತಾರರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ವೃತ್ತಿ ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಉದ್ದೇಶಗಳಾಗಿವೆ.

- ಮಾನವ ಸಂಪನ್ಮೂಲದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ
- ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ

- ವೃತ್ತಿ ಸನ್ನದ್ಧತೆ
- ಉತ್ಪಾದನ ವಲಯದಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಯತ್ತತೆ
- ಸಂತುಲಿತ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಾಸ
- ಮೌಲ್ಯ ಹಾಗೂ ಮನೋಭಾವಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ

ಕಲೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಿ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವನ್ನು ನೀಡಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

1.7 ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಶಿಕ್ಷಣ

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲಾ ಹಂತವು ಮಕ್ಕಳ ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಮುಖ್ಯ ಹಂತವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಶಿಕ್ಷಣದ ಅನುಭವಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ದೃಢಗೊಳಿಸಬೇಕು. ಮಗುವಿನ ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಮನೋಭಾವವನ್ನು ಪೋಷಿಸುವುದು, ಆರೋಗ್ಯಕರ ಜೀವನ ಶೈಲಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು ಈ ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ. ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಶಿಕ್ಷಣದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ವಿನಿಮಯ ಮಾಡುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಉದ್ದೇಶಗಳು

- ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದೇಹವನ್ನು ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಕೌಶಲ್ಯವನ್ನು ಸಂಪಾದಿಸುವುದು.
- ದೇಹದ ಚಲನೆಯನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳನ್ನು ಸೃಜನಾತ್ಮಕ ಚಲನೆಗಳ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.
- ಸಾಮಾಜಿಕವಾದ ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು, ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ರೀತಿಯ ಜೀವನ ಶೈಲಿಯನ್ನು ರೂಢಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಆಸ್ವಾದಿಸುವುದು.
- ಮಗುವಿನ ಸರ್ವತೋಮುಖ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸುವುದು.

1.8 ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಶಿಕ್ಷಣ (Inclusive Education)

ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಪ್ರದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡುವ ತಮ್ಮ ಸಹಪಾಠಿಗೆ ವಾಸವಾಗಲು ಮನೆಯಿಲ್ಲವೆಂದೂ, ರಸ್ತೆ ಬದಿಯ ಪೈಪಿನಡಿಯಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿದ ಡೇರೆಯೇ ಅವನ ಮನೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿದಾಗ ಅದು ಚರ್ಚೆಗೆ ಗ್ರಾಸವಾಯಿತು. ಕಷ್ಟಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಮಾತ್ರ ಪರಿಹಾರ ಉಂಟಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಅರಿತುಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಹಾಯದೊಂದಿಗೆ ಹಣವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಗೆಳೆಯನಿಗೆ ಮನೆ ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಟ್ಟು ಮಾದರಿಯಾದರು.

(ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ಅನುಭವ)

ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರನ್ನೂ ಒಂದುಗೂಡಿಸುವ, ಯಾರನ್ನೂ ಹೊರ ಹಾಕದ ಕಲಿಕೆಯ ಒಂದು ವಾತಾವರಣವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹವನ್ನೂ, ಸಹಾಯವನ್ನೂ ನೀಡಿ ನ್ಯಾಯಯುತವಾದ ಗುಣಮಟ್ಟದ ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು (Equitable Quality Education) ದೃಢಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ವಿಶೇಷ ಗಮನ, ಕಲಿಕಾ ಸಹಾಯ ಮತ್ತು ರಕ್ಷಣೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವುದು ಯಾರಿಗೆ?

(ಎ) ಸಾಮಾಜಿಕ ಮತ್ತು ಆರ್ಥಿಕ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಹೊರಹಾಕಲ್ಪಟ್ಟವರ ಮಕ್ಕಳು

- ವಿಭಿನ್ನ ಮತ್ತು ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಸಾಮಾಜಿಕ, ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ, ಕೌಟುಂಬಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ತಾರತಮ್ಯವನ್ನು ಅನುಭವಿಸುವ ಮಕ್ಕಳು, ತೀವ್ರ ಬಡತನವನ್ನು ಎದುರಿಸುವವರು, ಬುಡಕಟ್ಟು ಆದಿವಾಸಿಗಳು, ಹೆಣ್ಮಕ್ಕಳು, ಪರಿಶಿಷ್ಟ ಜಾತಿ, ಪಂಗಡಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದವರು, ಬೇರೆ ರಾಜ್ಯಗಳಿಂದ ವಲಸೆ ಬಂದವರು, ಖಾಯಂ ಮನೆಗಳಿಲ್ಲದವರು–ಹೀಗೆ ಅನೇಕ ಸಂಕಷ್ಟಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸುವವರು ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತಾರೆ.

ವಿಭಿನ್ನತೆಗಳನ್ನು, ಪರಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು, ಅವರನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಗೌರವಿಸಬೇಕಾದುದು ನಮ್ಮ ಸಮೀಪನವಾಗಿರಬೇಕು. ಶಾಲೆಯ ಒಗ್ಗಟ್ಟಿನ ಕಾರ್ಯ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಇಂಥವರ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

(ಬಿ) ದೈಹಿಕ ಹಾಗೂ ಮಾನಸಿಕ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸುವವರು

ದೈಹಿಕ ಹಾಗೂ ಮಾನಸಿಕ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸುವವರಿಗೂ, ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕಷ್ಟವನ್ನು ಅನುಭವಿಸುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಕಲಿಕಾ ವಿಧಾನದ ಅಗತ್ಯಗಳಿವೆ (special educational needs). ಕಿವುಡುತನ, ದೃಷ್ಟಿದೋಷ, ಬೌದ್ಧಿಕ ಮತ್ತು ಚಲನೆಯ ಪರಿಮಿತಿಗಳು, ಓಟಿಸಂ, ಸೆರೆಬ್ರಲ್ ಪಾಲ್ಸಿ, ಬಹುಮುಖವಾದ ವೈಕಲ್ಯಗಳು, ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾದ ಅಸಮತೋಲನವಿರುವ ಮಕ್ಕಳು, ಗಮನಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಪರಿಮಿತಿಗಳಿರುವ ಮಕ್ಕಳು ಮುಂತಾದವರು ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತಾರೆ.

ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ವಿನಿಮಯ ಹಾದಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಏನನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು?

- ಕಲಿಕೆಯ ಅಗತ್ಯಗಳು, ಅಭಿರುಚಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಯೋಜನೆಗಳು.
- ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ ಇರುವಂತೆ ಪಾಠಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ.
- ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಕಲಿಕಾ ವೇಗ, ಕಲಿಕಾ ಶೈಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ವಿವಿಧ ಇಂದ್ರಿಯಾಧಾರಿತ ಸಮೀಪನ (multisensory approach) ಅನುಷ್ಠಾನ.
- ಪರಿಹಾರ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು (Remedial Practices), ಪೋಷಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು (Enrichment Practice) ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಮಗುವಿನ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅನುಷ್ಠಾನಗೊಳಿಸುವುದು.

- ವಿವಿಧ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಜಾರಿಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಸಂಪನ್ಮೂಲ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಹಾಗೂ ಇತರ ತಜ್ಞರ ಸಹಾಯವನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸುವುದು.
- ಮಗುವಿನ ಕಲಿಕೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಮೊದಲಾದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಹೆತ್ತವರ ನಿರಂತರ ಬೆಂಬಲವನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸುವುದು.

ಈ ಎರಡು ವಿಭಾಗದ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲದೆ, ವಿಶೇಷ ಗಮನ ಹಾಗೂ ಪರಿಗಣನೆ ನೀಡಬೇಕಾದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಅಭಿರುಚಿ ಮತ್ತು ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿರುವ ಮಕ್ಕಳೂ (Gifted Childrens) ಇದ್ದಾರೆ. ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ ವಿಭಾಗದ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಯ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನೂ ಭೌತಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಶಾಸ್ತ್ರೀಯವಾಗಿ ರೂಪಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

1.9 ಮಾಹಿತಿ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ – ಸಾಧ್ಯತೆ

ಮಾಹಿತಿ ವಿನಿಮಯಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಇಂದು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ ಅಲ್ಲವೇ? **ICT** ಬಳಕೆಯು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬ ಪ್ರಯೋಜನಕರವಾದುದು. ಮಕ್ಕಳು ಇದರ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ತಿಳಿದವರೇ ಆಗಿದ್ದಾರೆ. ಈ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ತರಗತಿಯ ಕಲಿಕೆಗೆ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಅನಾಯಾಸಕರ ಹಾಗೂ ಸಂತೋಷದಾಯಕವನ್ನಾಗಿಸಲು ಇದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯ.

ಅಗತ್ಯ

ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ವಿನಿಮಯದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯವಾದ **ICT** ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಅಗತ್ಯವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಮುದ್ರಣ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿರುವ ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳ ಮಿತಿಗಳಾದ ಚಲನಶೀಲತೆ, ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಕೇಳಿಸಲು ಆಗದಿರುವುದು ಮೊದಲಾದ ಕೊರತೆಗಳನ್ನು **ICT** ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು. **ICT** ಬಳಕೆಯ ಅಗತ್ಯ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂದೂ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ಹೊಂದಾಣಿಕೆ

ಮಗುವಿನ ಬುದ್ಧಿಯನ್ನೂ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನೂ ಪ್ರಚೋದಿಸುವ **ICT** ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿವೆ. ಜಿಜ್ಞಾಸೆ ಮತ್ತು ಆಕಾಂಕ್ಷೆಯೊಂದಿಗೆ ಪಠ್ಯ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಮೂಡುವಂತೆ **ICT** ಯನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು. ಇಂದ್ರಿಯ ವೈಕಲ್ಯವುಳ್ಳವರಿಗೆ ಇದರ ಪ್ರಯೋಜನ ಹೆಚ್ಚು. ಶಬ್ದ ಹಾಗೂ ದೃಶ್ಯಗಳಿಂದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅನುಭವಕ್ಕೆ ತರಲು **ICT** ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿದೆ. ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಕಲಿಕೆಯ ಶೈಲಿಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಕಲಿಕೆಯ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಲು ಇದು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಬಗೆಗಿನ ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆಯನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕು. ಸರಕಾರಿ ಇಲಾಖೆಗಳ ಸೈಟುಗಳು, ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವೆಬ್‌ಸೈಟುಗಳು, ಪೋರ್ಟಲುಗಳು, ಬ್ಲಾಗುಗಳು, ಸಾಮಾಜಿಕ ಜಾಲ ತಾಣಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳಿಂದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವಾಗ ಅದು ಅಧಿಕೃತವೇ ಎಂದು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕು. ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ನೆಲೆಯನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕು. ಇಂತಹ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳು ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಸೋಫ್ಟ್‌ವೇರ್‌ಗಳು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ದೊರಕುವಂಥದ್ದೂ, ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಿಗುವಂಥದ್ದೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ICT ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಮಗುವಿನ ವಯಸ್ಸು, ಮಾನಸಿಕ ಸ್ಥಿತಿ ಇವುಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವಂತಿರಬೇಕು.

1.10 ಮೌಲ್ಯಗಳು, ಮನೋಧರ್ಮಗಳು, ಕಾಳಜಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸುವ ವಲಯಗಳು

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಲ್ಲಿ ಮಾನವೀಯ ಮೌಲ್ಯ ಹಾಗೂ ಸಾಂವಿಧಾನಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಕುರಿತು ಅರಿವು ಮೂಡಿಸುವುದು, ಸಾಮಾಜಿಕ ಜೀವನವನ್ನು ಬಲಗೊಳಿಸುವ ಮನೋಧರ್ಮವನ್ನು ಮೂಡಿಸುವುದು, ಸಾಮಾಜಿಕ ಕಾಳಜಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು ಮೊದಲಾದವು ಪಠ್ಯ ಕ್ರಮದ ಪ್ರಥಮ ಪರಿಗಣನೆಯ ವಿಷಯಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಲು ಸೂಚಿಸಲಾದ ಆಶಯ ವಲಯಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ಪ್ರಜ್ಞೆ

ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವಾಗ ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ದೃಷ್ಟಿಕೋನಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯೂ ವಿನಿಮಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವದ ಸಮೀಪನ ಇರಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ರೀತಿಯ ತರಗತಿ, ಶಾಲಾ ಪ್ರದೇಶಗಳು (ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ರೀತಿಯ ವೇದಿಕೆಗಳು), ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ಜೀವನ ಸಮೀಪನ ಮೊದಲಾದವುಗಳಿಂದ ಈ ಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಸಾಂವಿಧಾನಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳು

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನವು ಎತ್ತಿ ಹಿಡಿದಿರುವ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನೂ ಗುರಿಗಳನ್ನೂ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಪ್ರತಿಫಲಿಸುವಂತಿರಬೇಕು. ಸಾಂವಿಧಾನಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥರನ್ನಾಗಿಸುವ ಪಾಠಗಳನ್ನೂ ವಿನಿಮಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವತ್ತ ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಜಾತ್ಯತೀತ ಮನೋಭಾವ

ಜಾತ್ಯತೀತ ಮನೋಧರ್ಮವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವಂಥ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡು,

ಯೋಗ್ಯವಾದ ಕಲಿಕಾ ರೀತಿಯನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕು.

ಸಹಿಷ್ಣುತೆ

ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯವುಳ್ಳವರನ್ನೂ ಸಹನೆಯಿಂದ ಕಾಣುವುದು ಎಂಬ ಮೂಲ ತತ್ವವನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಗುರಿಯಾಗಿಸಬೇಕು.

ಕ್ರಿಯಾಶೀಲ – ಸೃಜನಶೀಲ ಚಿಂತನೆ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯಾಶೀಲವೂ ಸೃಜನಶೀಲವೂ ಆಗಿರುವ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನೂ, ಸಂಶೋಧನ ಬುದ್ಧಿಯನ್ನೂ ಬೆಳೆಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಪಠ್ಯ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾ ತಂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸೃಜನಶೀಲ ಹುಡುಕಾಟಕ್ಕೆ ಅವಕಾಶವಿರಬೇಕು. ಬಹುಮುಖ ಬೌದ್ಧಿಕತೆ (multiple intelligence) ಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

ಸಂಸ್ಕೃತಿ ಹಾಗೂ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು

ನಮ್ಮ ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಪರಂಪರೆ ಹಾಗೂ ಇತಿಹಾಸವನ್ನು ಗೌರವಿಸುವ ಮನೋಧರ್ಮದ ನಿರ್ಮಾಣ ಎಂಬುದು ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಪೂರೈಸಬೇಕಾದ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ.

ಸಮತ್ವ ಎಂಬ ಆಶಯ

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನತೆ, ಸಮತ್ವ ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕಾದುದು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿದೆ.

ನಾಯಕತ್ವಗುಣ

ಹೊಸ ಸಹಸ್ರಮಾನದ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಲೂ, ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸಲೂ ಸಮರ್ಥರಾದ ನಾಯಕರನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಯೋಗ್ಯವಾದ ಕಲಿಕಾ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ತರಗತಿಯ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ದೃಢಗೊಳಿಸಿ, ನಾಯಕತ್ವ ಗುಣಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸುವ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಜೀವನ ಕೌಶಲ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ

ದೈನಂದಿನ ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಅನುಭವಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಫಲಪ್ರದವಾಗಿ ಎದುರಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾದ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವೇ ಜೀವನ ಕೌಶಲ್ಯಗಳು. ತನ್ನನ್ನು

ತಾನು ಅರಿತುಕೊಳ್ಳುವುದು, ಇತರರನ್ನು ಅರಿತುಕೊಳ್ಳುವುದು, ವಿಚಾರ ವಿನಿಮಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ, ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ, ಸೃಜನಶೀಲ ಚಿಂತನೆ, ವಿಮರ್ಶಾತ್ಮಕ ಚಿಂತನೆ, ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ, ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರ, ಭಾವನಾತ್ಮಕ ಸಮತೋಲನ, ಒತ್ತಡದ ನಿಭಾಯಿಸುವಿಕೆ ಮೊದಲಾದವು ಜೀವನಕೌಶಲ್ಯಗಳಾಗಿವೆ. ಮಕ್ಕಳ ಪರಿಸರವನ್ನು ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಈ ವಲಯಗಳ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸದೊಂದಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಯಲು ಇಂತಹ ಕೌಶಲ್ಯಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತವೆ.

ಪೌರಧರ್ಮ

ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಪ್ರಜೆಗಳಿಗೆ ಹೇಗೋ ಹಾಗೆಯೇ ಪ್ರಜೆಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಕ್ಕೆ ಸಲ್ಲಿಸಬೇಕಾದ ಕೆಲವು ಧರ್ಮಗಳೂ, ಕರ್ತವ್ಯಗಳೂ ಇವೆ. ಒಂದು ರಾಷ್ಟ್ರದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಎಂದರೆ ಮಾನವ ಸಂಪನ್ಮೂಲದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವ ಈ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪೌರಪ್ರಜ್ಞೆಯಿರುವ ಜನರನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವುದು ಶಿಕ್ಷಣದ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ತವ್ಯವಾಗಿದೆ. ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಸಮಾಜ ಸೃಷ್ಟಿಯೊಂದಿಗೆ ಜವಾಬ್ದಾರಿ ಮತ್ತು ಶಿಸ್ತಿನಿಂದ ಕೂಡಿದ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವುದು ಶಿಕ್ಷಣ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ.

ಮಾನವ ಹಕ್ಕುಗಳು

ಮಾನವ ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ಗೌರವದಿಂದ ಬದುಕುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಹಕ್ಕುಗಳೇ ಮಾನವ ಹಕ್ಕುಗಳು. ಸಂಯುಕ್ತರಾಷ್ಟ್ರ ಸಂಘದ ಮಾನವ ಹಕ್ಕುಗಳ ಘೋಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಅಂಗೀಕಾರ ಲಭಿಸಿದ ಮಾನವ ಹಕ್ಕು ಗಳಿಗೆ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೂ ಪಾಠವಿನಿಮಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವನ್ನು ನೀಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳು

ಮಕ್ಕಳ ಎಲ್ಲ ರೀತಿಯ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಬೇಕಾದ ಜವಾಬ್ದಾರಿ ನಮ್ಮ ಕರ್ತವ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಕೃತಿ – ಪ್ರಕೃತಿ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಪರಿಸರ ಶುಚಿತ್ವ

ಪ್ರಕೃತಿ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳ ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಪರಿಸರ ಶುಚಿತ್ವ, ಪ್ರಕೃತಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳ ಕುರಿತು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ದೃಷ್ಟಿಕೋನಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ತರಗತಿಗಳಿಂದಲೇ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ವ್ಯಕ್ತಿ ಶುಚಿತ್ವದಂತೆಯೇ ಪರಿಸರ ಶುಚಿತ್ವವೂ ಅಗತ್ಯ ಎಂಬ ಶುಚಿತ್ವದ ಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರಕೃತಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಕೇವಲ ಮಾನವನಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೇರಿದ್ದಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪ್ರಕೃತಿಯ ಸಮತೋಲನವನ್ನು ಕಾಪಾಡದಿದ್ದರೆ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ದುರಂತಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುವುದು ಎಂಬ ಮನೋಭಾವವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಬೇಕು. ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಹಾಗೂ ಪರಿಸರ

ಶುಚಿತ್ವವನ್ನು ಒಂದು ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಮನೋಧರ್ಮವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಅನುಷ್ಠಾನಗೊಳಿಸಬೇಕು.

ಶಾಂತಿಯ ಶಿಕ್ಷಣ

ವೈಯುಕ್ತಿಕವಾಗಿಯೂ ಸಾಮಾಜಿಕವಾಗಿಯೂ ಶಾಂತಿ ಮತ್ತು ಸಮಾಧಾನವನ್ನು ಕಾಪಾಡುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಮನೋಭಾವಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು ಶಾಂತಿ ಶಿಕ್ಷಣದ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿ. ಸಂಘರ್ಷಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುವ ಹಿನ್ನೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಶಾಂತಿ, ಸೌಹಾರ್ದ ಹಾಗೂ ಸಮಾಧಾನದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕಾದುದು ಈ ಶಿಕ್ಷಣ ನೀತಿಯ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಕಾನೂನು ಸಾಕ್ಷರತೆ

ಕಾನೂನು ಸಂಬಂಧವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ದೇಶದ ಪ್ರಜೆಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಕಾನೂನು ಸಾಕ್ಷರತೆಯನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸುವ ಪಾಠಭಾಗಗಳನ್ನು ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಅಳವಡಿಸಬೇಕಾದುದು ಕಾಲದ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಕಾನೂನು ಸಹಾಯ ವೇದಿಕೆ, ಕಾನೂನು ಕ್ಲಬ್‌ಗಳು, ಕಾನೂನು ಕ್ಲಿನಿಕ್‌ಗಳು, ಕಾನೂನು ತಿಳುವಳಿಕಾ ಶಿಬಿರಗಳು ಮೊದಲಾದ ವಿಭಿನ್ನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಆಯೋಜಿಸಬಹುದು.

ಸೈಬರ್ ಅಪರಾಧಗಳ ಕುರಿತಾಗಿರುವ ತಿಳುವಳಿಕೆ

ಮಾಹಿತಿ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನದ ಬಳಕೆಯಿರುವ ಸಮಕಾಲೀನ ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿದಿನವೆಂಬಂತೆ ಸೈಬರ್ ದುರುಪಯೋಗ ಮತ್ತು ಅಪರಾಧ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿವೆ. ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಇಂತಹ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಂದ ದೂರವಿರಿಸುವ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕು. ಇ–ಮೈಲ್, ಇಂಟರ್‌ನೆಟ್, ಸಾಮಾಜಿಕ ಜಾಲತಾಣಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಕುರಿತು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಬಳಕೆಯ ಗುಣ ದೋಷಗಳನ್ನೂ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಒದಗಿಸಬೇಕು. ಸೈಬರ್ ಅಪರಾಧಗಳಿಗಿರುವ ಶಿಕ್ಷೆ ಹಾಗೂ ಇಂಟರ್‌ನೆಟ್ ಬಳಕೆಯ ನೈತಿಕತೆಯನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಸಬೇಕು.

ಮಾಧ್ಯಮ ತಿಳುವಳಿಕೆ

ಪತ್ರಿಕೆ ಹಾಗೂ ದೃಶ್ಯಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ನಮ್ಮ ಸಮಾಜದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವಿದೆ. ದೃಶ್ಯಮಾಧ್ಯಮಗಳು ಮಕ್ಕಳ ಮೇಲೆ ಬೀರುವ ಪರಿಣಾಮ ಅಪಾರ. ಹೀಗೆ ಮಾಧ್ಯಮ ಸಂಬಂಧಿ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೇರ್ಪಡೆಗೊಳಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಶಾಶ್ವತ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ದೃಷ್ಟಿಕೋನ

ಈ ಭೂಮಿಯು ಮಾನವನಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೇರಿದ್ದಲ್ಲ ಎಂಬ ಪರಿಸರ ಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಒದಗಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪರಿಸರ ಸಂಬಂಧವಾದ ಸವಾಲುಗಳು, ಪರಿಸರ ನಾಶಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗುವ ಮಾನವನ ಕೈವಾಡಗಳು ಹಾಗೂ ಪರಿಸರವನ್ನು ದುರಂತಗಳಿಂದ ಪಾರುಮಾಡುವ ದಾರಿಗಳ ಕುರಿತು ಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನು ಮೂಡಿಸಬೇಕಾದುದು ಇಂದಿನ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಪರಿಸರ ಮತ್ತು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಶಾಶ್ವತವಾದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನಗಳನ್ನೂ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನೂ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕು. ಸಮಗ್ರವಾದ ಪರಿಸರ ಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನು ಹುಟ್ಟಿಸುವುದು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು.

ಬಾಲ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ

ಮಕ್ಕಳ ಮನಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಆರೋಗ್ಯ ಕಾರ್ಯಕರ್ತರು, ವೈದ್ಯರು ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಂಯುಕ್ತ ಪರಿಶ್ರಮಗಳ ಮೂಲಕ ಬಾಲ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಲು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆರೋಗ್ಯ, ಶುಚಿತ್ವ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಶಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉಪಭೋಗ ಸಂಸ್ಕೃತಿ–ದುಷ್ಪರಿಣಾಮಗಳು

ಉಪಭೋಗ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ದುಷ್ಪರಿಣಾಮಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲಾ ಮಟ್ಟದಿಂದಲೇ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕು. ಬಳಕೆದಾರ ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನೂ, ಬಳಕೆದಾರರಿಗೆ ನೆರವಾಗುವ ಕಾನೂನುಗಳನ್ನೂ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ತಿಳಿಸಿಕೊಡಬೇಕು.

ಮಾದಕ ದ್ರವ್ಯ ವಿರೋಧಿ ನಿಲುವು

ಮದ್ಯ, ಮಾದಕ ವಸ್ತುಗಳು, ಹೊಗೆ ಸೊಪ್ಪು ಹಾಗೂ ಇತರ ಮಾದಕ ದ್ರವ್ಯಗಳ ಬಳಕೆಯು ಹೊಸ ತಲೆಮಾರಿನ ಆರೋಗ್ಯವನ್ನು ಕೆಡಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅರಿವು ನಮ್ಮದಾಗಬೇಕು. ಮುಂದಿನ ತಲೆಮಾರನ್ನು ಇವುಗಳಿಂದ ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸಿ ರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮಾದಕದ್ರವ್ಯಗಳ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ದೈಹಿಕ ಮಾನಸಿಕ ತೊಂದರೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಚಿತ್ರಗಳು, ಲಘು ಬರಹಗಳು, ದೃಶ್ಯಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕು. ಮಾದಕ ದ್ರವ್ಯ ವಿರೋಧಿ ನಿಲುವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವುದು ಇವುಗಳ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಲಿಂಗ ಸಮಾನತೆ

ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಲಿಂಗ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸುವಂತಿರಬೇಕು. ಗಂಡು – ಹೆಣ್ಣು ಎಂಬ ಭೇದಭಾವಗಳು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನುಸುಳಬಾರದು. ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಲಿಂಗ ಸಮಾನತೆಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನವಿರಬೇಕು. ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಲಿಂಗ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕಾದುದು ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಕರ್ತವ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಮಿತವ್ಯಯ ಗುಣ

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲಾ ಹಂತದಲ್ಲಿಯೇ ಮಿತವ್ಯಯ ಗುಣವನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕಲಿಸಬೇಕು. ಮಿತವ್ಯಯ ಗುಣದ ಅಗತ್ಯ ಮತ್ತು ಮಹತ್ವವನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡಬೇಕು. ಮಿತವ್ಯಯವನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಸಿಕೊಡಬೇಕು.

ರಸ್ತೆ ಸುರಕ್ಷೆ

ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ನಿಮಯಗಳು, ರಸ್ತೆ ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ತಪ್ಪಿಸಲು ಇರುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸೂಚನೆಗಳು, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮೊದಲಾದವು ರಸ್ತೆ ಸುರಕ್ಷೆಯ ಘಟಕಗಳಾಗಿವೆ. ರಸ್ತೆಯು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸ್ಥಳವೆಂದೂ, ನಮ್ಮ ಹಾಗೆ ಇತರರಿಗೂ ರಸ್ತೆಯನ್ನು ಬಳಸುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವಿದೆ ಎಂದೂ ಪೌರಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನು ಹುಟ್ಟಿಸಬೇಕು. ರಸ್ತೆ ಸುರಕ್ಷತೆಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯ ನೀಡಬೇಕು.

ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾದ ವಿನಿಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಹಿನ್ನೆಲೆಯಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕು. ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ಒಳ ಹೂರಣದ ಆಶಯಗಳ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೀಕರಿಸುವಾಗಲೂ ಸಾಕಷ್ಟು ಪರಿಗಣನೆಯನ್ನು ನೀಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಬೋಧನೆ ಮತ್ತು ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಗುವಾಗ ಇಂತಹ ಆಶಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತಿಳುವಳಿಕೆ, ಕೌಶಲ್ಯ, ಮನೋಭಾವ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒತ್ತು ನೀಡಬೇಕು. ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈ ಗುರಿಗಳನ್ನು ಈಡೇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು. ವಿವಿಧ ಕ್ಲಬ್‌ಗಳ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು, SPC, NCC, Scouts & Guides, JRC, ವಿದ್ಯಾರಂಗ ಕಲಾ ಸಾಹಿತ್ಯವೇದಿಕೆ, ಗಾಂಧೀದರ್ಶನ ಮೊದಲಾದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನೂ ಮನೋಧರ್ಮಗಳನ್ನೂ ಕಾಳಜಿಯನ್ನೂ ಬೆಳೆಸುವ ವೇದಿಕೆಗಳಾಗಬೇಕು.

1.11 ಹಕ್ಕು ಆಧಾರಿತ ಶಿಕ್ಷಣ (Right Based Education)

ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ ಅನುಷ್ಠಾನಗೊಳಿಸಲು ಯುನೆಸ್ಕೋ ನೇತೃತ್ವ ವಹಿಸಿದೆ. ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳ ಸಂರಕ್ಷಣೆಗಾಗಿ ಅನೇಕ ಕಾನೂನುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಭಾರತದಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕು ನಿಯಮ– 2009 ಕಾರ್ಯಗತವಾಗಿರುವುದು ಈ ನಿಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೈಲಿಗಲ್ಲು. ಮಕ್ಕಳ ಎಲ್ಲ ರೀತಿಯ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯು ಹಿರಿಯರಾದ ನಮ್ಮ ಕರ್ತವ್ಯವಾಗಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತು ಹೇಳುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೂರು ಮುಖ್ಯ ಘಟಕಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು.

- ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ (Participation)
- ಲಭ್ಯತೆ (Provision)
- ಸಂರಕ್ಷಣೆ (Protection)

ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ (Participation)

- ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ತೀರ್ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ನನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಕೇಳುತ್ತಾರೆ.
- ತೀರ್ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ನನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯಕ್ಕೆ ಮುಖ್ಯ ಪರಿಗಣನೆ ಇದೆ.
- ನನ್ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಮಿತಿಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ನೀಡಲಾಗುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಲು ನನಗೆ ಅವಕಾಶ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.
- ನನ್ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪೋಷಿಸಲೂ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ದಾಟಲೂ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.
- ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ನನಗೂ ಸಹಪಾಠಿಗಳಿಗೂ ಕ್ರಿಯಾಶೀಲವಾದ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ ಲಭಿಸುತ್ತಿದೆ.
- ನನ್ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಲು ನನಗೆ ಅವಕಾಶ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಲಭ್ಯತೆ (Provision)

- ಸರಿಯಾದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಯೋಗ್ಯತೆಯಿರುವ, ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಕಾಲಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ನವೀಕರಿಸುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸೇವೆ ನನಗೆ ಲಭಿಸುತ್ತಿದೆ.
- ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿಕಾನುಭವಗಳು ಸರಿಯಾದ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಿಗುತ್ತಿವೆ.
- ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿರುವ ತರಗತಿ ಪರಿಸರ ನನಗೆ ಲಭಿಸುತ್ತಿದೆ.
- ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಕಲಿಕೋಪಕರಣಗಳನ್ನು ಯಥಾಕಾಲಕ್ಕೆ ಒದಗಿಸಿಕೊಡಲು ನನ್ನ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಕಲೆ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಉಪಕರಣಗಳೂ ಅವಕಾಶಗಳೂ ನನಗೆ ಸಿಗುತ್ತಿವೆ.

RTE 2009 ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ

- 1 ರಿಂದ 5 ರ ವರೆಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ 200 ಕಲಿಕೆಯ ದಿವಸಗಳೂ 800 ಗಂಟೆಗಳ ಬೋಧನ ಸಮಯವೂ ಲಭಿಸಬೇಕು.
- 6 ರಿಂದ 8 ರ ವರೆಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 220 ಕಲಿಕೆಯ ದಿವಸಗಳೂ 1000 ಗಂಟೆಗಳ ಬೋಧನ ಸಮಯವೂ ಲಭಿಸಬೇಕು.

ಸಂರಕ್ಷಣೆ (Protection)

- ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಹೊರಗೆ ಯಾವುದೇ ಭೇದಭಾವವನ್ನು ನಾನು ಅನುಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ.
- ನನ್ನನ್ನು ಯಾರೂ ಕೂಡಾ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಡೆಗಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ.
- ಯಾರೂ ಕೂಡಾ ದೈಹಿಕ ಅಥವಾ ಮಾನಸಿಕ ದೌರ್ಜನ್ಯವೆಸಗುವುದಿಲ್ಲ.
- ಅಧ್ಯಾಪಕರಲ್ಲಿ ನಿರ್ಭೀತಿಯಿಂದ ವ್ಯವಹರಿಸಲು ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಮಗುವಾದರೂ ನನಗೆ ಖಾಸಗಿತನವಿದೆ. ನನ್ನನ್ನು ಎಲ್ಲರೂ ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತಾರೆ.
- ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಮನೆಯಲ್ಲಿಯೂ ನಾನು ಸುರಕ್ಷಿತನಾಗಿದ್ದೇನೆ ಎಂಬ ಭರವಸೆ ನನಗಿದೆ.

ಕೇರಳ ರಾಜ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ

2002 ಮೇ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ ಸಂಯುಕ್ತ ರಾಷ್ಟ್ರ ಸಭೆಯ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿರುವ ವಿಶೇಷ ಸಮ್ಮೇಳನವು 'ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಒಂದು ಜಗತ್ತು' ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ಣಯವೊಂದನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿತು. ಇದರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಸರಕಾರವು ನಿರ್ಮಿಸಿದ 2005ರ ಬಾಲಕರ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ ಕಾಯಿದೆಯ ಹಾಗೂ 2012ರ ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ನಿಯಮಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ 'ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಆಯೋಗ' ಕಾರ್ಯಾಚರಿಸುತ್ತಿದೆ. ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನವು ಹೇಳುವ ಮೂಲಭೂತ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು ಆಯೋಗದ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ.

ಈ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಲು ತಾನು ಏನು ಮಾಡಿದೆನೆಂದೂ ಇನ್ನು ಏನು ಮಾಡಬಹುದೆಂದೂ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಅಧ್ಯಾಪಕನೂ ಯೋಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

1.12 ಮೆಂಟರಿಂಗ್

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕು ಕಾಯ್ದೆಯು ಅಧ್ಯಾಪಕ/ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯನ್ನು ಮೆಂಟರ್ (mentor) ಎಂಬುದಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮಗ್ರ ಶಾಲಾ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ವಲಯದಲ್ಲಿ ಮೆಂಟರಿಂಗ್‌ಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವಿದೆ. ಕಲಿಕೆಯ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ರುಜುವಾತುಪಡಿಸಲು ಸಮಗ್ರವಾದ ಮಾರ್ಗಸೂಚಿಗಳು ಅತಿ ಅವಶ್ಯಕ.

ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮುಖ್ಯ ಘಟಕವಾದ ಅಧ್ಯಾಪಕ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಇಂದು ಬಹಳಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಾಗಿವೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಹಸ್ತಾಂತರಿಸುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಗಳಿಸಲಿರುವ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿಕೊಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯಾಗಿಯೂ ಅಧ್ಯಾಪಕ/ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಮನೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಶಾಲೆ ಎಂಬುದು ಮತ್ತೊಂದು ಮನೆಯಿದ್ದಂತೆ. ಶಾಲೆ ಮನೆಯೇ ಆದಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಅಧ್ಯಾಪಕ ವೃಂದವು ಮನೆಯ ಸದಸ್ಯರೇ ಆಗುತ್ತಾರೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಲಭಿಸುವ ಪ್ರೀತಿ, ಕಾಳಜಿ, ರಕ್ಷಣೆ, ಅಂಗೀಕಾರ ಮುಂತಾದವುಗಳು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಲಭಿಸುತ್ತಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಅಧ್ಯಾಪಕ ಅಥವಾ ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದನ್ನು ತಿಳಿದಾದ ಬಳಿಕ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಗುವಿಗೂ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗಿದೆ. ಹೀಗಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಶಾಲೆಯೂ ಮನೆಯೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಗುವಿನ ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾದ ಮತ್ತು ಕೌಟುಂಬಿಕವಾದ ಹಿನ್ನೆಲೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

- ಗೃಹ ಸಂದರ್ಶನ
- ಹೆತ್ತವರೊಂದಿಗಿನ ಆಶಯ ವಿನಿಮಯ
- ಮಗುವಿನ ನಿರಂತರ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ
-

ಹೀಗೆ ಮಗುವಿಗೆ ಪ್ರೀತಿ, ಅಂಗೀಕಾರ ಮತ್ತು ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ನೀಡಿ, ನಾವು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಮಗುವಿನ ಸಹರಕ್ಷಕರಾಗಿ ಜವಾಬ್ದಾರಿ ವಹಿಸಿಕೊಂಡಾಗ ಮಾತ್ರ ಹೊಸ ಕಾಲಮಾನದ ಅಧ್ಯಾಪಕ/ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯಾಗಿ ನಾವು ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಮೆಂಟರಿಂಗ್ ಮೂಲಕ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ, ಸಲಹೆ, ಬೆಂಬಲ, ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಅವಕಾಶ ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಮಗುವಿಗೆ ಒದಗಿಸಿಕೊಡುತ್ತಾರೆ. ಅನುಭವಿಯಾದ ನೇತಾರ ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಕರಣೀಯ ಆದರ್ಶ ವ್ಯಕ್ತಿ ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಮೆಂಟರಿಂಗ್‌ನ ಕಾರ್ಯಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮುಂದುವರಿಯಬೇಕು. ಬೋಧನೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಸೂಚನೆಗಳು, ಕೌನ್ಸಿಲಿಂಗ್ ಇತ್ಯಾದಿಗಳೆಲ್ಲ ಇದರ ಭಾಗಗಳಾಗಿವೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಒಳಗೆ ಸುಪ್ತವಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಹೊರಗೆ ತರಲು ಸಮರ್ಥ ಮೆಂಟರ್‌ನಿಂದ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

ಮೆಂಟರಿಂಗ್ ಮೂಲಕ

- ಅಧ್ಯಾಪಕ ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಉತ್ತಮ ಶಿಕ್ಷಣ ಅನುಭವಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ.
- ಅಧ್ಯಾಪಕ ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಜ್ಞಾನ ವಲಯ ವಿಸ್ತಾರಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮತ್ತು ಶಾಲೆಯ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಗಟ್ಟಿಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.
- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಗತಿ ಹಾಗೂ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಾಸ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.
- ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಮಾಜಿಕ ಪ್ರಜ್ಞೆ ಬೆಳೆಸಲು ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.
- ಹೆತ್ತವರು ಹಾಗೂ ಶಾಲೆಯ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಗಟ್ಟಿಗೊಳ್ಳುವುದಲ್ಲದೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಲಿಕೆಯ ಗುಣಮಟ್ಟದ ಕುರಿತು ತಿಳಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಕಲೆ, ಕ್ರೀಡೆ, ಆರೋಗ್ಯ, ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ ಮೊದಲಾದ ಕಲಿಕಾ ವಲಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ಗಟ್ಟಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೆಂಟರಿಂಗ್‌ಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಕಾಶೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿ, ಇದೊಂದು ಪರಿಹಾರ ಬೋಧನೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿಯೂ ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಾಸಕ್ಕೆ ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ ರೂಪುಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಶಾಲೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು 'ಮೆಂಟರ್ಸ್' ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು 'ಮೆಂಟಿ' ಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ ಮೂಲಕ ಮೆಂಟರಿಂಗ್ ರೂಪುಗೊಳ್ಳಬೇಕು. ತರಗತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಗುಂಪುಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಮರ್ಪಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲು ಆಯಾ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಸುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಗುಂಪಿನ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

1.13 ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ಪ್ರಮುಖ ವೃತ್ತಿಪರ ನೀತಿಸಂಹಿತೆ

(Code of Professional Ethics for School Teachers)

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೊಂದಿಗಿರುವ ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳು

1.1 ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಪ್ರೀತಿ, ವಾತ್ಸಲ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುವುದು.

- ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನ ರೀತಿಯಿಂದ ವರ್ತಿಸುವುದು.
- ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ವಿಶೇಷ ಪರಿಗಣನೆ ನೀಡುವುದು.
- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸ, ಆಸಕ್ತಿ ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಮೂಡಿಸುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಹರಿಸುವುದು.

1.2 ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ, ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿಗತಿ, ಭಾಷೆ, ಲಿಂಗ, ಜನ್ಮಸ್ಥಳ ಎಂಬೀ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಭಾವವಿಲ್ಲದೆ, ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತ ಹಾಗೂ ನ್ಯಾಯಯುತವಾದ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು.

- ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ತತ್ವಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಲ್ಲಿ, ಸಹಿಷ್ಣುತೆಯ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗಿರುವ ನಂಬಿಕೆ ಮತ್ತು ವಿಶ್ವಾಸವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮೂಡಿಸುವುದು.
- ಅಧ್ಯಾಪಕರ ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾದ ನಂಬಿಕೆಗಳು ಸಂವಿಧಾನದ ತತ್ವಗಳಿಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾದರೆ ಅದು ಶಾಲೆಯ ಒಟ್ಟು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮೇಲೆ ಗಂಭೀರ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಬಹುದು.

1.3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ದೈಹಿಕ, ಬೌದ್ಧಿಕ, ಭಾವನಾತ್ಮಕ, ಸಾಮಾಜಿಕ ಮತ್ತು ಸದಾಚಾರಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ವಾತಾವರಣದ ಸೃಷ್ಟಿ.

- ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಶಾರೀರಿಕ ಮತ್ತು ಬೌದ್ಧಿಕವಾದ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಪೂರ್ಣತೆಯತ್ತ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುವ ಕಾಲಘಟ್ಟವಾಗಿದೆ.
- ಶಿಕ್ಷಣವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಬೌದ್ಧಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗಿರಬಾರದು.
- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯು ಶಿಕ್ಷಣದ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

1.4 ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣದ ಎಲ್ಲಾ ಘಟ್ಟಗಳಲ್ಲಿಯೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವವು ಗೌರವಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

- ವ್ಯಕ್ತಿ ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಿರುವ ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ಪರವಾದ ಹಕ್ಕುಗಳು ಹಾಗೂ ಸ್ಥಾನಮಾನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.
- ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯ ಭಾಗದಿಂದ ಬರಬಹುದಾದ ಯಾವುದೇ ಪ್ರತಿಕೂಲ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸ್ವಾಭಿಮಾನವನ್ನು ಘಾಸಿಗೊಳಿಸುವುದಲ್ಲದೆ ಅವು ಆತನ ಕಲಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ದುಷ್ಪರಿಣಾಮವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಕಾರ್ಯಚಟುಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಕ್ರಿಯವಾದ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹ ನೀಡಬೇಕು.
- ಸಂಯುಕ್ತ ರಾಷ್ಟ್ರ ಸಂಘ ಅಂಗೀಕರಿಸಿದ ಹಾಗೂ ಭಾರತವು ಒಪ್ಪಿರುವ ಮತ್ತು ಪಾಲಿಸಿಕೊಂಡು ಬಂದಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಕಾಯ್ದೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಸಮಿತಿಯ ವರದಿಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟು ವ್ಯವಹರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.
- ಶಾಲೆಯ ಶಿಸ್ತುಕ್ರಮ ಪಾಲನೆಗಾಗಿ ರೂಪಿಸುವ ನಿಯಮಾವಳಿಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಮಾನವೀಯ ಹಕ್ಕುಗಳಿಗೆ ಧಕ್ಕೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡಬಾರದು.

1.5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಲ್ಲಿ ಸುಪ್ತವಾಗಿರುವ ಕೌಶಲ್ಯ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಭೆಯು ಪ್ರಕಟಗೊಳ್ಳಲು ಸೂಕ್ತವಾದ ಹಾಗೂ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾದ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕು.

- ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಧನೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಿಶೇಷ ಕೌಶಲ್ಯ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯ ಬಹುಮುಖ್ಯ ಕರ್ತವ್ಯವಾಗಿದೆ.
- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಇರಬೇಕು.

1.6 ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಸಂವಿಧಾನವು ತಿಳಿಸುವ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ವಿಚಾರಧಾರೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು.

- ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ, ಜಾತ್ಯತೀತತೆ, ಸಮತ್ವ, ನೈತಿಕತೆ, ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಮುಂತಾದ ಸಂವಿಧಾನದ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಅಂಶಗಳಾಗಿರಬೇಕು.
- ಪೌರರ ಕರ್ತವ್ಯಗಳ ಕುರಿತು ಹೇಳಿರುವ ಸಂವಿಧಾನದ ಪರಿಚ್ಛೇದ (ಆರ್ಟಿಕಲ್) 51 ಎ ಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಅದರಲ್ಲಿನ 'ಎ' ಯಿಂದ 'ಕೆ' ವರೆಗಿನ ಆಶಯಗಳನ್ನು

ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವ್ಯವಹರಿಸಬೇಕು.

1.7 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಗತ್ಯಗಳಿಗನುಸಾರ ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯ/ಅಧ್ಯಾಪಕನ ಬೋಧನ ರೀತಿಯನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಬೇಕು.

- ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸ್ವಭಾವ, ಗಳಿಸಿದ ಜ್ಞಾನ, ಅಭಿರುಚಿ, ಕಲಿಕೆಯ ರೀತಿ ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಬೋಧನೆಯ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾದ ಪರಿಷ್ಕಾರವನ್ನು ನಿರಂತರ ನಡೆಸುತ್ತಿರಬೇಕು.

1.8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೀಡುವ ಅವರ ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾದ ವಿಚಾರಗಳ ಗೌಪ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಾಪಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಇಂತಹ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕಾನೂನುಬದ್ಧವಾಗಿ ಯಾರಿಗೆ ತಿಳಿಸಬಹುದೋ ಅವರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಸುವುದು.

- ಕೌನ್ಸಿಲರ್ ಕೂಡಾ ಆಗಿರುವ ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಾಧ್ಯ.
- ಈ ವಿವರಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಒಳಿತಿಗಾಗಿ ವಿವೇಕದಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸತಕ್ಕದ್ದು.

1.9 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಗದರಿಸುವುದು, ಆತಂಕಕ್ಕೀಡುಮಾಡುವುದು, ಶಾರೀರಿಕವಾಗಿ, ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ, ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ದೌರ್ಜನ್ಯವೆಸಗುವುದು ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಾರದು.

- ಲೈಂಗಿಕ ದೌರ್ಜನ್ಯದಿಂದ, ಕಡೆಗಣಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ, ಶೋಷಣೆಯಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವ ಜವಾಬ್ದಾರಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗಿದೆ.
- ಉತ್ತಮ ಕಲಿಯುವಿಕೆಗೆ ಶಿಕ್ಷೆ ಸಹಕಾರಿ ಎಂಬ ತಪ್ಪು ಕಲ್ಪನೆ ದೂರವಾಗಬೇಕು.
- ಇಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಲಭಿಸುವ ಕಾನೂನು ರಕ್ಷಣೆಗಳ ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು.

1.10 ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಲೈಂಗಿಕ ಶೋಷಣೆಯಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು.

- ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಲೈಂಗಿಕ ಶೋಷಣೆ, ದೈಹಿಕ ಗಾಯಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ದೀರ್ಘಕಾಲ ಉಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಮಾನಸಿಕ ಆಘಾತವೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಅಧೀರನನ್ನಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದ್ಯೋಗ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲೂ, ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲೂ ನಡೆಯುವ ಲೈಂಗಿಕ ಶೋಷಣೆಯ ವಿರುದ್ಧ ಭಾರತದ ಗೌರವಾನ್ವಿತ ಸುಪ್ರೀಂ ಕೋರ್ಟು ಮತ್ತು ಎನ್.ಸಿ.ಪಿ. ನೀಡಿದ ಮಾರ್ಗಸೂಚಿಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಪಾಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

2. ರಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ಸಮಾಜದೊಂದಿಗೆ ಇರಬೇಕಾದ ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳು

2.1 ತಂದೆ–ತಾಯಿಯರೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ರಕ್ಷಕರೊಂದಿಗೆ ವಿನಯಪೂರ್ವಕವಾದ ವರ್ತನೆ ಇರಬೇಕು.

- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕುರಿತು ಹೆಚ್ಚು ತಿಳಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅವರ ಹೆತ್ತವರೊಂದಿಗೂ ಗೆಳೆಯರೊಂದಿಗೂ ಉತ್ತಮ ಸಂಪರ್ಕ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಗತ್ಯ.

- ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆ ಮತ್ತು ಹೆತ್ತವರ ಬಾಂಧವ್ಯವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.
- ತಮ್ಮ ಮಕ್ಕಳ ಶಾಲೆಯೊಳಗಿನ ಮತ್ತು ಹೊರಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಂದ ತಿಳಿಯಲು ಹೆಚ್ಚಿನ ಹೆತ್ತವರು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ.
- ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಪ್ರಮಾದಗಳನ್ನು ಹೆತ್ತವರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವುದರಿಂದ ಮುಂದೆ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಹೊಸ ದುರಂತಗಳನ್ನು ತಪ್ಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು.

2.2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸ್ವಾಭಿಮಾನಕ್ಕೆ ಧಕ್ಕೆ ತರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಂದ ದೂರವಿರುವುದು.

- ಇತರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮುಂದೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸ್ವಾಭಿಮಾನಕ್ಕೆ ಧಕ್ಕೆ ಉಂಟಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾತನಾಡುವುದನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬೇಕು.
- ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆತ್ತವರ ಸ್ವಾಭಿಮಾನವನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಿಸಬಾರದು.
- ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಾಗಿರಿಸಿ (ಜಾತಿ, ಮತ, ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿ, ...) ಹೊಗಳುವುದರಿಂದ ಉಳಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ದ್ವೇಷ ಮನೋಭಾವ ಉಂಟಾಗುವುದು.

2.3 ಭಾರತದ ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಪರಂಪರೆಯ ಕುರಿತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆದರ ಹಾಗೂ ಗೌರವ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.

- ಭಾರತವು ವಿವಿಧ ಸಂಸ್ಕೃತಿ, ಭಾಷೆ, ಮತ, ನಂಬಿಕೆಗಳ ದೇಶ. ಈ ವೈವಿಧ್ಯವನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಗತಿಗಳಲ್ಲೂ ಕಾಣಬಹುದು.
- ಭಾರತದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧತೆಯಲ್ಲಿ ಏಕತೆಯಿದೆ.
- ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಲ್ಲೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಹಿಷ್ಣುತೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಸ್ಕೃತಿಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸುವ ಮನೋಭಾವ ಇರಬೇಕು.
- ಈ ಮನೋಭಾವ ಅಥವಾ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಮೂಲಕ ಬೆಳೆಸುವ ಪ್ರಜ್ಞಾಪೂರ್ವಕ ಪ್ರಯತ್ನ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

2.4 ವಿವಿಧ ಜನಸಮುದಾಯಗಳೊಳಗೆ ಪರಸ್ಪರ ದ್ವೇಷ, ಹಗೆತನವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವ ರೀತಿಯ ಕಾರ್ಯಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಕಡಿವಾಣ ಹಾಕಬೇಕು.

- ಎಲ್ಲ ಮತ, ನಂಬಿಕೆ ಮತ್ತು ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಗೌರವವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ರೀತಿಯ ಚಟುವಟಕೆಗಳು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯಬೇಕು.
- ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಭಾವೈಕ್ಯದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನೂ ಮೊದಲಿಗೆ ಭಾರತೀಯ. ಬಳಿಕ ಮಾತ್ರವೇ ಒಂದು ಸಮುದಾಯದ ಸದಸ್ಯ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯವಾಗಬೇಕು.

- ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗುಂಪಿನ ಪ್ರಚಾರಕ್ಕಾಗಿ ಶಾಲೆ/ತರಗತಿಯನ್ನು ಬಳಸಬಾರದು.
- ಸಮಕಾಲೀನ ಸಾಮಾಜಿಕ, ರಾಜಕೀಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡುವಾಗ ಅಧ್ಯಾಪಕ/ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪಕ್ಷದ ಪರವಾಗಿ ಮಾತನಾಡಬಾರದು.

3. ಅಧ್ಯಾಪನ ವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳೊಡನೆ ಇರಬೇಕಾದ ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳು

3.1 ವೃತ್ತಿ ಪರಿಣತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಲು ನಿರಂತರ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದು.

- ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ನಿರಂತರ ಕಲಿಕೆಯವನನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದರೊಂದಿಗೆ ಅಧ್ಯಾಪಕನು ತಾನೂ ಕಲಿಯುತ್ತಿರಬೇಕು.
- ನಿರಂತರವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿರುವ ಜ್ಞಾನ ವಲಯಗಳ ಕುರಿತು, ಅಧ್ಯಾಪನ ರೀತಿಯ ಕುರಿತು ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಸಂಪಾದಿಸಲೂ ಅದನ್ನು ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.
- ಯಾವ ಯಾವ ಮೂಲಗಳಿಂದ ತನಗೆ ಹೊಸ ಅರಿವು ಲಭಿಸಬಹುದೆಂಬ ಹುಡುಕಾಟ ಅಧ್ಯಾಪಕನ ಕರ್ತವ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

3.2 ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಹಾಗೂ ಇತರರೊಂದಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಆಶಯ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಹೊಸತಾದ ಜ್ಞಾನ ವಲಯ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವುದು.

- ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಜಾಗೃತಿಯನ್ನು ಮೂಡಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ತಮ್ಮದೇ ಆದ ಕೊಡುಗೆ ನೀಡುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಉತ್ತಮ ವಾತಾವರಣವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುದು.
- ಇಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶವುಂಟಾಗಲು ಪೂರ್ವಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ಫಲಪ್ರದವಾದ ಸಹಕಾರ ಮನೋಭಾವ ಎಲ್ಲ ಅಧ್ಯಾಪಕರಲ್ಲೂ ನಿರ್ಮಾಣವಾಗಬೇಕು.
- ಶಾಲೆಯ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹಾರ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಒಗ್ಗಟ್ಟು, ಚರ್ಚೆ, ಕ್ರಿಯಾತ್ಮಕ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ಹಾಗೂ ಫಲಪ್ರದ ಕಾರ್ಯಚಟುವಟಿಕೆ ಇರಬೇಕು.
- ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಶಾಲೆಯ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಮುತುವರ್ಜಿಯಿರುವ ಎಲ್ಲರನ್ನು ಇಂತಹ ಕ್ರಿಯಾಚಟುವಟಿಕಗಳಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಅಧ್ಯಾಪಕನಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

3.3 ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳೊಡನೆ ಗೌರವಾದರಗಳೊಂದಿಗೆ ವ್ಯವಹರಿಸಬೇಕು.

- ಶಾಲೆಯ ಎಲ್ಲ ಅಧ್ಯಾಪಕರೊಡನೆ ಅವರ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ ಯೋಗ್ಯತೆ, ಅವರು ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡದೆ ಅವರೊಂದಿಗೆ ಗೌರವಾದರಗಳಿಂದ ವ್ಯವಹರಿಸಬೇಕು.

3.4 ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಖಾಸಗಿಯಾಗಿ ಟ್ಯೂಶನ್ ತರಗತಿಗಳನ್ನು ನಡೆಸುವುದು ಅಥವಾ ಇತರ ಖಾಸಗಿ ಶಿಕ್ಷಣ

ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಮರ್ಪಕವಲ್ಲ.

- ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಖಾಸಗಿಯಾಗಿ ಟ್ಯೂಶನ್ ನಡೆಸುವುದರಿಂದ ಅಧ್ಯಾಪಕನ ಶಾಲಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೇಲೆ ಕೆಟ್ಟ ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗಬಹುದು.
- ಖಾಸಗಿ ಟ್ಯೂಶನ್ ನಡೆಸುವುದರಿಂದ ಶಾಲೆಯ ನೈತಿಕ ತತ್ವ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೆ ಧಕ್ಕೆಯುಂಟಾಗುವಂಥ ವ್ಯವಹಾರಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುವುದು.

3.5 ತನ್ನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನಗಳು ಪರರ ಪ್ರಭಾವಕ್ಕೊಳಗಾಗದಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಯಾವುದೇ ವಿಧವಾದ ಉಡುಗೊರೆ ಅಥವಾ ಇತರ ಸಹಾಯಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

- ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಸೌಲಭ್ಯಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿಕೊಂಡು ಕೊಡಮಾಡುವ ಬೆಲೆಬಾಳುವ ಉಡುಗೊರೆಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಿಂದ ಅಥವಾ ಹೆತ್ತವರಿಂದ ಸ್ವೀಕರಿಸಬಾರದು.

3.6 ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳಿಗೆದುರಾಗಿ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆದುರಾಗಿ ಅನಗತ್ಯವಾದ ಆರೋಪಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

- ಪರಸ್ಪರ ತಪ್ಪು ಹೊರಿಸುವ ಗುಂಪುಗಾರಿಕೆ ಅಧ್ಯಾಪಕರಲ್ಲಿ ಇರಬಾರದು.
- ಸಾಕ್ಷ್ಯಗಳಿಲ್ಲದೆ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳ ಮೇಲೆ ಆರೋಪ ಮಾಡಬಾರದು.
- ಯಾವುದಾದರೂ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿ/ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಂಭೀರವಾದ ಅಪರಾಧ ಕಂಡುಬಂದರೆ ಅದನ್ನು ಹಿರಿಯ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಗಮನಕ್ಕೆ ತರಬೇಕು.

3.7 ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಥವಾ ಹೆತ್ತವರ ಎದುರಲ್ಲಿ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಯೊಬ್ಬನ ಮೇಲೆ ದೋಷಾರೋಪಣೆ ಮಾಡಬಾರದು.

- ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಬಗ್ಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳಿರಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬೇಕು.
- ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಯ ಅಧ್ಯಾಪನ ರೀತಿಯನ್ನು ಅಪಹಾಸ್ಯ ಮಾಡುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾತನಾಡಬಾರದು.

3.8 ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳ ಬೋಧನ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು.

- ಅಧ್ಯಾಪನದಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಸಾಧನೆ ಮಾಡಿದವರ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಶ್ಲಾಘಿಸಬೇಕು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಅಂತಹ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ ಅದು ಅಂಧಾನುಕರಣೆಯಾಗಲೇಬಾರದು.

3.9 ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳ ಕುರಿತು ತಿಳಿದಿರುವ ವೈಯಕ್ತಿಕ ವಿವರಗಳನ್ನು ಗೌಪ್ಯವಾಗಿಡಬೇಕು. ಅಗತ್ಯವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಕಾನೂನು ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವುದು.

- ಯಾವುದಾದರೂ ಅಗತ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳ ವೈಯಕ್ತಿಕ ವಿವರಗಳು ಗೌಪ್ಯವಾಗಿಡುವಂಥವುಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಾನೂನುಬದ್ಧವಾದ ಕಾರ್ಯಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಯಪಡಿಸತಕ್ಕದ್ದು.

1.14 ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಉದ್ದೇಶವಾಗಿಟ್ಟು ತಮ್ಮ ಕಾರ್ಯಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲು ಪ್ರತಿಯೋರ್ವ ಅಧ್ಯಾಪಕನಿಗೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಿದ್ದಿಕೊಳ್ಳುವ ಅಥವಾ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಯೋಜನೆಯಿರಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಲಿಕಾಸಾಧನೆ ಈಡೇರಲು ಬೇಕಾಗುವಷ್ಟು ಕಾರ್ಯಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿರಬೇಕು.

ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಯೋಜನೆಗಳು ಪಾಠಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದಲ್ಲಿ ಲಭಿಸುವ ವಿವರಗಳ ದಾಖಲಾತಿಯು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಪುಟದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

ಮುಂದಿನ ಒಂದು ವಾರಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗಿ ತಯಾರಿಸುವ ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್, ಸ್ಕೂಲ್ ರಿಸೋರ್ಸ್ ಗ್ರೂಪ್ (SRG) ನಲ್ಲಿ / ವಿಷಯ ಸಮಿತಿಗಳಲ್ಲಿ (Subject Councils) ಮಂಡಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ. ಒಂದು ವಾರದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಪುಟದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅಧ್ಯಾಪಕನು ಸರಳವಾದ ಅವಲೋಕನ ಟಿಪ್ಪಣಿ (Reflection Note) ತಯಾರಿಸಿ, **SRG/SC** ಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ಟಿಪ್ಪಣಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕನ ಮುಂದಿನ ಯೋಜನಾ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು ತಯಾರಾಗಬೇಕು.

ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್‌ನ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್

ಪಾಠದ ಹೆಸರು :

ದಿನಾಂಕ :

ಸಮಯ :

ವಿಷಯ (Theme) :

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು :

ಆಶಯಗಳು :

ಕೌಶಲ್ಯಗಳು :

ಭಾಷಾ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳು (ಭಾಷೆಗೆ ಮಾತ್ರ) :

ವ್ಯವಹಾರ ರೂಪಗಳು (ಭಾಷಾ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ) :

ಮೌಲ್ಯಗಳು – ಮನೋಭಾವಗಳು :

ಕಲಿಕೋಪಕರಣಗಳು :

ಉತ್ಪನ್ನಗಳು :

ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	**ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ**
ಚಟುವಟಿಕೆ ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	(ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು)

ಮುಖ್ಯೋಪಾಧ್ಯಾಯನಿ/ಮುಖ್ಯೋಪಾಧ್ಯಾಯರ ಸಹಿ   ಅಧ್ಯಾಪಕ/ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯ ಸಹಿ

ಅವಲೋಕನ ಟಿಪ್ಪಣಿ (Reflections)

ನನ್ನ ನಿಗಮನಗಳು ಮತ್ತು ಹೊಸ ಅರಿವುಗಳು (ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ)

■

■

■

■

ಮುಂದುವರಿದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು

■

■

■

■

■

ಅವಲೋಕನ ಟಿಪ್ಪಣಿ (Reflection note) ಯಾಕೆ?

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ನಡೆಸಲಾದ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಪೂರ್ತಿಯಾದ ಬಳಿಕ ಅವಲೋಕನ ಟಿಪ್ಪಣಿ ತಯಾರಿಸಬೇಕು.

- ಈ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿವಾರದ **SRG** ಸಭೆಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಬೇಕು.
- ಮುಂದಿನ ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ನೀಡಲು.
- ಒಂದು ಅವಧಿಯ **C.E.** ಕ್ರೋಡೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ.

ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಸಮೀಪನ

ಕಲಿಕೆ (Learning) ಎಂಬುದು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಮತ್ತು ನಿರಂತರವಾಗಿ ನಡೆಯುವ ಒಂದು ಮಾನಸಿಕ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ. ಕಲಿಕೆಯು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಯಾಗಬೇಕಿದ್ದಲ್ಲಿ ನೀಡುವ ಅನುಭವಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಈಡೇರಿಸುವಂಥದ್ದಾಗಿರಬೇಕು. ಮಗು ಗಳಿಸಬೇಕಾದ ಕೌಶಲ್ಯಗಳ ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಾಪಕನಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಕಲ್ಪನೆ ಉಂಟಾಗಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾಠಭಾಗದಿಂದಲೂ ಗಳಿಸಬೇಕಾದ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆ (Learning Outcomes) ಗಳನ್ನು ಮೊದಲೇ ರೂಪಿಸಬೇಕು. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಬದುಕಿನ ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಿಕೊಂಡು ಮಂಡಿಸಬೇಕು.

ಈ ಪ್ರಕಾರ ಗಳಿಸಿದ ಕೌಶಲ್ಯಗಳು, ನಿರ್ಣಯಗಳು, ಕಲಿಕೆಯ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಸಮರ್ಪಕ? ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಲು ಇನ್ನು ಯಾರೆಲ್ಲ ಉಳಿದಿದ್ದಾರೆ? ಅವರಿಗೆ ನೀಡಬೇಕಾದ ಮುಂದುವರಿದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳೇನಾಗಿರಬೇಕು? ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ನೀಡಬೇಕು? ಈ ರೀತಿಯ ಅಧ್ಯಾಪಕನ ಯೋಚನೆಗಳು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಮಾಡಲು ಸಹಾಯವೊದಗಿಸುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಪಾಠಭಾಗದ/ಘಟಕದ ವಿನಿಮಯದ ಬಳಿಕ 'ಏನೆಲ್ಲ ಕಲಿಯಲಾಯಿತು' ಎಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು **ಕಲಿಕೆಯ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ (Assessment of Learning)** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪಾಠಭಾಗದ ಕಲಿಕೆಯ ಬಳಿಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ, ಕಲಿಕಾ ಗುಣಮಟ್ಟ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯದ ಒಂದು ಹಂತ ಮಾತ್ರ.

ಆದರೆ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಖಾತ್ರಿಪಡಿಸಲು ನಡೆಸಲಾಗುವ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯವು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಮುಖವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಕಲಿಕೆ ನಡೆಯುವ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ದಕ್ಷತೆಗಾಗಿ ಅಧ್ಯಾಪಕ ಅಥವಾ ಸಹಪಾಠಿಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆ ನಡೆಯಬಹುದು. ಕಲಿಕೆಯೊಂದಿಗಿರುವ ಈ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯವು ಮತ್ತು ಫೀಡ್‌ಬ್ಯಾಕ್ (Feed Back) ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯದ ಇನ್ನೊಂದು ಹಂತವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು **ಕಲಿಕೆಗಿರುವ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ (Assessment for Learning)** ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಗತಿಗಾಗಿ ಇದು ನಿರಂತರ ನಡೆಯಬೇಕಾದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ.

ಇದರೊಂದಿಗೆ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ಸ್ವವಿಮರ್ಶೆಗೊಳಪಡಿಸಿ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ 'ತಿದ್ದುಪಡಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ'ಯೂ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯವೆಂದು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯದ ಮೂಲಕವೂ ಕಲಿಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **'ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯವೇ ಕಲಿಕೆ' (Assessment as Learning)** ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಕಲಿಕೆಯ ದಕ್ಷತೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಲು 'ಕಲಿಕೆಗಾಗಿರುವ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ' ಮತ್ತು 'ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯವೇ ಕಲಿಕೆ' ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡಬೇಕು. ಕಲಿಕೆಯು ಫಲಪ್ರದವೂ, ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯೂ ಆಗಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವಂತಹ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಸಮೀಪನವನ್ನು ನಾವು ಸ್ವೀಕರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ರೀತಿಯ ಕಲಿಕಾ ಸಮೀಪನವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವಾಗ ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಸಮೀಪನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗೆ ಒತ್ತು ನೀಡುವ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಸಮೀಪನ (Outcome focussed assessment approach) ವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು ಮುಖ್ಯವಾಗಿರುವ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ 'ಸಕ್ರಿಯ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆ' ಯನ್ನು ಖಾತ್ರಿಪಡಿಸಬೇಕು. ವಿಮರ್ಶಾತ್ಮಕ ಆಲೋಚನೆ, ವೈಚಾರಿಕ

ಚಿಂತನೆ, ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರತಿಫಲನ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕವಾದ ಜ್ಞಾನ ಇವೆಲ್ಲ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳ ಮುಖ್ಯವಾಗಿರುವ ಕಲಿಕೆಯ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.

ನಿರಂತರ ಮತ್ತು ಸಮಗ್ರವಾದ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ (CCE)

ನಿರಂತರ ಮತ್ತು ಸಮಗ್ರವಾದ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ರೀತಿಯನ್ನು ಶಾಲಾಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಕಲಿಯುವಿಕೆಯು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ನಿರಂತರವಾಗಿ ನಡೆಯುವ ಒಂದು ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಗಳಿಸಿದ್ದಾನೆಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ನಿರಂತರ ನಡೆಯುತ್ತಿರಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ, ಸಾಮಾಜಿಕ, ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಸರ್ವತೋಮುಖ ಪ್ರಗತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಸಮಗ್ರತೆ ಮತ್ತು ಮುಂದುವರಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಈಈಊ ಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರಮುಖ ವಲಯಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ಗ್ರೇಡಿಂಗ್ ರೀತಿ

ನಿರಂತರವೂ ಸಮಗ್ರವೂ ಆದ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯವನ್ನು ಗ್ರೇಡಿಂಗ್ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಪ್ರೈಮರಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಗ್ರೇಡಿಂಗ್‌ಗಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಐದು ಪೋಯಿಂಟ್ ಗ್ರೇಡಿಂಗ್ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಐದು ಪೋಯಿಂಟ್ ಗ್ರೇಡಿಂಗ್‌ನಲ್ಲಿ ಗ್ರೇಡ್ ಪೋಯಿಂಟ್ ಮತ್ತು ಶೇಕಡಾ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಗ್ರೇಡ್ ಪೋಯಿಂಟ್ ಶೇಕಡಾ	ಗ್ರೇಡ್
90-100	A+
80-89	A
70-79	B+
60-69	B
50-59	C+
40-49	C
30-39	D+
20-29	D
20 ರ ಕೆಳಗೆ	E

ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ನಿರಂತರವೂ ಸಮಗ್ರವೂ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

CCE ವಲಯಗಳು

1. ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಲಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ.
2. ಸಾಮಾಜಿಕ, ಭಾವನಾತ್ಮಕ ವಲಯದ ಪ್ರಗತಿ ಇವುಗಳನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ತಿಳಿಯೋಣ.

ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಲಯದ ವಿಕಾಸಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ

ಮಗು ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವ ಎಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಲಯದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಭಾಷಾಕಲಿಕೆ, ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳು (ಮೂಲವಿಜ್ಞಾನ, ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ, ಸಮಾಜ ವಿಜ್ಞಾನ), ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆ, ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ ಕಲಿಕೆ ಹಾಗೂ ಆರೋಗ್ಯ ಕ್ರಿಡಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಮುಂತಾದ ಎಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಈ ವಲಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅದು ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಯೋಗ್ಯವೆಂದು ನೋಡಿಕೊಂಡು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ನಡೆಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

1. ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ (C.E.)
2. ಅವಧಿ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ (T.E.)

ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ (C.E.)

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಭಾಷಾ ವಿಷಯಗಳ ಕಲಿಕೆ ಅನೇಕ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಆಶಯಗಳು, ಸತ್ಯಾಂಶಗಳು, ವಿವಿಧ ವಿಜ್ಞಾನ ವಲಯಗಳು, ಸೃಜನಶೀಲ ರಚನೆಗಳು ಎಂಬೀ ವಿಷಯಗಳನ್ನೊಳ ಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನುಳಿದು ಭಾಷಾ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯ. ಕೇಳಿ, ಓದಿ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವುದು, ಮೌಖಿಕವಾಗಿ ಹೇಳುವ ಮೂಲಕ, ಬರೆಯುವ ಮೂಲಕ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು, ಸೃಜನಾತ್ಮಕ ಬರಹಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರಕಟಿಸುವುದು ಮೊದಲಾದ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಭಾಷಾಕಲಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ವೃದ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಭಾಷಾಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಕೇವಲ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿಯೋ, ಜ್ಞಾನವೊದಗಿಸುವ ವಿಷಯವನ್ನಾಗಿಯೋ ಬೇರ್ಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

1 ಮತ್ತು 2ನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಷಯಾಧಾರಿತ (Theme) ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಷೆ, ಗಣಿತ, ಪರಿಸರ ಅಧ್ಯಯನ ಎಂಬ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ತರಗತಿಗಳ ಹೂರಣ ವಲಯವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಿಷಯವನ್ನು ನಮಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವಾಚಿಕ ಮತ್ತು ಬರವಣಿಗೆಯ ಕೌಶಲಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಆಲಿಸುವಿಕೆ, ಓದುವಿಕೆ, ಲಿಪಿ ವಿನ್ಯಾಸದ ಬಗೆಗೆ ತಿಳಿಯುವುದು, ಉಚ್ಚಾರ ಶುದ್ಧಿಯೊಂದಿಗೆ ಓದುವುದು, ಸರಿಯಾದ ಬರವಣಿಗೆ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಆವಶ್ಯಕ.

ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಶಯ ರೂಪೀಕರಣದ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಮಗು ಆರ್ಜಿಸಿದ ಆಶಯಗಳು, ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿದ ಕೌಶಲಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಧದ ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

- ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ
- ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ
- ಘಟಕ ಮಟ್ಟದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕದ ಒಟ್ಟು ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ) ಇವುಗಳನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ

ಕಲಿಕೆಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವು ತುಂಬಾ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿದೆ. ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟ್ಟವನ್ನು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಿ ಅಗತ್ಯವಾದ ಬೆಂಬಲವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಗಳಿಸಿದ ಆಶಯ ಮತ್ತು ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳು, ಗಳಿಸಿದ ಕೌಶಲಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಬೇಕು. ಸ್ವ–ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ, ಪರಸ್ಪರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಗಳಿಗೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಘಟಕಗಳ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ ರೂಪಿಸಿ ಬಳಸಬೇಕು. ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾದ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

1. ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ (ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸನ್ನದ್ಧತೆ, ವೈಯಕ್ತಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿಭಾಯಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ, ಗುಂಪು ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆ, ಆಶಯ ವಿನಿಮಯ.)
2. ಆಶಯ ತಿಳುವಳಿಕೆ
3. ಕೌಶಲಗಳ ಸಂಪಾದನೆ
4. ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ/ಮಂಡನೆ
5. ದಾಖಲಿಸುವುದು/ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವುದು

ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸೂಚಕಗಳ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಮಾಡಿ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಪುಟದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು. ಮಗುವಿನ ನೋಟ್‌ಬುಕ್ಕನ್ನು ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದ ಸಾಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಅವಧಿಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಇವುಗಳನ್ನು ಗ್ರೇಡಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು.

1 ರಿಂದ ತೊಡಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

1. ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್‌ನ ವಿವರಗಳು

ಕಲಿಕೆಯ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಸುಸೂತ್ರವಾಗಿ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೂ, ಶಾಸ್ತ್ರೀಯವಾದ ನಿರಂತರ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ಮಾಡುವುದಕ್ಕೂ ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್‌ನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

- ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
- ಆಶಯಗಳು/ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳು
- ಕೌಶಲಗಳು
- ಮೌಲ್ಯಗಳು/ಮನೋಭಾವಗಳು
- ಕಲಿಕೋಪಕರಣಗಳು
- ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು
- ಸಮಯ

- ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಒಳಗೊಂಡ ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಪುಟ, ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿದ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯದ ಪುಟ.
- ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯದ ಪುಟದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಅವಲೋಕನ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಮ್ಯಾನುವೆಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಯೋಜನೆ, ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ ಸಂದರ್ಭಗಳು, ತಂತ್ರಗಳು, ಉಪಕರಣಗಳಿರಬೇಕು.

2. ವಿಷಯಾಧಾರಿತ ನೋಟ್‌ಬುಕ್ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿವರಗಳು

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕವು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಲಯದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿವ ಪ್ರಧಾನ ದಾಖಲೆಯಾಗಿದೆ. ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗನುಸರಿಸಿ ವಿವಿಧ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತೀಕರಿಸಲು ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕವು ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸೃಜನಶೀಲತೆ, ಚಿಂತನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಭಾಷಾ ನೈಪುಣ್ಯ ಮೊದಲಾದವುಗಳು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲಿಸುತ್ತವೆ. ಪಾಠ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಬಳಸುವ ವಿವಿಧ ತಂತ್ರಗಳು, ಅವುಗಳ ಪೂರ್ತೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ನಡೆಸುವ ಸಿದ್ಧತೆಗಳು, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆ ಮೊದಲಾದ ಎಲ್ಲಾ ಮಾಹಿತಿಗಳು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ರೂಪುಗೊಂಡ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿವರಗಳನ್ನು ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯೇ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು.

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮಯದೊಳಗೆ ಸಾಧನೆಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಿ ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಗತಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು, ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ನೀಡಬೇಕು. ಘಟಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಗಳಿಸಿಕೊಂಡಿರುವನೋ? ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ದಾಖಲೆಯಾಗಿ ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕಗಳು ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕು.

ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕವು ಆಶಯಸ್ಪಷ್ಟತೆಯಿಂದ ಕೂಡಿರುವುದು, ಆಶಯ ಮತ್ತು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಉಲ್ಲೇಖಗಳಿರುವುದು, ತನ್ನ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಫಲಿಸುವಂತಹದು ಆಗಿರಬೇಕು. ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಿರಬೇಕು. ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಸಮಗ್ರತೆ ಮತ್ತು ಮುಂದುವರಿಕೆಯಿರಬೇಕು.

ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ

ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವಾಗ ಸಿಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಬೇಕು. ಕಲಿಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಮಗುವಿಗೂ ಹೆತ್ತವರಿಗೂ ಫೀಡ್‌ಬ್ಯಾಕ್ ನೀಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ತ್ವರಿತಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋದಲ್ಲಿ,

- ನೋಟ್‌ಬುಕ್
- ಇತರ ರಚನೆಗಳು (ವೈಯಕ್ತಿಕ ರಚನೆ, ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಿದ ರಚನೆ)
- ಇತರ ಕಲಿಕಾ ಸಾಕ್ಷ್ಯಗಳು (ಚಿತ್ರಗಳು, ಸಂಗ್ರಹಗಳು, ಕಲಿಕೋಪಕರಣಗಳು)
- ಸೃಜನಶೀಲ ರಚನೆಗಳು
- ವರ್ಕ್‌ಶೀಟ್‌ಗಳು

ಈ ಮೊದಲಾದುವು ಸೇರಿಕೊಂಡಿವೆ.

ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಕ್ಕೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾದ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

- ಆಶಯ ಸ್ಪಷ್ಟತೆ
- ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳನ್ನು ತನ್ನದಾಗಿಸಿರುವುದು
- ಯೋಗ್ಯವಾದ ಸಂರಚನೆ
- ಪೂರ್ಣತೆ
- ನೈಜತೆ

ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಘಟಕ ಮಟ್ಟದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ

ಒಂದು ಘಟಕದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳಿಗಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧದೊಂದಿಗೆ ವಿನ್ಯಾಸಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಇದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಗ್ರ ಸ್ವರೂಪವಿದೆ. ಒಂದು ಘಟಕವನ್ನು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಸಮಗ್ರತಾ ಪ್ರಜ್ಞೆ (ಎಲ್ಲಾ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ) ಯನ್ನು ಬೆಲೆಗಟ್ಟುವುದಾಗಿದೆ. ವಾಚಿಕದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ, ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ, ಓಪನ್ ಬುಕ್ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ, ಪ್ರಶ್ನೆ ತಯಾರಿ ಮತ್ತು ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಹೊಸ ರಚನೆಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮೊದಲಾದುವುಗಳನ್ನು ಘಟಕ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಕ್ಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಘಟಕದ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಮಗು ಯಾವ ಹಂತದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆಂದು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಕವಾದ ರೇಟಿಂಗ್ ಸ್ಕೇಲ್, ಚೆಕ್‌ಲಿಸ್ಟ್ ಮೊದಲಾದುವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಘಟಕ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವು ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ನಡೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಘಟಕ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದ ಸೂಚಕಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಿ, ಗ್ರೇಡಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ, ಅವಧಿಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಗದಿತ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘಟಕಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವಿರುವುದರಿಂದ ಘಟಕ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅವಧಿಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ಬಳಸಿದ ಮಾಪನದ ಸ್ವಭಾವಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ತಯಾರಿಸಬೇಕು. ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆ, ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ ಕಲಿಕೆ, ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಎಂಬ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ, ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ, ಘಟಕ ಮಟ್ಟ – ಎಂಬ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ ಗ್ರೇಡ್ ನೀಡಬೇಕು.

CE ಗ್ರೇಡ್ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಷಯದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ, ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ, ಘಟಕ ಮಟ್ಟದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಗ್ರೇಡನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಅವುಗಳನ್ನು A, B, C, D, E ಗ್ರೇಡ್‌ಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 5, 4, 3, 2, 1 ಎಂಬ ಹಾಗೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ಒಟ್ಟು ಗ್ರೇಡ್ ಪಾಯಿಂಟ್‌ಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ CE ಗ್ರೇಡನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\text{CE ಗ್ರೇಡ್} = \frac{\text{ಒಟ್ಟು ಲಭಿಸಿದ ಗ್ರೇಡ್ ಪಾಯಿಂಟ್}}{\text{ಗರಿಷ್ಠ ಗ್ರೇಡ್ ಪಾಯಿಂಟ್}} \times 100$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಮಗುವಿಗೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ, ಪೋರ್ಟ್‌ಫೋಲಿಯೋ ಮತ್ತು ಘಟಕ

ಮಟ್ಟದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಇವುಗಳ ಗ್ರೇಡ್ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, B ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಎಂದರೆ ಒಟ್ಟು ಲಭಿಸಿದ ಗ್ರೇಡ್ ಪಾಯಿಂಟ್ $5 + 4 + 4 = 13$ ಆಗಿದೆ. ಗರಿಷ್ಠ ಸಿಗಬಹುದಾದ ಗ್ರೇಡ್ ಪಾಯಿಂಟ್ 15.

ಗ್ರೇಡ್ ಪಾಯಿಂಟ್ (ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ $\frac{13}{15} x \ 100 = 86.67$)

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಕನ್ನಡದ CE ಗ್ರೇಡ್ A ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ CE ಗ್ರೇಡನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅವಧಿ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ (TE)

9, 10 ಶಾಲಾ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಭಾಷಾ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಅವಧಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ಘಟಕಗಳ ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು. ಭಾಷೆಯ ವ್ಯವಹಾರ ರೂಪಗಳು, ಭಾಷಾ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳು, ಭಾಷಾ ಕೌಶಲ್ಯಗಳು ಎಂಬ ವಲಯಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ಅವಧಿ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕು. ಒಳಹೂರಣ ವಲಯಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೌಶಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಒತ್ತು ನೀಡಿರುವ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಮಾದರಿಗಳು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು. ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಘಟಕಗಳ ಒಳ ಹೂರಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಅವಧಿ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ನಡೆಸಬೇಕು. ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳಿಗೆ ಒತ್ತು ಕೊಡುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕ/ಆಶಯ ವಲಯಗಳಿಗೂ ವಿವಿಧ ಹಂತದ ಮಾನಸಿಕ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೂ (ಜ್ಞಾನ ಕರಗತ ಮಾಡುವುದು/ತಿಳುವಳಿಕೆಯ ಸಾಧನೆ, ಆಶಯಗಳು/ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳು ಇವುಗಳ ಪ್ರಯೋಗ, ನಿಗಮನ ರೂಪಿಸುವುದು, ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ, ಸೃಜನಾತ್ಮಕ ಮಾನಸಿಕ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು) ಸರಿಯಾದ ವೆಯ್ಟೇಜ್ (Weightage) ನೀಡಿ ನೀಲಿನಕಾಶೆ ತಯಾರಿಸಿ, ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆಯೆಂದು ಖಾತ್ರಿಪಡಿಸಿ, ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆ ತಯಾರಿಸಬೇಕು. ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕು.

ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆ, ವೃತ್ತಿ ಪರಿಚಯ ಕಲಿಕೆ, ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಎಂಬೀ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಟರ್ಮಿನಲ್ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶನ ಮಾಲ್ಯಮಾಪನ (Performance Assessment) ವಾಗಿ ನಡೆಸಬೇಕು.

ಅದಕ್ಕಿರುವ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಆಯಾ ವಿಷಯಗಳ ಕೈಪಿಡಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಕಲೆಯ ಕಲಿಕೆ, ವೃತ್ತಿಪರಿಚಯ ಕಲಿಕೆ, ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕ್ರೀಡಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗ್ರೇಡ್ ನೀಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಭಾವನಾತ್ಮಕ ವಲಯದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ

ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಲಯದಂತೆಯೇ ಸಾಮಾಜಿಕ, ಭಾವನಾತ್ಮಕ ವಲಯಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವು ಪ್ರಧಾನವಾದುದು. Learning to know, Learning to do, Learning together, Learning to be ಎಂಬ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಸಾಮಾಜಿಕ, ಭಾವನಾತ್ಮಕ ವಲಯಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಬೇಕು.

1. ವಿಚಾರ ವಿನಿಮಯ ಕೌಶಲ (Communication Skills)
2. ಅಂತರ್‌ವ್ಯಕ್ತಿ ನೈಪುಣ್ಯ (Inter Personal Skills)

3. ಸಹಭಾವ (Empathy)
4. ಭಾವನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ (Coping with Emotions)
5. ಮಾನಸಿಕ ಒತ್ತಡದೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ (Copying with stress)
6. ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹಾರ ಕೌಶಲ (Problem solving skills)
7. ತೀರ್ಮಾನ ಕೈಗೊಳ್ಳುವುದು (Decision making)
8. ವಿಮರ್ಶಾತ್ಮಕ ಚಿಂತನೆ (Critical thinking)
9. ಸೃಜನಶೀಲ ಚಿಂತನ ಕೌಶಲ (Creative thinking skills)
10. ಸ್ವ ನಿರ್ವಹಣೆ (Self management)

ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಲಯದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರೇ ಇವುಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಆಯಾ ವಿಷಯಗಳ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದ ಭಾಗವಾಗಿ, ಈ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಕೌಶಲದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಬೇಕು.

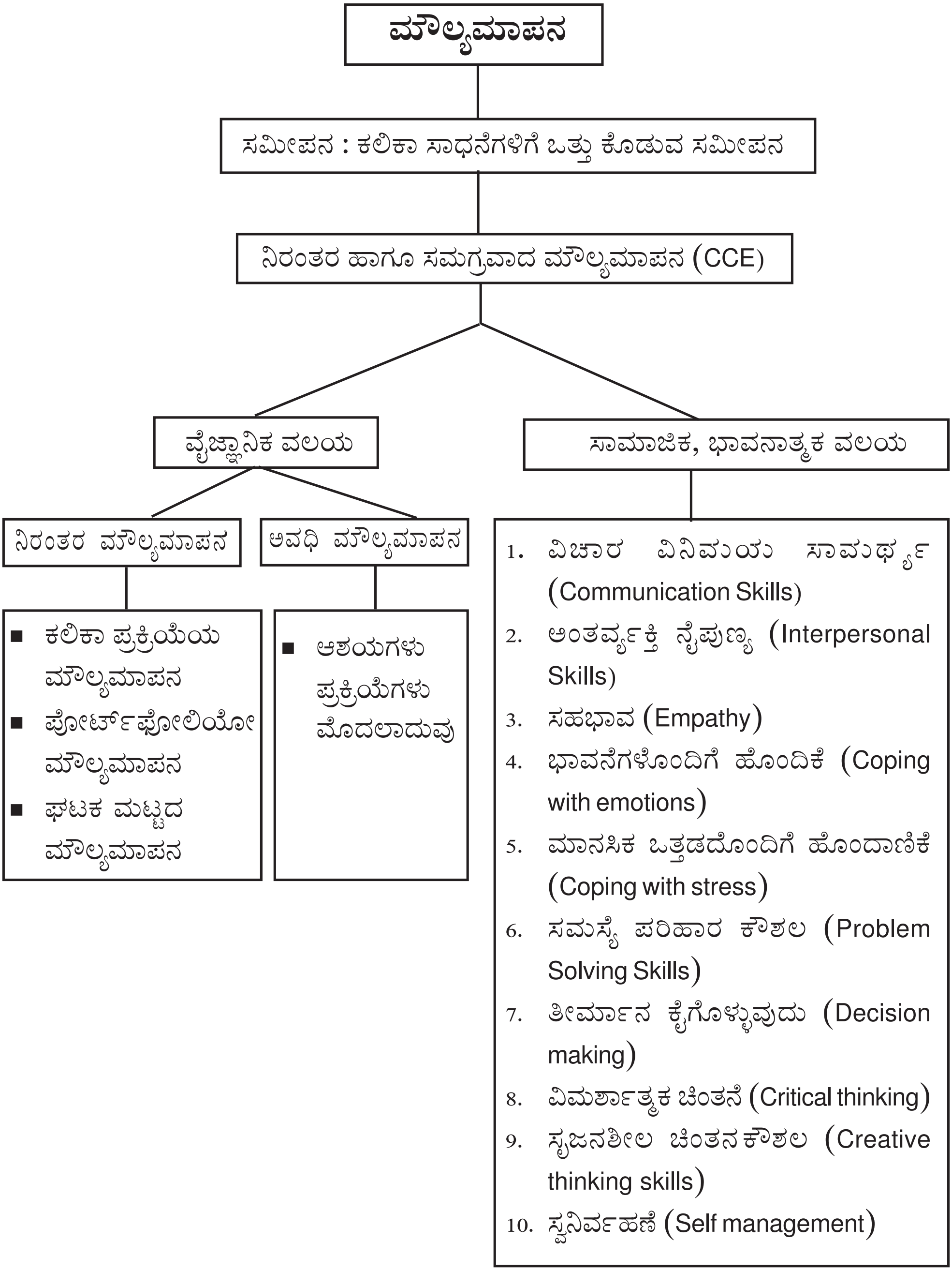
ಸಾಮಾಜಿಕ – ಭಾವನಾತ್ಮಕ ವಲಯದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಧನಾತ್ಮಕವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಧನಾತ್ಮಕವಾದ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಬೇಕು.

ಈ ಸಂಬಂಧವಾದ ದಾಖಲೆಗಳು ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾನುವೆಲ್‌ನಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಸಾಮಾಜಿಕ, ಭಾವನಾತ್ಮಕ ವಲಯದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ ಕ್ರೋಡೀಕರಣ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಕಾಲಂಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಗತಿಯ ದಾಖಲೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಸಂಬಂಧವಾದ ಗುಣಾತ್ಮಕವಾದ ದಾಖಲಾತಿ ಇರಬೇಕು.

ಸಾಮಾಜಿಕ – ಭಾವನಾತ್ಮಕ ಮಂಡಲಗಳ ನೈಪುಣ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದುದನ್ನು ಕಾಲಂನಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು. ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಲ್ಪಡದ ನೈಪುಣ್ಯವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮಂಡಲದಲ್ಲೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಭಾವನಾತ್ಮಕ ಮಂಡಲದಲ್ಲೂ ಮಗುವಿನ ಉತ್ತಮ ಪ್ರದರ್ಶನವನ್ನು ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯಿಸಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕು. ಉತ್ತಮ ಮನೋಭಾವ ಮೂಡಿಬರಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಕಾರ್ಯಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಂಡು ಅವನ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ಗ್ರೇಡನ್ನು ಮಾತ್ರ ದಾಖಲಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಒಂದೇ ನೋಟದಲ್ಲಿ



ಗಣಿತ ಕಲಿಕಾ ಸಮೀಪನ

ಮುನ್ನುಡಿ

ಆಶಯಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಜಗತ್ತನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಪ್ರಯತ್ನದ ಫಲವಾಗಿ ಮಾನವನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಆರಂಭಿಸಿದನು. ಕ್ರಮೇಣ ಭೌತಿಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳಾಗಿಯೂ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿಯೂ ಕಾಣಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದಾಗ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಅಮೂರ್ತರೂಪವು ಆವಿರ್ಭವಿಸಿತು. ಇದರ ಭೌತಿಕವಾದ ಕಾರ್ಯಕಾರಣ ಸಂಬಂಧವು ಆಶಯಗಳ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತಿ ಚಿಂತನೆಯಾಗಿ ಬದಗಲಾಯಿತು. ಹೀಗೆ ಉಂಟಾದ ಗಣಿತ ತತ್ವಗಳು ಹೊಸ ಪ್ರಯೋಗಗಳಾಗಿ ಭೌತಿಕ ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ ಪ್ರವೇಶಿಸಿತು. ತತ್ವಗಳೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ವಿಕಾಸವಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಹುದು. ಬಾಗದೆ ಬಳುಕದೆ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಿಂತಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಳತೆಯ ಮೂಲಕ ಇನ್ನಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟಗೊಳಿಸುವ ಶ್ರಮದ ಫಲವೇ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಮೂರು ಯೂನಿಟ್ ನೆಟ್ಟಗೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಯೂನಿಟ್ ಅಳತೆಯಾದರೆ ಭುಜಗಳ ತುದಿಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಐದು ಯೂನಿಟ್ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ ಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು ಎಂದೂ ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಭುಜದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದೆಂದೂ ಈ ಮೊದಲೇ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು ಎಂದು ಚರಿತ್ರೆಯಿಂದ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮವಾದ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನೂ ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ರೂಪಿಸಲಾಯಿತು. ಭುಜಗಳನ್ನೂ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಯುಕ್ತಿ ಚಿಂತನೆಯ ಮೂಲಕ ಈ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ತಲುಪಬಹುದೆಂದು ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್‌ನ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ವಿವರಿಸಿದ್ದನು.

ಕ್ರಿಸ್ತಶಕ ಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕಿನ ಡಯೋಪಾಂಟ್, ಯಾವ ರೀತಿಯ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ್ದರು. ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಫ್ರಾನ್ಸಿನ ಫರ್ಮಾ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರ ಹೊರತಾಗಿರುವ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅದೇ ಘಾತ ಆಗಿರಲಾರದು ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದ್ದನು. ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಭೂತ ತತ್ವಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು, ಪ್ರಪಂಚದ ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ಮೂರು ಶತಮಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಸಾಗಿತ್ತು. ಇಪ್ಪತ್ತನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ, ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ಆಂಡ್ರ್ಯೂ ವೈಲ್ಸ್ ಧೀರ್ಘ ಹಾಗೂ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ವಾದಗಳ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿದನು. ಭೌತಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಂದ ಬಹುದೂರದಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಮೂಲಕ ರೂಪುಗೊಂಡ ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯಾತತ್ವಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವು ಇಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹಣ ವಿನಿಮಯವನ್ನು ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿ ನಡೆಸಲು ಕಂಪ್ಯೂಟರಿನ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಅನೇಕ ಸಮಯಗಳಿಂದ ಜಗತ್ತಿನ ನಾನಾ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಗಣಿತ ಕಲಿಕಾ ಪರಿಷ್ಕರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವು ಪರಾಜಯ ಹೊಂದಲು ಪ್ರಧಾನ ಕಾರಣ ಗಣಿತದ ಈ ದ್ವಂದ್ವಾತ್ಮಕವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯಲ್ಲದೆ, ಭೌತಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಗೋ ಕೇವಲ ಯುಕ್ತಿ ಚಿಂತನೆಗಳಿಗೋ ನೀಡಿದ ಏಕಪಕ್ಷೀಯವಾದ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಗಣಿತ ಕಲಿಯ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ಆಸ್ವಾದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಕಾರಗೊಳಿಸಬೇಕಾದುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ – ಉದ್ದೇಶಗಳು

ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯ ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಹಲವು ತಲಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬೇಕಾಗಿದೆ.

- ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಹಣ ವಿನಿಮಯದ ರೀತಿಗಳು ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಂದ ಲಭಿಸುವುದು.
- ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಂದ, ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಂದಲೂ ಲಭಿಸಿದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಿಖರಗೊಳಿಸಲು, ಒಪ್ಪಗೊಳಿಸಲು ಗಣಿತದ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. ಇಂತಹ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಕಲಿಯಲು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲಸಕಾರ್ಯಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಗಣಿತದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

- ಕಾರ್ಯಕಾರಣ ಸಂಬಂಧಗಳ ಮೂಲಕ ವಾಸ್ತವಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಸರಿಯಾದ ನಿಗಮನಗಳಿಗೆ ತಲುಪುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಪ್ರಕಟಿಸುವುದೇ ಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದಾಗಿದೆ. ಯುಕ್ತಿಪರವಾದ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಈ ಸಂಸ್ಕಾರಗಳಿಂದ ಬೆಳೆಸಬಹುದು.
- ಭಾಷೆಗಳಿಗೆ ಆಶಯ ವಿನಿಯಮದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ವ್ಯವಹಾರಗಳಿಂದಾಚೆಗೆ ಸೃಜನಾತ್ಮಕವಾದ ಒಂದು ಭಾವವಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಗಣಿತಕ್ಕೂ ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕತೆಗಿಂತ ಆಚೆಗೆ ಒಂದು ಸೌಂದರ್ಯಾತ್ಮಕವಾದ ವೇದಿಕೆಯಿದೆ. ಈ ವೇದಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾದ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಅಮೂರ್ತ ರೂಪಗಳ ಆಸ್ವಾದನೆಯನ್ನೂ ಆವಿಷ್ಕಾರಗಳನ್ನೂ ವಿಕಸಿತಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಪಕ ಪಠ್ಯದೊಳಗೆ...

ಮೂರನೇ ತರಗತಿಯಿಂದ ಆರನೇ ತರಗತಿಯವರೆಗೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಮಂಡಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಯೋಜಿಸುವ ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಇದರೊಂದಿಗೆ ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ವೈವಿಧ್ಯಗಳ ಮೂಲಕ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಗಣಿತದ ಕುರಿತಾಗಿರುವ ಕುತೂಹಲವನ್ನು ಕೆರಳಿಸಲು ಶ್ರಮಿಸಬೇಕು.

ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವ ಅಳತೆಗಳ ಹಾಗೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಿಯಾ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗಿತ್ತು.

ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಗಳ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಆಕೃತಿಗಳ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸವಿಶೇಷತೆಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ನಿಗಮನಗಳಾಗಿ ರೂಪಿಸಲಾಗಿತ್ತು.

ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್‌ನ ಮೊದಲ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಆರಂಭಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸರಳವಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯ ಮೂಲಕ, ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಮಂಡಿಸಿ ಇದರಿಂದ ಸಿಗುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಕಲಿಯಲಾಗುವುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಬೀಜಗಣಿತ, ಜ್ಯಾಮಿತ, ಆಕೃತಿಗಳು, ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್ ಎಂಬೀ ವಿಷಯಗಳ ಮುಂದುವರಿದ ಕಲಿಕೆಯು ಹೈಸ್ಕೂಲ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳನ್ನೂ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಿರುವ ಕೆಲವು ಸೌಕರ್ಯಗಳಿಗಾಗಿ, ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಏಕಕವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬೇಕೆಂದೂ ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದೆವು.

ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವುಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯು ಹೈಸ್ಕೂಲ್‌ಗಳಲ್ಲಿ

ಮುಂದುವರಿಯುವುದು. ಇದಲ್ಲದೆ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಹಾಗೂ ಇತರ ಬಹುಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಕುರಿತು ಇನ್ನಷ್ಟು ಆಳವಾಗಿ ಹೈಸ್ಕೂಲ್ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಲಾಗುವುದು. ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಕೆಲವು ಹೊಸ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೆ, ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಂದ ಹೊಸ ರಚನೆಯೆಡೆಗೆಸಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ದೃಶ್ಯಾನುಭವ ಹಾಗೂ ಚಲನಾತ್ಮಕತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾ ಎಂಬ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್‌ನ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಂಡಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು, ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಸರಿಸುಮಾರು ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಮನದಟ್ಟುಮಾಡಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ಮಧ್ಯಮಾ, ಮಧ್ಯಮ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಗಣಿತಶಾಖೆಯ ಮುಂದುವರಿದ ಅಗತ್ಯತೆಗಾಗಿ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಕೆಲವು ಸರಳವಾದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಭೌತಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಕ್ರಮೇಣ ಯುಕ್ತಿಪರವಾಗಿ ಆಶಯಗಳ ವಿಕಾಸಹೊಂದುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಷಯಗಳು ತಮ್ಮೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ಹಾಗೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತರಗತಿಯ ವಿಷಯಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಇವುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಗಣಿತದ ಆಶಯಗಳು ಇತರ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನೂ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಿನಿಮಯ ರೀತಿ

ಯಾವುದೇ ವಿಷಯದ ಮೂಲಭೂತ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ವಿಶದೀಕರಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಅವುಗಳ ಕುರಿತು ಹೆಚ್ಚು ಚಿಂತಿಸಲು, ಹೊಸ ನಿಗಮನಗಳಿಗೆ ತಲುಪಲು ಮತ್ತು ಅವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಠವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಆಶಯಗಳ ಮಂಡನೆಯು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾದ ಪ್ರಸಂಗದಂತಾಗದೆ, ಮಕ್ಕಳೊಡಗಿರುವ ಸಂವಾದಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಬೇಕು.

ಮೊದಲು ಕಲಿತ ಆಶಯಗಳ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಹೊಸ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಕುರಿತಾದ ನಿಖರವಾದ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಯೂ ಬೇಕಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಚರ್ಚಿಸಲೂ ಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲಾ ತರಗತಿಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಾಪಕನಿಗೆ ತಿಳುವಳಿಕೆಯಿರಬೇಕು. ಜ್ಞಾನ ಗಳಿಸುವ ಸ್ಪೈರಲ್ (Spiral) ಸ್ವಭಾವದ ಕುರಿತಾದ ಸರಿಯಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯುಂಟಾಗಬೇಕು.

ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕುತೂಹಲವುಂಟಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಬೇಕು. ಇದು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತಿಳಿಯಲಿರುವ ಪರಿಶ್ರಮವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಬೇಕು. ಅದು ಆಶಯಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳಿಗೂ ಕಾರ್ಯಕಾರಣ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಮತ್ತು ಹೊಸ ನಿಗಮನದೆಡೆಗೆ ಮುನ್ನಡೆಸುವುದು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

ಚಿಂತನೆಮಾಡಲೂ, ಆಶಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಕ್ಕಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಪ್ರೇರೇಪಿಸಬೇಕು. ಅವರ ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಿರುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನೂ, ಸರಿಯಾದ ಆಶಯಗಳಿಗೆ ಅಂಗೀಕಾರವನ್ನೂ ನೀಡಬೇಕು.

ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕಲಿಸುವುದರ ಬದಲು, ಕಲಿಯಲಿರುವ ಅಭಿರುಚಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳ ಓದುವಿಕೆಯು ಇದಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಕಾರಿಯಾಗುವುದು. ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟಾಗುವ ಸರಳವಾದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ಓದಲು ಮತ್ತು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಲು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು.

ಅರ್ಥೈಸಲಾಗುವ ಕ್ರಿಯಾ ರೀತಿಗಳ ಮತ್ತು ಸೂಚ್ಯವಾಕ್ಯಗಳ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ತರಬೇತಿಯಾಗಿ ಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನವು ಸೀಮಿತವಾಗಬಾರದು. ಗಣಿತ ಅಧ್ಯಯನ ಉದ್ದೇಶವು ಕೃತಕವಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಕೆಲವು ಗಣಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಸುಲಭದಾರಿಯನ್ನು ಬಾಯಿಪಾಠಮಾಡುವುದಲ್ಲ, ಬದಲಾಗಿ ಯುಕ್ತಿಯುಕ್ತವಾಗಿ ಕಾರ್ಯಕಾರಣ ಸಂಬಂಧದಿಂದೊಡಗೂಡಿ ಚಿಂತಿಸಲು ಮತ್ತು ವ್ಯವಹರಿಸಲಿರುವ ಸ್ವಭಾವ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತದ ಬೋಧನೆಯು ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿರಬೇಕು.

ಸ್ಕೀಂ ಓಫ್ ವರ್ಕ್

ತಿಂಗಳು	ಯೂನಿಟ್ ಸಂಖ್ಯೆ	ಯೂನಿಟ್‌ನ ಹೆಸರು	ಪಿರಿಯೆಡ್
ಜೂನ್	1	ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು	20
ಜೂನ್ ಜುಲಾಯಿ	2	ವೃತ್ತಗಳು	18
ಜುಲಾಯಿ	3	ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಗಣಿತ	7
ಅಗೋಸ್ತು	4	ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು	12
ಸಪ್ಟಂಬರ್	5	ತ್ರಿಕೋನ ಸಮಿತಿ	17
ಅಕ್ಟೋಬರ್	6	ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	12
ಅಕ್ಟೋಬರ್ ನವೆಂಬರ್	7	ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು	20
ನವೆಂಬರ್, ಡಿಸೆಂಬರ್	8	ಘನಾಕೃತಿಗಳು	13
ಜನವರಿ	9	ಜ್ಯಾಮಿತೀಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ	12
ಜನವರಿ	10	ಬಹುಪದಗಳು	8
ಫೆಬ್ರವರಿ	11	ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್	7
			146

ಟೀಚಿಂಗ್ ಮಾನ್ವಲ್

ತರಗತಿ : **10**

ವಿಷಯ : **ಗಣಿತ**

ಯೂನಿಟ್ : **2 – ವೃತ್ತಗಳು**

ದಿನಾಂಕ : **11.07.2016 ರಿಂದ 13.09.2016 ವರೆಗೆ**

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು

- ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.
- ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವಾಗಿಸಲೂ, ಚೌಕವನ್ನಾಗಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

ಆಶಯಗಳು/ತಿಳುವಳಿಕೆಗಳು

- P ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು AB, CD ಎಂಬಿವುಗಳು P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಾದರೆ,

  $PA \times PB = PC \times PD$ ಆಗಿರುವುದು.
- AB ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವಾಗಿದ್ದು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾ CD, AB ಯು P ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಆಗ, $PA \times PB = PC^2$ ಆಗಿರುವುದು.
- ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.

ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳು/ಮನೋಭಾವಗಳು/ಮೌಲ್ಯಗಳು

- ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವರು.
- ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲಿರುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವರು.
- ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗದೆ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಇತರ ಆಕೃತಿಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚಿಂತಿಸುವರು.

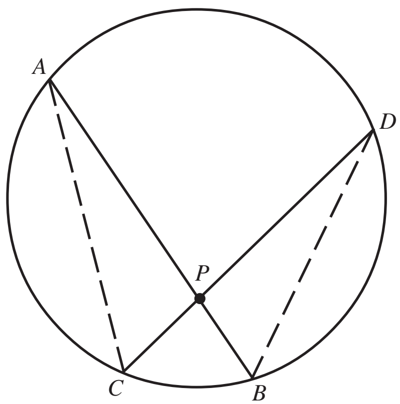
ಸಾಮಗ್ರಿಗಳು

- ವರ್ಕ್‌ಶೀಟ್‌ಗಳು
- ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ
- ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕ
- ವಿವಿಧ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕಾರ್ಡುಶೀಟುಗಳು

ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ

ಚಟುವಟಿಕೆ – 1

1. ಅಧ್ಯಾಪಿಕೆಯು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಂಪುಗಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಶೀಟುಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಲು ನಿರ್ದೇಶಿಸುವರು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB, CD ಎಂಬಿ ಜ್ಯಾಗಳು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವವು. AC, BD ಗಳನ್ನೆಳೆದು ΔAPC, ΔBPD ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವರು.



- ΔAPC ಯ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ΔBPD ಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

  $\angle APC$ = ...

  $\angle PAC$ = ...

  $\angle PCA$ = ...

- ΔAPC ಮತ್ತು ΔBPD ಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಭುಜಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯೇನು?

- $\dfrac{PA}{\square} = \dfrac{PC}{\square}$

  $PA \times \square = PC \times \square$

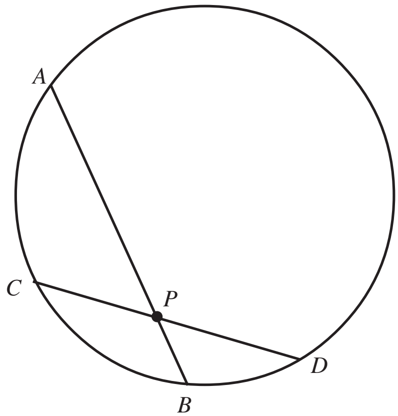
  $PA \times PB = \square \times \square$

ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ

- 17.5 ಸೆ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB = 14 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾ AB ಇದೆ. $PB = 2$ ಸೆ.ಮೀ. ಆಗುವಂತೆ AB ಯಲ್ಲಿ P ಎಂಬ ಬಿಂದು ಇರುವುದಾದರೆ
- $PC = 3$ ಸೆ.ಮೀ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾ CD ಇದ್ದರೆ, CD ಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?
- P ಮೂಲಕ 10 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾ EF ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. PE, PF ಎಷ್ಟು?
- $PG = 1$ ಸೆ.ಮೀ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾ GH ಈ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ

- ಚಿತ್ರದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿರಿ.

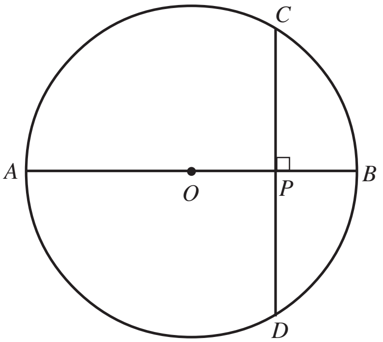


PA	*PB*	*PC*	*PD*	*AB*	*CD*
6 ಸೆ.ಮೀ.		3 ಸೆ.ಮೀ.		10 ಸೆ.ಮೀ.	
	5 ಸೆ.ಮೀ.		10 ಸೆ.ಮೀ.		13 ಸೆ.ಮೀ.
9 ಸೆ.ಮೀ.			12 ಸೆ.ಮೀ.	13 ಸೆ.ಮೀ.	
	5 ಸೆ.ಮೀ.			13 ಸೆ.ಮೀ.	14 ಸೆ.ಮೀ.
		4 ಸೆ.ಮೀ.		19 ಸೆ.ಮೀ.	16 ಸೆ.ಮೀ.

ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ

ಚಟುವಟಿಕೆ – 2

- ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ *AB* ವ್ಯಾಸವೂ *AB* ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ *CD* ಯನ್ನೆಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



- *AB* ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾವು *CD* ಆದುದರಿಂದ

  $PA \times PB = \square \times \square$

- *OB* ಎಂಬ ತ್ರಿಜ್ಯವು *CD* ಎಂಬ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾದುದರಿಂದ

  $PC = \square$

- $PA \times PB = \square^2$

- $AB = 15$ ಸೆ.ಮೀ., $PB = 3$ ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $PC = \square$

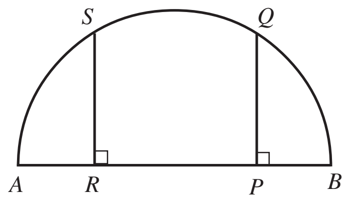
- $PC = 8$ ಸೆ.ಮೀ., $PB = 4$ ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $AB = \square$

- $OA = 13$ ಸೆ.ಮೀ., $PC = 12$ ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $OP = \square$

- *PA* ಉದ್ದವೂ *PB* ಅಗಲವೂ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\square \times \square$

- ಈ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜ = $\square$

- *AB* ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ *AB* ಎಂಬಿವುಗಳು *PQ* ಮತ್ತು *RS* ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು. $PB = AR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

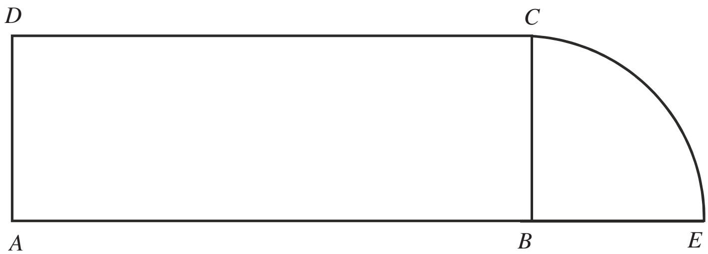


ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ

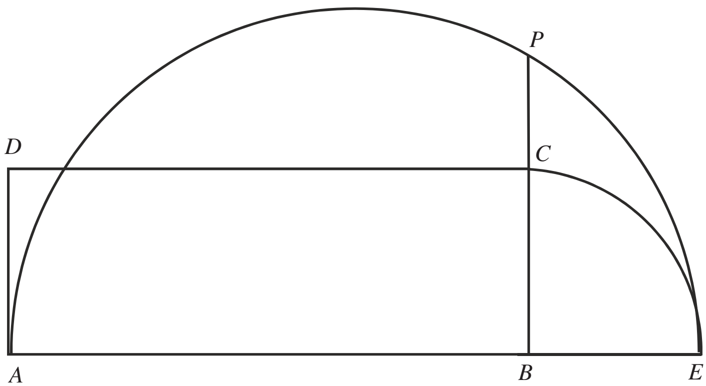
ಚಟುವಟಿಕೆ – 3

- 

  ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು?



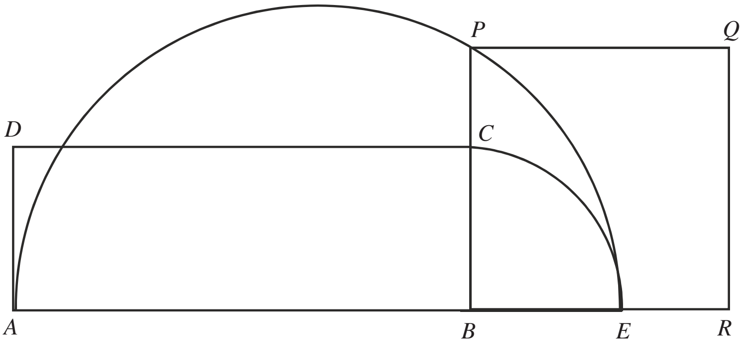
$BC = BE$



$BA \times BE = BP^2$

- ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.
- ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಣಯ



$$BA \times BE = BA \times BC = BP^2$$

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

- 2 ಸೆ.ಮೀ. ಅಗಲ, 8 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಆಯತದಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

1 ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಮುನ್ನುಡಿ

ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ಹಲವು ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಮಗಳು ಸಾಗಿ ಬರುವುದು. ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಣಿಸಿಕೊಂಡಲ್ಲವೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಕಲಿಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದು. ಒಂದು ಎಡೆ ಬಿಟ್ಟು ಎಣಿಸುವಾಗ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಾಗೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮಗಳು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗುವುವು. ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದಾಗ ಒಂದು, ಹತ್ತು, ನೂರು ಎಂಬೀ ಕ್ರಮಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಯಿತು. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಹಲವು ರೂಪಗಳನ್ನು ತಿಳಿದಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಮದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಲಾಯಿತು. ಚೌಕದ ಕರ್ಣವನ್ನು ಭುಜದ ಆಧಾರದಲ್ಲೂ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ಆಧಾರದಲ್ಲೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿದಾಗ ಅಂತಹ ಉದ್ದಗಳಿಗೆ ನಿಕಟವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಕ್ರಮದ ಕುರಿತಾದ ಚಿಂತನೆಗಳು ಆರಂಭವಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅದಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮಿತಿ (Limit) ಎಂಬ ಆಶಯವು ಇಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಗುವುದು. ಉನ್ನತ ಗಣಿತದ ಗಣಿತ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ (Mathematical analysis) ಎಂಬ ಶಾಖೆಯ ಮೂಲ ಕಲಿಕೆಯು ಇದಾಗಿದೆ.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯ	• ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಂದುಂಟಾಗುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಬದಲಾದಂತೆ ಚೌಕಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗ, ಬೀಳುವ ದೂರ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಈ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲಾದ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳು ರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವರು. • ರೂಪೀಕರಿಸಿದ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಂದು ಪದ ಮತ್ತು ಅದರ ಪದಸ್ಥಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಉಳಿದ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು.	• ಶ್ರೇಣಿಗಳ ನಿಯಮವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ ಬರೆಯುವರು. • ವಿವಿಧ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವರು. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಪದಗಳನ್ನು ಪದಸ್ಥಾನಗಳು ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ರೂಪಿಸುವರು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ • ಒಂದರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಅದರ ಕೊನೆಯ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ನಂತರದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು.	• ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅವುಗಳ ಪದಸ್ಥಾನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನುಕ್ರಮ ಮೂರು ಪದಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದರ ಬೀಜಗಣಿತ. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜೀಯ ರೂಪವನ್ನು ತಿಳಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವರು. • ಒಂದರಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿಯೂ, ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಾಗೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವರು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ತಿಳಿಯುವರು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತ	• ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿ. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ರೂಪಿಸುವರು. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು.	

ಆಶಯದ ಬೆಳವಣಿಗೆ

ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಯೂ, ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಕುರಿತು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿಯೂ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಎಂಬುದು ಈ ಪಾಠದ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಆರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲು ಅಳತೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು, ನಂತರ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು, ನಂತರ ಇವುಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಪನವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಈ ಪಾಠವನ್ನು ಕ್ರಮೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಈ ಮೊದಲೇ ಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವ ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳ ಮೂಲಕ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ. ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದು ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳೂ ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಾಲ್ಕನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಐದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳುವುದರೊಂದಿಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಸಿಗುವುದು. ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು.

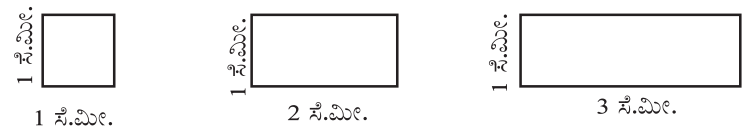
ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾ ನಮೂನೆಗಳು

ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯಾ ನಮೂನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿ ನಂತರ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಳತೆಗಳ ನಡುವೆಯೋ, ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆಯೋ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 2 ಸೆಂಟಿಮೀರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಚೌಕಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಾಠಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ, ಸುತ್ತಳತೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದ ಎಂಬೀ ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯಾ ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ಸ್ವತಃ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ ರೂಪೀಕರಿಸಲು ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಅಗಲ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಆಯತಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ



ಈ ಆಯತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನೂ ಚರ್ಚಿಸುವ,

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಒಂದು ನಿಯಮದ ಅಗತ್ಯವಿರುವುದೆಂಬ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ಈ ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ಉಂಟಾಗಬೇಕು. ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಇದಕ್ಕೆ ತಲುಪಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ ಆಯತಗಳಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಶ್ರೇಣಿಯ ಕುರಿತು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಶ್ನಿಸಬಹುದು.

- ಹತ್ತನೇ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ?
- ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 100 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತವು ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರಬಹುದೇ?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಬಹುದು.

ಇದುವರೆಗಿನ ಚರ್ಚೆಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುದೇನೆಂದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು. ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ 7, 8 ಪುಟಗಳಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೀಡುವ. ಇದರಲ್ಲಿ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ ಮುಂತಾಗಿ, ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಚಿಕ್ಕದಾಗುವ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಚೌಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ, ಸುತ್ತಳತೆ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ನಿರ್ದೇಶಿಸುವ.

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದಿರುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ ಮುಂದೆ ಬರುವುದು. ಎತ್ತರದಿಂದ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಹಾಕುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಸಂಚರಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ, ಸಂಚರಿಸುವ ವೇಗ, ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರ ಮುಂತಾದವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುತ್ತಾರೆ. ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ ಮತ್ತು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ಪಾಠಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೇಗ, ದೂರ ಇವುಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯುವುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ವತಃ ಮಾಡಬೇಕು. ಅಗತ್ಯ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.

1. ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹೆಚ್ಚಳದ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ.

- ಒಂದನೇ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು 3 ಚುಕ್ಕೆಗಳು, ಎರಡನೇಯದರಿಂದ ಮೂರನೆಯದ್ದಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು 4 ಚುಕ್ಕೆಗಳು, ...
- ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 1+2 ಚುಕ್ಕೆಗಳು, ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ 1+2+3 ಚುಕ್ಕೆಗಳು, ...

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವಾಗ, ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೆನಪಿಸಬಹುದು.

2. ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಒಳಕೋನದ ಅಳತೆ, ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

3. ಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 1 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1, 4, 7, ... ಇಲ್ಲಿ 1ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಬೇಕೆಂಬುದರ ಕುರಿತು ತಿಳುವಳಿಕೆ ಮೂಡಿಸಬೇಕು. (1ನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ 0, ಶೇಷ 1) ಇದೇ ರೀತಿ 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 2 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2, 5, 8, ...

4. 1, 6, 11, 16, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು , 5ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ 10ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಅಥವಾ 6 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಇದೇ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು, 1ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ 5ರಂತೆ ಕೂಡಿಸಿ ಬರೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

5. ಚೌಕಸ್ತಂಭಗಳ ಹಿಡಿವುಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ 7.8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಭಾರದ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಾಂದ್ರತೆ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೆನಪಿಸಬಹುದು. ಕಬ್ಬಿಣದ ಬದಲು ತಾಮ್ರದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಸ್ತಂಭಗಳಾದರೆ ಭಾರದ ಶ್ರೇಣಿಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು.

ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ

ಯಾವುದೇ ನಿಯಮವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಒಂದನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ ಎಂದು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪು ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯು ಉಂಟಾಗುವ ನಿಯಮವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಳತೆಯು 1, 2, 3, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವಾಗ ಮತ್ತೊಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಒಂದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಹೆಚ್ಚಿನ ಎಲ್ಲಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ನೋಡುವಾಗ, ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಂದನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ, ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವುದು. ಆಗ ಅಳತೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವು ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಸ್ಥಾನ ಹಾಗೂ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಸರಳವಾಗಿ ಭಾಷಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದು ಮೊದಲನೇ ಹಂತ. ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳುವುದು ಎರಡನೇ ಹಂತವಾಗಿದೆ. (ಈ ಮೊದಲಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತ ಪಾಠಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಈ ರೀತಿಯನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ) ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1, 2, 3, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳಾಗಿ ಸಿಗುವ 4, 8, 12, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಪದ ಎಂದು ಮೊದಲಿಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ನಂತರ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ $x_n = 4n$ ಎಂಬ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ರೀತಿಯ ಬದಲಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು.

ಮೊದಲಿಗೆ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಪದವನ್ನೂ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವ

ಸ್ಥಾನ	1	2	3	4	5 ...
ಪದ	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3 ...

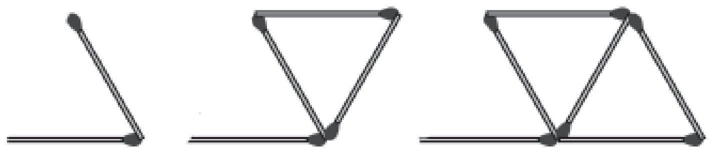
ನಂತರ ಪದಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವ.

ಸ್ಥಾನ	1	2	3	4	5 ...
ಪದ	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$2+\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ...

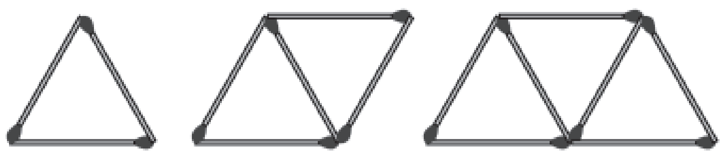
ಇದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಥಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಧ ಮಾಡಿ $\frac{1}{2}$ ಕೂಡಿಸಿರುವುದು ಪದವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಅಂದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

$$x_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

ಬೆಂಕಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿ ನೋಡಿರಿ.



ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಂಕಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯು 2, 4, 6, 8, ... ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 2n$. ಇದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರಕ್ಕೂ ಒಂದೊಂದು ಕಡ್ಡಿಯಂತೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಚಿತ್ರವಾಯಿತು.



ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 2n + 1$

ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಅವುಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಾಗಿದೆ. . Input Bar ನಲ್ಲಿ sequence ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನೂ ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ sequence [n²,n, 1, 10] ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ 1, 4, 9, ..., 100 ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 1ರಿಂದ 10ರ ವರೆಗಿರುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದು.. m ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು

integer slider ನಿರ್ಮಿಸಿ sequence [n²,n, 1, m] ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಗತ್ಯಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಬದಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

ಪಾಠಭಾಗದ ಮೂಲಕ ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವ ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಿರುವ ಕೆಲವು ನಿರ್ದೇಶನಗಳನ್ನೂ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಶ್ರೇಣಿ	ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ	ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ನಿರ್ದೇಶನ
2, 4, 6, ...	$x_n = 2n$	sequence [2n, n, 1, m]
180, 360, 540, ...	$x_n = 180n$	sequence [180n, n, 1, m]
1, 3, 5, 7, ...	$x_n = 2n - 1$	sequence [2n – 1, n, 1, m]
1, 4, 7, ...	$x_n = 3n - 2$	sequence [3n – 2, n, 1, m]
$\frac{180}{3}, \frac{360}{4}, \frac{540}{5}, \ldots$	$x_n = \frac{180n}{n+2}$	sequence $\left[\frac{180n}{n+2}, n, 1, m\right]$
1, 3, 9, 27, ...	$x_n = 3^{n-1}$	sequence [3^1(n–1),n, 1, m]
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$	$x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$	sequence [$\frac{1}{2^{\,1}}$ (n–1), n, 1, m]

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಇತರ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವೃತ್ತಗಳ ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಿರುವ ನಿರ್ದೇಶನಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. m ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು integer slider ನ್ನುಂಟುಮಾಡಿರಿ. A ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳ ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ.

Sequence [Circle [A, 2n] n, 1, m] ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶನವನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ, ತ್ರಿಜ್ಯವು 2, 4, 6, ... ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಸಿಗುವುವು.

Sequence [Circle [A, $\frac{1}{2^{n-1}}$] n, 1, m] ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ, ತ್ರಿಜ್ಯವು 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಸಿಗುವುವು.

ಪೈಥನ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಪುಟ 14ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲೂ ಸಹಕರಿಸಬೇಕು.

1) (i) 2, 4, 6, ... ಎಂಬ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪವು $x_n = 2n$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಇದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 1 ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಾಯಿತು. ಆಗ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 2n - 1$.

(ii) 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1, 4, 7, ... ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದು ಮೊದಲ ಭಾಗದ 3ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಮೊದಲು 1, 1 + 3, 1 + 6, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು ನಂತರ 1, 1 + 3, 1 + (3 × 2) ... ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 1 + 3 \times (n - 1) = 3n - 2$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. $x_n = 3n + 1$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $2n - 1$, $n = 1, 2, 3...$ ಎಂದೂ $n = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ ಎಂದೂ ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಬಹುದು. (**ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಆಕೃತಿಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

(iii) 1ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಾಗುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು, 10ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು. 10ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 10n - 9$ ಎಂದಾಗುವುದು.

iv) 1ರಲ್ಲೋ 6ರಲ್ಲೋ ಕೊನೆಯಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು 5ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೆ. ಆಗ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 5n - 4$ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ, ಶ್ರೇಣಿಯ ಹಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆದ ನಂತರ ಸ್ಥಾನವೂ ಪದವೂ ತಮ್ಮೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕು. ಈ ಸಂಬಂಧವು ತಿಳಿದ ನಂತರ ಅದನ್ನು ಹೇಳಿಕೆಯ ಮೂಲಕವೂ ನಂತರ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲೂ ಸಹಕರಿಸಬೇಕು.

2) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕ, ಸಮಪಂಚಭುಜ ... ಮೊದಲಾದ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಆಕೃತಿಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ, ಹೊರ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಂಬಿವುಗಳ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವು. 180, 360, 540, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 180n$ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸುಲಭ.

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360^o ಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವರು. ಆಗ ಶ್ರೇಣಿಯು 360, 360, 360, ... ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದರ ಯಾವುದೇ ಪದವು 360 ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 360$.
ಇನ್ನು ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಒಂದು ಒಳಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ತ್ರಿಕೋನ $= \frac{180}{3}$

ಚೌಕ $= \frac{360}{4}$

ಸಮಪಂಚಭುಜ $= \frac{540}{5}$

.... =

ಶ್ರೇಣಿಯು $\frac{180}{3}, \frac{360}{4}, \frac{540}{5}, ...$ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಅಂಶಗಳು 180, 360, 540, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $180n$ ಎಂದು ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೆ. ಛೇದಗಳು 3, 4, 5, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಛೇದದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $n+2$ ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಒಳಕೋನದ ಅಳತೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು

$$x_n = \frac{180n}{n+2}$$

ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಈ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ n ಎಂಬುದು ಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಬದಲಾಗಿ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕ, ಸಮಪಂಚಭುಜ.... ಎಂಬ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. .

3) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದಾಗ ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಮೂರು ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನಗಳುಂಟಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 1, 3, 9, 27, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $3^1, 3^2, 3^3, ...$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಮೊದಲು $x_1 = 1$, $x_n = 3^{n-1}, n > 1$ ಎಂದಾಗುವುದು. (ಸೊನ್ನೆ ಘಾತವಾಗಿರುವ ನಿರ್ವಚನವನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿದಿರುವುದಿಲ್ಲ.)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಆ ಹಂತದ ಒಂದು ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ.

ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು 1ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3, 9, 27, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{27}{64}$, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುವುದು. ಆಗ ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಿಂದಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

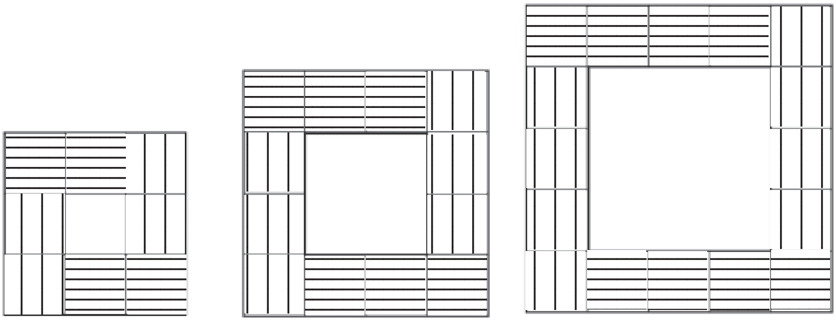
ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದೂ, ಅವುಗಳ ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದೂ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಈ ಮೊದಲು ಕಂಡ ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಕೂಡಿಸಿ ಮುಂದೆ ಹೋಗುವುದು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರಿಸುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆಯೋ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಆಗಬಹುದು ಎಂದು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸಬೇಕು. ಮುಂದುವರೆದು ಯಾವುದೇ ಪದದಿಂದ ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು. ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿರುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲಿರುವ ಸೂಕ್ತವಾದ ಒಂದು ವಿಧಾನವು ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಮೂಲಕ ಲಭಿಸುವುದು. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿವೆಯೋ ಎಂದು ಈ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಬೇಕಾದುದಾಗಿದೆ.

1) 2 ನೇ ಘಾತಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟಾಗಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿ, ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಸಮೀಪದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಯುಕ್ತಿಪೂರಕವಾಗಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಸಮೀಪದ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ ಸಾಲದು. ಬದಲಾಗಿ, ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ ಅಲ್ಲವೆಂದು ದೃಢ ಪಡಿಸಲು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಮಾನವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕು.

2) ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣಬಹುದು.



ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಿರುವಂತೆ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಡಲಾಗಿದೆ. ಅನಂತರದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಚೌಕಗಳು ಸೇರಿದ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಚಿತ್ರದಿಂದ ನಂತರದ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಹೋಗುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಣ್ಣ ಆಯತದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೊಂದು ಚೌಕವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳಿರುವುದರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ಚೌಕಗಳಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತವೆ. ಆಗ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯು 8, 12, 16, 20, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಕ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದರೆ, ಮಕ್ಕಳೇ ಇತರ ಹಲವು ರೀತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರೋ ನಾಲ್ಕೋ ಪದಗಳು ಕಲನ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ಪದದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಹೋಗುವಾಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಸಂಭವಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸುವುದಕ್ಕೂ, ಯಾವುದೇ ಪದದಿಂದ ಸಮೀಪದ ಮುಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ದೃಢ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

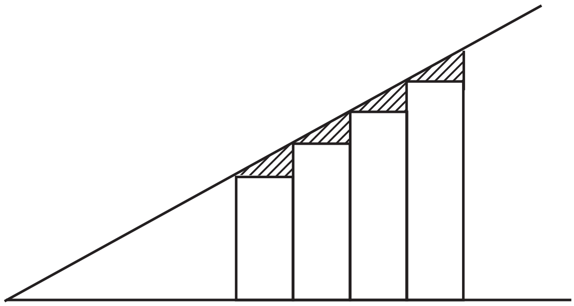
3) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಹೋಗುವಾಗ ತಲಾ ಎರಡು ಚೌಕಗಳಂತೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಜೊತೆಗೆ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕಗಳು ಒಂದೊಂದರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2,4,6,... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯೂ, ದೊಡ್ಡ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 0,1,2,3,.... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಇವೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು ಚೌಕಗಳಾಗುವುದು. ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2,5,8,... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ರಂತೆಯೂ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 1 ರಂತೆಯೂ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಎಂಬ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಹತ್ವ ನೀಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

4)



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಶೇಡ್‌ಮಾಡಿರುವ ಲಂಬಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಲಂಬ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟಗಿರುವ ಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಾಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

5) $x_n = n^3 - 6n^2 + 13n - 7$ ಲ್ಲಿ n ಆಗಿ 1, 2, 3, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ 1, 3, 5, 13, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯು ಲಭಿಸುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ $3 - 1 = 2, 5 - 3 = 2$ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದರೆ 13−5= 8 ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವುದು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಕೆಲವು ಪದಗಳ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೋಧಿಸಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂಬ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ.

ಹೀಗೆ, ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡಿ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮುಂದಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು **ನಿಗಮನಗಳ ಅಪಾಯ, ಶ್ರೇಣಿ ನಿಯಮ** ಎಂಬ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ಥಾನವೂ ಪದವೂ

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಮಂಡಿಸಿವುದರ ಮೊದಲು ಪದ ಮತ್ತು ಸ್ಥಾನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಮಾನಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಪದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು

ಸ್ಥಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ.

- ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಪದಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಇತರ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬಹುದೇ?
- ಒಂದನೇ ಹಾಗೂ ಮೂರನೇ ಪದಗಳು ತಿಳಿದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯು ಇತರ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?
- ಒಂದು ಎಡೆ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪದಗಳು ತಿಳಿದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಇತರ ಪದಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆ?
- ಒಂದನೇ ಹಾಗೂ 5 ನೇ ಪದಗಳಿಂದ ಪೂರ್ಣ ಶ್ರೇಣಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?
- ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು ತಿಳಿದರೆ ಪೂರ್ಣ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆ?

ಹೀಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಿಸಬೇಕು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸ್ಥಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

ನಿಶ್ಚಿತಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇವೆಯೋ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿದೆ. 1000 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 19,28,37,.... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತೆ, 10 ರ ಯಾವುದೇ ಘಾತವೂ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು. 10ರ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ 9ರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತ್ಯಕ್ಕೆ 1 ಕೂಡಿಸಿದುದಲ್ಲವೇ.

$$10 = 9 + 1$$

$$100 = (9 \times 11) + 1$$

$$1000 = (9 \times 111) + 1$$

ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಪದವಾದ19ನ್ನು $(9 \times 2) + 1$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ 10 ರ ಯಾವುದಾದರೂ

ಘಾತದಿಂದ 19 ಕಳೆದರೆ 9ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ,

$$10000 - 19 = ((9 \times 1111) + 1) - \left((9 \times 2) + 1\right) = 9 \times (1111 - 2) = 9 \times 1009$$

ಆಗ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ 1010ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ 10000 ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸದೆ, ಸ್ಥಾನವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಪದವ್ಯತ್ಯಾಸ ಲಭಿಸುವುದು ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ 5 ನೇ ಪದ 38 ಹಾಗೂ 9ನೇ ಪದ 66 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ $9 - 5 = 4$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ $66 - 38 = 28$ ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $28 \div 4 = 7$ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ 25 ನೇ ಪದ ಸಿಗಲು, 5 ನೇ ಪದವಾದ 38ರೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ 7ರ 20 ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು, ಅಂದರೆ $38 + (7 \times 20) = 178$ ಇದನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಐದನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು:

i) ಅತೀ ಸಣ್ಣ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ 100ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 101ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ 3, ಆಗ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 3 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಅತೀ ಸಣ್ಣ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ 101.

ii) 101 ರೊಂದಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ, 7 ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ 101, 108, 115... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 3 ಆಗಿರುವುದು.

iii) ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ 999ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 5 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $999 - 2 = 997$ ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 3, ಆಗ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 3 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ 997.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ,

7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ 3 ಶೇಷ ಬರುವ ಎಷ್ಟು ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?
ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು

101, 108, 115, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 997 ಎಷ್ಟನೇ ಪದವಾಗಿದೆ?

ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸೋಣ $(997 - 101) \div 7 = 128$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$997 = 101 + (7 \times 128).$$

ಅಂದರೆ, 101 ರೊಂದಿಗೆ 128 ಸಲ 7 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 997 ಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು ಆಗ ಶ್ರೇಣಿಯ 129 ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ 997. ಅಂದರೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 3 ಶೇಷ ಬರುವ 129 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಆರನೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸುಲಭವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಕಾಲಂನಲ್ಲೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗುವಂತೆ ಖಾಲಿಬಿಟ್ಟ ಕೋಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1		5
9		17

ಇದರ ಮೇಲಿನ ಹಾಗೂ ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲದ ಕಾಲಂಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗುವಂತೆ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಲು ಸುಲಭ.

1	3	5
5		11
9	13	17

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಸಾಲನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಲು, ಖಾಲಿಯಿರುವ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ 8 ಬರೆಯಬೇಕು. ಈಗ ಮಧ್ಯದ ಕಾಲಂ ಸಮಾನಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂಭತ್ತು ಕೋಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದರೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕು.

ಮುಂದುವರಿದು, ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ 16 ಕೋಣೆಗಳ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಮೊದಲು ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲುಗಳನ್ನು, ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಕಾಲಂಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬೇಕು.

1	2	3	4
3			12
5			20
7	14	21	28

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸೋಣ.

1	2	3	4
3	6	9	12
5	10	15	20
7	14	21	28

ಈಗ ಮಧ್ಯದ ಕಾಲಂಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಮುಂದುವರಿದು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮಾಡಿ ನೋಡಲು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ಎಂಬ ಮುಂದಿನ ಭಾಗವು ಪೂರ್ತಿಯಾದರೆ, ಇದು ಯಾಕೆ ಸರಿಯಾಗುವುದು ಎಂಬ ಪರಿಶೋಧನೆಯಾಗಲಿ, ಒಂಭತ್ತು ಕೋಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು a, b, c, d ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.

a		b
c		d

ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಕೋಣೆ ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ, ಹೀಗೆ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬಹುದು.

a	$\frac{1}{2}(a + b)$	b
$\frac{1}{2}(a + c)$		$\frac{1}{2}(b + d)$
c	$\frac{1}{2}(c + d)$	d

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಸಾಲು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಲು ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾದುದು,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(b + d)\right] = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$$

ಮಧ್ಯದ ಕೋಣೆಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವೂ ಇದುವೇ ಆಗಿದೆ.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(c + d)\right] = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$$

ಆಗ ಮಧ್ಯದ ಸಾಲು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೇ ಆಗಿದೆ.

a	$\frac{1}{2}(a + b)$	b
$\frac{1}{2}$ $(a + c)$	$\frac{1}{4}$ $(a + b + c + d)$	$\frac{1}{2}$ $(b + d)$
c	$\frac{1}{2}$ $(c + d)$	d

16 ಕೋಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ, ಆಸಕ್ತಿಯಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಇದನ್ನೊಂದು ಸಂಶೋಧನಾತ್ಮಕ ಕಲಿಕೆಯಾಗಿ ಕೊಡಬಹುದು. ಏಳನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಮೂರು ಉಪ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವರು. (**ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿರುವ **11 ರ ಆಟಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬರುವುದೆಂದೂ 4,8,12,... ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು 1,2,3,... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದೂ ಮಕ್ಕಳು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅದೇ ರೀತಿ $\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \ldots$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಾಗಿರುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಬರುವುದೆಂದೂ 4,8,12.. ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು 3,6,9... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಗಿರುವುದೆಂದೂ ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಕುರಿತಾದ ವಿವರವಾದ ಕಲಿಯುವಿಕೆಗೆ ಬೀಜಗಣಿತವು ಪ್ರಧಾನವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದು. ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳು ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದು ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವುದು. ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮಧ್ಯದ ಪದದಮೂರು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟಾಗಬೇಕು. ಅದರ ಬಳಿಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ 5 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮಧ್ಯದ ಪದದ ಐದು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮಕ್ಕಳು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಮುಂದುವರಿದು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುವುದೂ ಮಾಡಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಮಧ್ಯದ ಪದವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ 5 ಪದಗಳು $x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ $5x$ ಎಂಬುದರಿಂದ, ಮಧ್ಯದ ಪದದ 5 ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಮೊದಲ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮಧ್ಯದ ಪದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ಮುಂದುವರಿದು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಪದವೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ತಿಳಿದರೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದೂ ಸ್ಥಾನ ಹಾಗೂ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನವನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದೂ ಮಾಡಬೇಕು. ಇದರ ಮೂಲಕ ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = an + b$ ಎಂಬ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು. ಬದಲಾಗಿ, ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದೂ ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು. $x_n = an + b$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ a ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಈ ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ಮನದಟ್ಟಾಗಬೇಕು.

ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ ಮುಂದಿನ ಭಾಗ. ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. a, b ಎಂಬಂತೆ ಎರಡು ಸ್ಲೈಡರ್‌ಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ತ್ರಿಜ್ಯ $an + b$ ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಾಗುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

1) ಐದು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮಧ್ಯದ ಪದದ ಐದು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆಗ ಮಧ್ಯದ ಪದ $\frac{30}{5}=6$ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.ಹೀಗಿರುವ ಅನೇಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ? ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ 4,5,6,7,8 ಅಥವಾ $5,\ 5\frac{1}{2},\ 6,\ 6\frac{1}{2},\ 7$

2) ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು $1, 1+d, 1+2d, 1+3d$ ಎಂಬಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಮೊತ್ತ $4 + 6d = 100$. ಇದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಮುಂದುವರಿದು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೂ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಎಂದರೆ ಮೂರು, ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $100 - 1 = 99$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಈ ಮೂರು ಪದಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಪದಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮಧ್ಯದ ಪದ (ಅಂದರೆ ಮೂರನೇ ಪದ) $99 \div 3 = 33$. ಒಂದನೇ ಪದ 1 ಹಾಗೂ ಮೂರನೇ ಪದ 33 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು 1,17,33,49.

3) ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ. ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ $x_n = an + b$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ.

$$x_1 + x_4 = (a + b) + (4a + b) = 5a + 2b$$

$$x_2 + x_3 = (2a + b) + (3a + b) = 5a + 2b$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

4) ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಸಿಗಲು,ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಪಧ್ಯದ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೂ 50 ಮಾಡಬೇಕು. ಆಗ ಮೊತ್ತ 50 ಆಗುವ ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಎರಡು ಪದಗಳಾಗಿ ತೆಗೆಯಬಹುದು.ಅದನ್ನನುಸರಿಸಿ ಇತರ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಸಾಕು. ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳು 20, 30 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಶ್ರೇಣಿಯ 10,20,30, 40,.... ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳು 17,33 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಶ್ರೇಣಿ 1,17,35,49, ...

5) 8 ನೇ ಪದ 12 ಹಾಗೂ 12 ನೇ ಪದ 8 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ನಾಲ್ಕುಮಡಿ $8-12=-4$, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ -1 ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಮೊದಲ ಪದದೊಂದಿಗೆ 7 ಸಲ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ -1 ಕೂಡಿಸಿದುದಾಗಿದೆ, 8 ನೇ ಪದವಾದ 12 ಎಂಬುದರಿಂದ ಮೊದಲ ಪದ 19 ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ.

$x_n = 19 + (n-1) \times (-1) = 20 - n$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಮುಂದುವರಿದು 5ನೇ ಪದ 8 ಹಾಗೂ 8 ನೇ ಪದ 5 ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ, 10ನೇಪದ 15 ಹಾಗೂ 15 ನೇ ಪದ 10 ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಈ ರೀತಿಯ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು.

6) ಪಕ್ಷಿ ಹೇಳಿದುದರ ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಹಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ.

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 \text{ ಒಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕು.}$$

ಅಂದರೆ $\frac{11x+4}{4}$ ಒಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕು. ಆಗ $11x+4$ ಎಂಬುದು 4ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ x ಎಂಬುದು 4ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಹಕ್ಕಿಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬರಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4,8,12 ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 4ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಾಗಿವೆ. ಅದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 4n$. ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 12, 23, 34,... ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 4n ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪಕ್ಷಿ ಹೇಳಿರುವ ಮೊತ್ತ $\frac{(11 \times 4n)+4}{4} = 11n+1$, ಮೊತ್ತದ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಇದೇ ಆಗಿದೆ.

7) ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $\frac{1}{6}n + \frac{1}{6}$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು $\frac{n+1}{6}$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. $n+1$ ಎಂಬುದು 6, 12, 18, ... ಎಂಬೀ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\frac{n+1}{6}$ ಎಂಬುದು 1,2,3,...ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನು 5,11,17,... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ n ತೆಗೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ.

8) ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ $\frac{2}{3}n - \frac{1}{3} = \frac{2n-1}{3}$ ಇದರಲ್ಲಿ n ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $2n-1$ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು. ಆಗ $\frac{2n-1}{3}$ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದೂ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲ. ಇನ್ನು $2n-1$ ಆಗಿ 3, 9, 15, ... ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಭಿಸಿದರೆ $\frac{2n-1}{3}$ ಆಗಿ 1,3,5,.. ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ, n ಆಗಿ 2, 5, 8, ... ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\frac{2n-1}{3}$ ಆಗಿ 1, 3, 5, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 2,5,8, ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಾಗಿ 1,3,5 ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದು.

9) 4, 7, 10, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ $x_n = 3n + 1$ ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

$$x_n^2 = (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1$$

ಇದನ್ನು $3(3n^2 + 2n) + 1$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದು 3ರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತ್ಯದೊಂದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದಲ್ಲವೇ. ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ $3n + 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯದೊಂದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳಾಗಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ $x_n^2 = 3(3n^2 + 2n) + 1$ ಎಂಬುದೂ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಇದರ 4ನೇ ಪದವಾದ 13ರ ವರ್ಗವಾಗಿರುವ 169ರ ಸ್ಥಾನವು ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $(3 \times 4^2) + (2 \times 4) = 56$.

10) 5, 8, 11, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ $3n + 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೂ, ಶೇಷ 2. ಆಗ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳೊಂದೂ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 2 ಸಿಗದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಸಿಗಬಹುದಾದ ಶೇಷ 0, 1, 2 ಈ ಮೂರರಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರುವುದರಲ್ಲವೇ. 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲವೂ 3ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳೇ ಆಗಿವೆ. 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 1,4,7,...ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $3n+1, n = 0, 1, 2,$ ... ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು $(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1$ ಈ ವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಆಗಿರುವುದು. ಕೊನೆಯದಾಗಿ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 2 ಶೇಷ ಬರುವ 2,5,8,..ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $3n + 2, n = 0, 1, 2,$ ... ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು

$(3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1.$

ಆಗ ಈ ರೀತಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಲೂ ಶೇಷ 1 ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 0,1, ಇವಲ್ಲದೆ 2 ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

11) ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 540^0 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಕೋನಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{540}{5} = 108$. ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 540^0 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಕೋನಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ $36 + 180 = 216$ ಆದುದರಿಂದ ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 216 (ಮೊದಲ ಪದ ಹಾಗೂ ಐದನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮಧ್ಯದ ಪದದ ಎರಡು ಮಡಿ). $36+180=216$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಅಳತೆ 36^0 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೋ ಆದರೆ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಅಳತೆ 180^0 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವೋ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಅದೂ ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ.

12) ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $\frac{3n+8}{8}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ n ಆಗಿ 8,16,24,... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 8ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದಗಳ ಶ್ರೇಣಿ $\frac{(3\times 8n)+8}{8} = 3n + 1$ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ, 4, 7, 10, ...

ಮೊತ್ತಗಳು

ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಿರುವ ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು. ಒಂದರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮೊದಲು ಚರ್ಚಿಸುವುದು. ಮುಂದುವರಿದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು, 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಾಣಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದು. ಮುಂದುವರಿದು, ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದು.

$x_1, x_2, x_3,$ ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \frac{1}{2} an\,(n+1) + nb$ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ತಲುಪಿದುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದು. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದಂತೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2} n\,(n + 1)$$

ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$a + 2a + ... + an = \frac{1}{2} an\,(n + 1)$$

(ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ a ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊತ್ತವು a ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಂಬ ಯುಕ್ತಿ)

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತ

$$(a + b) + (2a + b) + ... + (an + b) = \frac{1}{2} an\,(n + 1) + nb$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವೂ b ಯಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರಿಂದ ಮೊತ್ತ nb ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು) ಮುಂದುವರಿದು, ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದರ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದು.

2) ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 4 ಆಗಿದೆ. ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಬಳಿಕ ನಂತರದ 20 ಪದಗಳೆಂಬುದು 21ನೇ ಪದದಿಂದ 40 ನೇ ಪದಗಳವರೆಗೆ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಂದನೇ ಹಾಗೂ 21 ನೇ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $20 \times 4 = 80$. ಅದೇ ರೀತಿ ಎರಡನೇ ಪದದೊಂದಿಗೆ 80 ಸೇರಿಸಿದರೆ 22 ನೇ ಪದ ಸಿಗುವುದು. ಹೀಗೆ 6,10,14...ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದೊಂದಿಗೂ 80 ರಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ 21,22,..ಎಂಬೀ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು ಲಭಿಸುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಮೊತ್ತಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $80 \times 20 = 1600$.

3) 6, 10, 14, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದೊಂದಿಗೂ 9 ಸೇರಿಸಿದರೆ 15, 19, 23, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯು ಸಿಗುವುದು. ಮೊತ್ತಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ. $20 \times 9 = 180$.

4) 9ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರುವ ಅತೀ ಸಣ್ಣ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ 108 ಹಾಗೂ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ 999 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 108,117,126,... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ 999 ರ ವರೆಗಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

5) $(0.008)^{-30} = \left(\frac{1}{125}\right)^{-30} = (125)^{-30} = (125)^{30} = 5^{90}$

ಎಂದೂ,

$$5 \times 5^2 \times 5^4 \times ... \times 5^{2n} = 5^{2+4+6 ... + ... 2n} = 5^{n(n+1)}$$

ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$5^{n(n+1)} = 5^{90}$$

ಇದರಿಂದ

$$n(n+1) = 90$$

ಎಂದೂ, ಮುಂದುವರಿದು

$$n = 9$$

ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

6. ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $n^2 + 2n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ. ಮೊದಲ ಪದ $1^2 + (2 \times 1) = 3$ ಎಂದೂ ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $2^2 + (2 \times 2) = 8$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಇದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಪದ $8 - 3 = 5$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ ಶ್ರೇಣಿಯು 3, 5, 7, ... ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $x_n = 2n + 1$.

7. ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ರೂಪೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು.

8. ಮೊದಲ 5 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಎಂಬುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ 3ನೇ ಪದವು $100 \div 5 = 20$ ಎಂದು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇನ್ನು ಮೊದಲ 10 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 350 ಹಾಗೂ ಮೊದಲ 5 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 100 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 6 ರಿಂದ 10 ರ ವರೆಗಿನ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ 5 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $350 - 100 = 250$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ 8 ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಪದವು $250 \div 5 = 50$ ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು ಲಭಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

9. 16, 24, 32, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $8n + 8$; ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $\left(8 \times \frac{1}{2} n (n+1)\right) + 8n = 4n^2 + 12n$ ಇದರೊಂದಿಗೆ 9 ಕೂಡಿಸಿದರೆ $4n^2 + 12n + 9 = (2n + 3)^2$.

10. 4, 7, 10, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಪದ, ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು, ಅದರ ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು ಹೀಗೆ ವಿಭಜಿಸಿ. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

4			
7	10		
13	16	19	
22	25	28	31

ಆಗ ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ, ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮುಂದಿನ 5 ಪದಗಳೊಳಗಿರುವ 34,37,40,43, 46 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮುಂದಿನ 6 ಪದಗಳಾಗಿರುವ 49, 52, 55, 58, 61, 64 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 4,7,10,.. ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ 1 ನೇ ಪದ ಮಾತ್ರವಿರುವುದು. 2 ನೇ ಸಾಲಿನ ಕೊನೆಗೆ ತಲುಪುವಾಗ ಶ್ರೇಣಿಯ $1+2 = 3$ ಪದಗಳಿರುವುದು. 3 ನೇ ಸಾಲಿನ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಯ $1+2+3 = 6$ ಪದಗಳಿರುವುದು.

ಪದ ತ್ರಿಕೋನ				ಸ್ಥಾನ ತ್ರಿಕೋನ			
4				1			
7	10			2	3		
13	16	19		4	5	6	
22	25	28	31	7	8	9	10

ಹೀಗೆ ನೋಡುವಾಗ 20 ನೇ ಸಾಲಿನ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಯ $(1 + 2 + ... + 20) = \frac{1}{2} \times 20 \times 21 = 210$ ಪದಗಳಾಗುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ 20ನೇ ಸಾಲಿನ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4,7,10, ಎಂಬ ಕಲನ ಶ್ರೇಣಿಯ 210 ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ.

4, 7, 10, ...ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $3n + 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 210 ನೇ ಪದವು $(3 \times 210) + 1 = 631$. ಈ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಯ 20 ಪದಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಲಿನ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಶ್ರೇಣಿಯ $210 - 19 = 191$ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $(3 \times 191) + 1 = 574$.

ಸಂಶೋಧನೆ

ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ, ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪದಗಳ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅದೇ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆ 0, 1, 5, 6 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅದೇ ಅಂಕೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು. ಆಗ ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಘಾತಗಳೂ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದು.

$$x_n = 10n$$

$$x_n = 10n + 1$$

$$x_n = 10n + 5$$

$$x_n = 10n + 6$$

ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ a ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x_n = an$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗೂ $x_n = an + 1$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗೂ ಈ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಒಂದರಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಕುರಿತಿರುವ ಊಹನೆಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಯಾವುದಾದರೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿಗೂ ಇದೇ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 4, 12, 20, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ 4, 16, 36, ... ಎಂಬಂತೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು ಲಭಿಸುವುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, a ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x_n = a^2(2n - 1)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವೇ ಲಭಿಸಿವುದು. ಇದರ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು a^2n^2 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

2 ವೃತ್ತಗಳು

ಮುನ್ನುಡಿ

ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಲು ಮಕ್ಕಳು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿರುವುದು ಐದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧವೇರ್ಪಡಿಸಿ ಮಂಡಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನೂ ರಚಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳ ಕುರಿತಾದ ನಿಜವಾದ ಕಲಿಕೆಯು ಆರಂಭವಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿರುವುದು ಜ್ಯಾಗಳ ಕುರಿತಾಗಿದೆ. ಚಾಪಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಹತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ***ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ*** *ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಚಾಪವೂ ಜ್ಯಾವೂ ತಮ್ಮೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಈ ಆಶಯ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುವುದು.*

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ವೃತ್ತಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ-ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. • ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಚಾಪವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಮರುಚಾಪದಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ. • ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಚಾಪವು ಮರುಚಾಪದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಚಾಪದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಮರು ಚಾಪದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಜತೆ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ.	• ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಒಂದು ರೇಖೆ ಕರ್ಣವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಿ ಕೆಲವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಲಂಬ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ವೃತ್ತ ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವರು. • ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ಲಂಬವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವುದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವರು. • ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಮರುಚಾಪದ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಚಾಪವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧವು ಮರುಚಾಪದ ಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವರು. • ಒಂದು ಚಾಪವು ಮರುಚಾಪದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಎರಡೂ ಚಾಪಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180 ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ ಕುಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಚಾಪವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರು. • ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗ ಮಾಡುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿದೆ ಯೆಂದೂ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ವೃತ್ತಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ-ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ • ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ • ಆಯತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕದ ರಚನೆ • ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕದ ರಚನೆ • ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಗಮಿಸುವಾಗ, ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಾಲಬ್ಧಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. • ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಖಂಡಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.	• ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವರು. • ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿದೆ. • ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದಾಗ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಾದರೆ ಆ ಶಿರದ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು. ಒಳಗಾದರೆ 180^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು ಎಂದೂ ಸಮರ್ಥಿಸುವರು. • ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೆಳೆದು ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಜ್ಯಾವನ್ನೆಳೆದು ಜ್ಯಾ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಹೀಗೆ ಎಳೆಯುವ ಜ್ಯಾ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವರು. • ಜ್ಯಾಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂಬ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ	• ಪರಿವೃತ್ತವಿರುವ ಚತುರ್ಭಜಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವರು. • ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವಾಗ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿ ಕೊಳ್ಳುವರು. • ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗದೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಆಯ ತವಾಗಿ ರಚಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

ಆಶಯ ವಿಕಾಸ

ವೃತ್ತದ ಚಾಪಗಳು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವು ಈ ಪಾಠಭಾಗದ ಮುಖ್ಯವಿಷಯ. ಇವುಗಳನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಾಗ, ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಚತುರ್ಭಜಗಳಿಗೂ ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳಿಗೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ರೂಪಿಸಲ್ಪಡುವುವು. ಇವುಗಳು ಇತರ ಹೊಸ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಗೆ ಆಧಾರವಾಗುವುದು. ಗಣಿತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ದ್ವಂದಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಸಮೀಪಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಸರಿಸಿರುವುದು.

ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಕುತೂಹಲವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಒಂದು ಗಣಿತ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಅದುಂಟುಮಾಡುವ ಜಿಜ್ಞಾಸೆಯನ್ನುಳಿಸಿಕೊಂಡು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ನಡೆಸುವದೂ ಅದರ ಮೂಲಕ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು. ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಂದ ಹಲವು ರೀತಿಯ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮೂಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ನಾವು ಈಗ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ ಗಣಿತ ಬೋಧನಾ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನನುಸರಿಸಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ಕರ್ಣವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಇತರ ಮೂಲೆಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ ನೋಟವಾಗಿದೆ ಈ ಪಾಠದ ಮುಖಪುಟ. ನಂತರ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಪಾಠವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ವಿವರವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೂ ಸಿಗುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಂಡ ವೃತ್ತದ ವಿವರಣೆಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿ, ಒಂದು ಮಟ್ಟವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಹೊಸ ವಿಧಾನವೊಂದು ಸಿಗುವುದು.

ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಇರುವ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗಬೇಕು ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಯು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದು. ಜ್ಯಾದ ತುದಿಗಳು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೂ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಂಡಿಸಬೇಕು. ಜ್ಯಾಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಚಾಪಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಚಿಂತಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕ ಎಳೆಯಲಿರುವ ಹೊಸ ವಿಧಾನವೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನವು ಪರಿವೃತ್ತವೂ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೆಳೆಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವೂ ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಂದ ಸಿಗುವುದು.

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ತುದಿಗಳೂ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೂ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳಾಗಿ ಕಂಡರೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದ ಕೋನ ಸಂಬಂಧಗಳು, ಶಿರಗಳೆಲ್ಲಾ ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭಜದ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವಾಗುವುದು. ಇದು ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಇದು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ವಿಶೇಷತೆ ಇರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ

ಎಂಬ ಆಕೃತಿಯ ಕಲಿಕೆಯ ಕಡೆಗೆ ಕೊಂಡು ಹೋಗುವುದು.

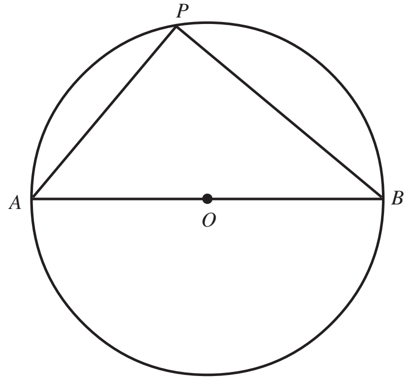
ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನೂ, ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಜೋಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಕೋನವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸುವುದು. ಇದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಖಂಡಿಸುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳು ತಮ್ಮೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಾಗ, ಒಂದು ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಅದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲೂ, ಒಂದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳೂ ಸಿಗುವುದು.

ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸುವರು. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವ ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ಪಾಠಭಾಗ ಆರಂಭವಾಗುವುದು. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯು ಕರ್ಣವಾಗುವ ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಬೇಕಾದುದಾಗಿದೆ. ಮಕ್ಕಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಿ. ಕರ್ಣದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 90 ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವುದು ಒಂದು ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ. ಈ ರಚನೆಯ ಮೂಲಕ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯು ಕರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಅನೇಕ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ಮಗುವಿಗೆ ಮನದಟ್ಟಾಗಬೇಕು. ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಶಿರಗಳ ಸಂಚಾರ ಪಥವನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ಸ್ವತಃ ಎಳೆದು ನೋಡಲಿ. ನಂತರ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಸಂಚಾರಪಥವನ್ನು ಚಲನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಬೇಕು. ಯಾಕೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರು ಶಿರಗಳೆಲ್ಲಾ ಸೇರುವಾಗ ವೃತ್ತವಾಗುವುದು ಎಂಬ ಜಿಜ್ಞಾಸೆಯನ್ನು ಮಂಡನೆಯ ಮೂಲಕ ಇಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಬೇಕು. ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ **ಮಟ್ಟವೂ ವೃತ್ತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದುದು.

ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ತುದಿಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನದ ಕುರಿತು ಇರುವ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಎರಡನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ, ವಿಭಿನ್ನ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈ ಕೋನವು ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಅದರ ನಂತರ, ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಕೋನಗಳು x, y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ನಿಗಮನವನ್ನು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಬೇಕು.

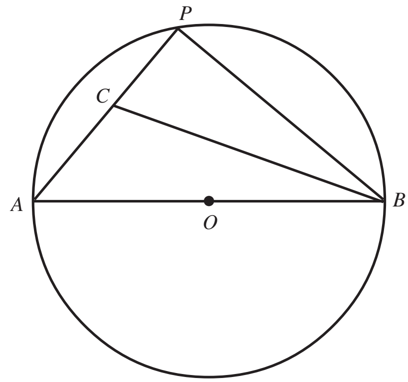
ಅನಂತರ ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಸಂಧಿಸುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಕಾರಣ ಕೊಡುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲೇ ಕೆಳಗೆ ಹೇಳುವ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಬಹುದು.



ಮೊದಲು A ಯಿಂದಲೂ B ಯಿಂದಲೂ ಎಳೆದ ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತದ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವ. ಆಗ $\angle P = 90^o$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡೆವಲ್ಲವೆ. AP ಯ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನೂ B ಯನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆ.

ಆಗ ಹೊಸತೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ACB ಸಿಗುವುದು.

APB, ACB ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ $\angle A$ ಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲ. ಆದರೆ $\angle B$ ಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ C ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು P ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ $\angle C > 90^o$.



ಹೀಗೆಯೇ ಗೆರೆಗಳ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಸಂಧಿಸುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು.

ಈ ಎರಡು ನಿಗಮನಗಳಿಂದ ವೃತ್ತವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವುದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು ಎಂಬ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದರ ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ನಡೆಸಬೇಕು. ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುವುದು ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವು ಮೂರು ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿರುವುದು. ವೃತ್ತದೊಳಗೆ, ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು 90^o ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಿದರೆ? ವೃತ್ತದ ಒಳಗೋ ಹೋರಗೋ ಅಲ್ಲ ಯಾಕೆಂದರೆ, ಈ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನವು 90^o ಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಾಯಿತು. ಆದುದರಿಂದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೋ ಆಗಿರಬೇಕು.

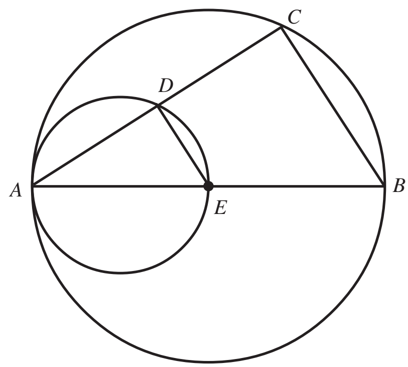
ಈ ಯುಕ್ತಿ ಮನದಟ್ಟಾದರೆ ಇತರ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 10 ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆರಡೂ 5ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಎರಡೂ 5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಎಂಬೀ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು 5ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯೂ, ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 5ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚೂ ಆಗಿರುವುದೆಂಬ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಸಮಾನ ಭಾರವಲ್ಲದ 6 ಮಂದಿಯ ಸರಾಸರಿ ಭಾರವು 60 ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ, ಒಬ್ಬರ ಭಾರವಾದರೂ 60ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ಒಬ್ಬರ ಭಾರವಾದರೂ 60ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

(ಹೀಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕವು 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್ ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿದೆ)

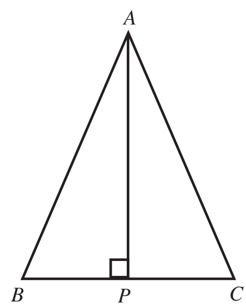
ಇನ್ನು ಒಂದೇ ಗೆರೆ ಕರ್ಣವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಲಂಬ ಶಿರಗಳು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗುವುದು. ಯಾಕೆಂದು ವಿವರಿಸುವುದು. ಈ ಗೆರೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಣ್ಣ ಭುಜಗಳು ಈ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ತುದಿಗಳಿಂದಲೂ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳದಾದವು. ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು. ನಂತರ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅವುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವುದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಆಗಿರಬಹುದೇ? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. (ಇದನ್ನು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವುದು) ಈ ತತ್ವದ ಪ್ರಯೋಗ ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಮಟ್ಟವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. (ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.)

ನಂತರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಕಲಿತ ಆಶಯಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿರುವ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭವಾಯಿತು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನೆಳೆದು ಅವುಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕು.



ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನ ಸಮಾನ ಭುಜಗಲು ಸಂಧಿಸುವ A ಎಂಬ ಶಿರದಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭಜವಾದ BC ಗೆ BP ಎಂಬ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.



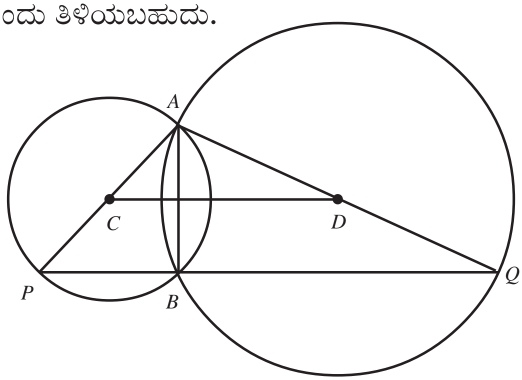
$\angle BPA = \angle APC = 90^o$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ AB, AC ವ್ಯಾಸವಾಗುವ ವೃತ್ತಗಳು P ಯ ಮೂಲಕ ದಾಟಿ ಹೋಗುವುದು. ABC ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು P ಯಾಗುವುದು.

ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಲ್ಲದವುಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸುವ

ಆರನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪೈಥಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಏಳನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ $\angle ABP$, $\angle ABQ$ ಗಳು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ B ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು PQ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

AP, AQ ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು, ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳಾದ C ಮತ್ತು D ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ CD ಎಂಬ ಗೆರೆಯು PQ ಗೆ ಸಮಾನಾಂತವೂ CD ಯ ಉದ್ದವು PQ ವಿನ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧವೂ ಆಗಿದೆ. ಇದು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಒಂದು ತತ್ವವಾಗಿದೆ.



ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೇಲೆಯೂ ಕೆಳಗೂ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಒಂದೇ ಪಾದವಿರುವ ಎರಡು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗುವುದು. ಇನ್ನು ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಂಡ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಒಂಬತ್ತನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ

AB ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2$

AC ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$

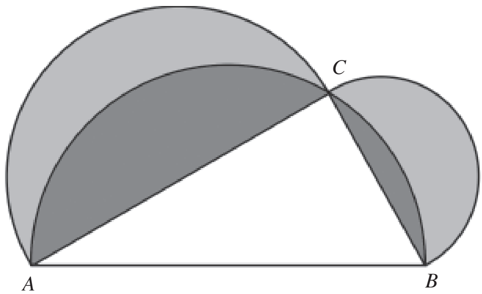
BC ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2$

ಇನ್ನು

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\pi\ \frac{AC^2}{4} + \frac{1}{2}\pi\ \frac{BC^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\frac{\left(AC^2+BC^2\right)}{4} = \frac{1}{2}\pi\ \frac{AB^2}{4}$$



ಎಂದು ಪೈಥಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

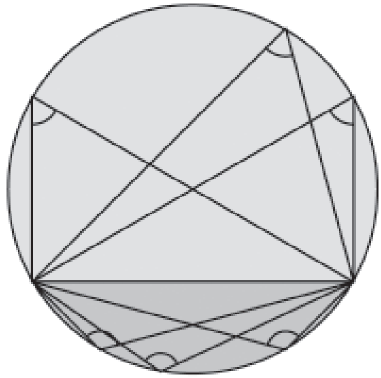
ಅಂದರೆ, AB ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು AC ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು BC ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. AB ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಿಂದ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಶೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿರುವುದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಲ್ಲವೇ? ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿರುವುದನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಇದು AC, BC ಗಳು ವ್ಯಾಸವಾದ ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಈ ಶೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ವಿಭಿನ್ನ ಬಣ್ಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಚೋಕುಗಳಿಂದ ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ, ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಉಜ್ಜಿ ದೃಶ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ತ. ಅಥವಾ ಮೊದಲೇ ದೊಡ್ಡ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಚತ್ರಗಳೋ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸುವುದೋ ಆಗಬಹುದು.

ಜ್ಯಾ, ಕೋನ ಮತ್ತು ಚಾಪ

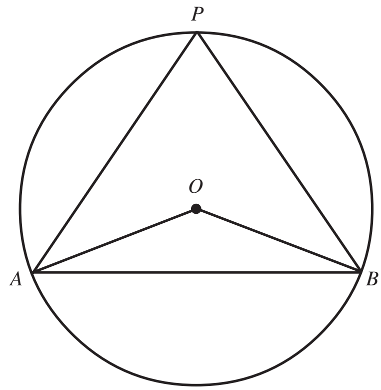
ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿರುವುದು ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತಾಗಿದೆ. ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಜ್ಯಾಗಳ ಕುರಿತು ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾಗಳು ಅದನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಎಂದೂ ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲವೆಂದೂ ಇರುವ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಲು ವೃತ್ತದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಎರಡು ಬಣ್ಣಗಳಲ್ಲಾಗಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಪಾಠಪುಸ್ತಕವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡೇ ಚರ್ಚೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕು.



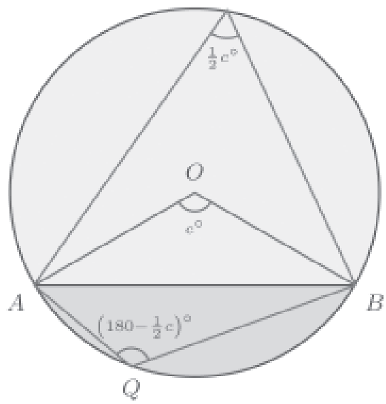
ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಲಂಬವಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಒಂದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವೇ ಎಂಬ ಚರ್ಚೆ ನಂತರ ನಡೆಯಬೇಕು. ಮೊದಲು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

ದೊಡ್ಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯುವ ಬಿಂದುವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಆದರೆ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣುವುದು. ಅಂದರೆ $\angle P = \frac{1}{2}\angle AOB$. ನಂತರ, P ಯ ಸ್ಥಾನವು AB ಯ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿದ್ದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೇ ಎಂಬ ಅನ್ವೇಷಣೆ ನಡೆಯುವುದು.



ಆಗ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿಯೂ ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಭಾಗದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಕುರಿತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳುಂಟಾಗುವುದು. ಇಂತಹ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ 180^0ಯಿಂದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿರುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಹಾಗೆಯೇ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಗಟ್ಟಿಗೊಳಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಮನದಟ್ಟಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು.

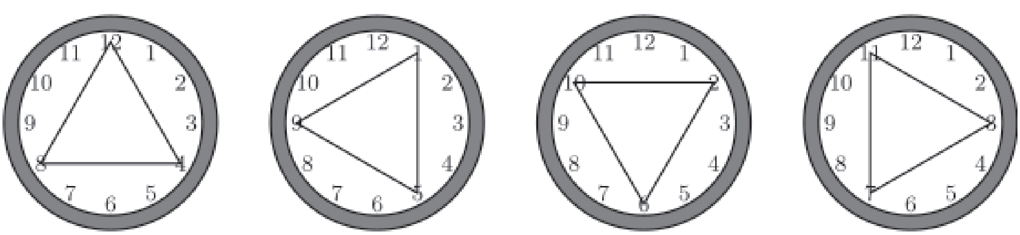


ನಂತರ, ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎಂಬ (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವ) ಆಶಯವನ್ನು ಮರುಚಾಪಗಳು ಎಂಬ ಹೊಸ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಜ್ಯಾದ ಎರಡೂ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಎರಡು ತತ್ವಗಳನ್ನು ಏಕೀಕರಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತ ವಲಯವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವುದನ್ನು ಕಾಣುವುದಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭ ಇಡೀ ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಈ ಏಕೀಕೃತ ತತ್ವವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಂಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳು ಮುಂದೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$22\frac{1}{2}^{o}, 11\frac{1}{4}^{o}$ ಮೊದಲಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ. ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆ 45^{o} ಕೋನವನ್ನು ಆವರ್ತಿಸಿ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿ ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಚಾಪವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧವು ಮರು ಚಾಪದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ತುಂಬಾ ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿವೃತ್ತವೂ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಒಂದೇ ಕೋನಗಳಿರುವ ಅನೇಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸ ರಚಿಸಬಹುದಾದರೂ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದರೆ ಇಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನಾಗಿದೆ.

ನಂತರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜ್ಯಾ. ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಆಶಯವಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ತತ್ವಗಳೆಲ್ಲವೂ ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿರಿಸಿ ಉಂಟಾಗಿರುವವುಗಳಾಗಿವೆ.

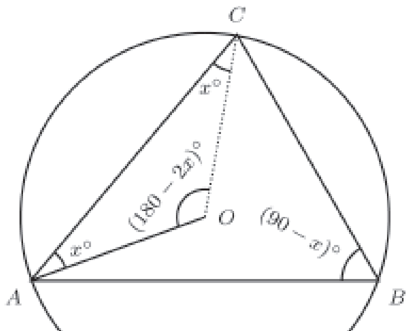
ನಂತರದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಗಡಿಯಾರದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನವು $\frac{360^{o}}{12} = 30^{o}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಆಗ 4,8 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನವು $30^{o} \times 4 = 120^{o}$. ಆಗ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು 60^{0}, ಹೀಗೆಯೇ 4,8 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು60^{0} ಆಗಬೇಕು. ಆಗ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು 120^{0} ಯಾವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಕೇಂದ್ರದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ 120^{0} ಆಗಬಹುದೆಂದು ಮಕ್ಕಳು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.



ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೊದಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 160^{o} ಕೋನವನ್ನೆಳೆದರೆ, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 80^{0} ಕೋನವಾಗುವುದು. ನಂತರದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 140^{0} ಕೋನವನ್ನೆಳೆದರೆ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 70^{0} ಕೋನ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 110^{0} ಕೋನ ಸಿಗುವುದು.

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^{0} ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಒಂದು ಭಾಗದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದ ಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಗಲು ಸಣ್ಣ ಕೋನದ ಮೂರು ಮಡಿಯು 180^{0} ಆಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಸಣ್ಣ ಕೋನವು 60^{0} ಹೀಗೆಯೇ ಒಂದು ಭಾಗದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದ ಕೋನದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಲು ಸಣ್ಣ ಕೋನದ ಎರಡೂವರೆ ಮಡಿಯು 180^{0} ಆಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಸಣ್ಣ ಕೋನವು $180^{o} \times \frac{2}{5} = 72^{o}$.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $360^{o} \times \frac{1}{10} = 36^{o}$ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಸರಿಗೆ ಬಾಗಿಸಿದ ಕೋನವು 36^{0} ಆಗ ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಚಾಪದ ಕೋನವು 36^{0} ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 72^{0}. ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ ವೃತ್ತದ $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಭಾಗವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂಬ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಯಲಿ.

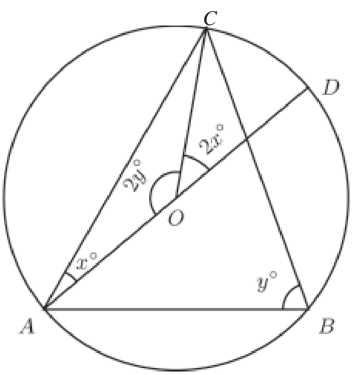


ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, $\angle OAC = x^{o}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕೋನಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಆಗ,

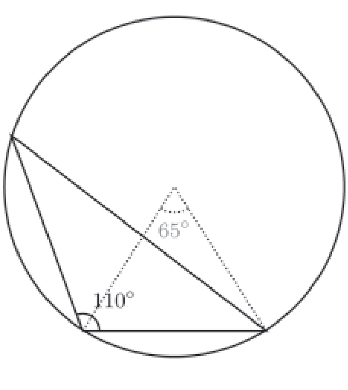
$\therefore \angle OAC + \angle ABC = x^{o} + (90 - x)^{o} = 90^{o}$

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. OC ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ. AO ವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಬಿಂದು D ಗೆ ತಲುಪಿಸಿರಿ. $\angle OAC = x^{o}$, $\angle ABC = y^{o}$

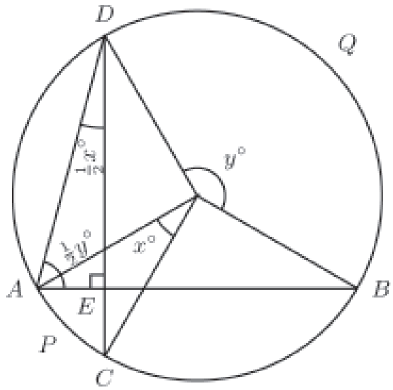


ಎಂದೂ ತಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\angle COD = 2x^{o}$ ಎಂದೂ $\angle AOC = 2y^{o}$ ಎಂದೂ $\angle COD + \angle AOC = 180^{o}$ ಆದುದರಿಂದ $x + y = 90^{o}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

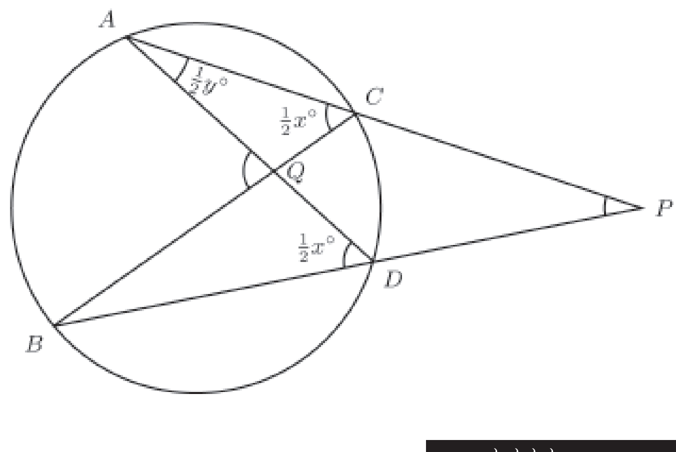
ಆರನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು $32\frac{1}{2}^{\circ}$, $37\frac{1}{2}^{\circ}$, 110° ಆಗಲು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು 65^{0}, 76^{0}, 220^{0} ಆಗಿರಬೇಕು. ಆಗ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 65^{0}ಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 110^{0} ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಹೇಳಿಕೊಡುವುದರ ಬದಲು, ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಬೇಕು. ಏಳನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚಾಪ *APC*, ಚಾಪ *BQD* ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಾಗ ವೃತ್ತದ ಅರ್ಧವಾಗುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಚಾಪಗಳು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^{0} ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ.



ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು x^{o}, y^{o} ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ $\angle ADC = \frac{1}{2}x^{o}$ ಎಂದೂ $\angle BAD = \frac{1}{2}y^{o}$ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. *ADE* ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ $\angle ADC + \angle BAD = 90^{o}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 90$ ಎಂದೂ $x + y = 180^{o}$ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.



ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, *AB* ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು x^{o} ಎಂದೂ *CD* ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು y^{o} ಎಂದೂ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ರುವಂತೆ ಗುರುತಿಸಬ ಹುದು. ΔAPD ಯಲ್ಲಿ, *D* ಯಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯ



ಕೋನವು $\angle ADB$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\frac{1}{2}x^o = \angle APB + \frac{1}{2}y^o$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ $\angle APB = \frac{1}{2}(x - y)^o$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ΔAQC ಯಲ್ಲಿ, Q ವಿನ ಹೊರಕೋನವು $\angle AQB$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle AQB = \frac{1}{2}(x + y)^o$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ $\angle APB + \angle AQB = x^o$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ AB ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಚಾಪವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವು, ಇದೇ ಚಾಪವು P ಮತ್ತು Q ವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತವೂ ಚತುರ್ಭುಜವೂ

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳೆಲ್ಲಾ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ಜತೆ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಕರ್ಣವಾದ ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದು ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿಯುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಬೇಕು.

ಈ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ

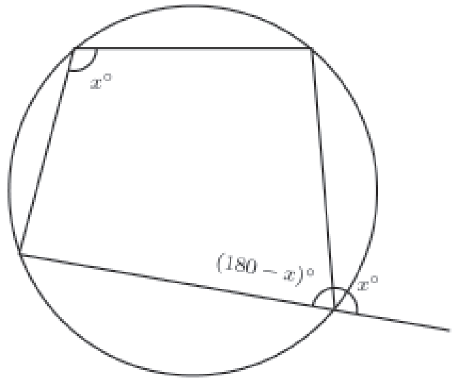
- ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯುವ (ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲಿಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಬಹುದೆಂದು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವರು)
- ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರವು ಹೀಗೆ ಎಳೆಯುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲೋ, ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೊ, ವೃತ್ತದ ಒಳಗೋ ಆಗಬಹುದು.
- ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರವು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾದರೆ ಆ ಶಿರ ಮತ್ತು ಅದರ ಎದುರಿರುವ ಶಿರಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗುವುದು.

ಇನ್ನು ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರವು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆ ಶಿರ ಮತ್ತು ಅದರ ಎದುರಿರುವ ಶಿರದ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. (ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಾದರೆ 180^0 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಒಳಗಾದರೆ 180^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು) ಇದರಿಂದ ಮೊತ್ತ 180^0 ಯೋ ಆದರೆ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರವು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೋ ಹೊರಗೋ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಆದುದರಿಂದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಆ ಬಿಂದು ಇರುವುದೆಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು. (ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರುವ ರೀತಿಯೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವುದು)

ನಂತರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಚಾಪದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

180^0 ಎಂಬೀ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

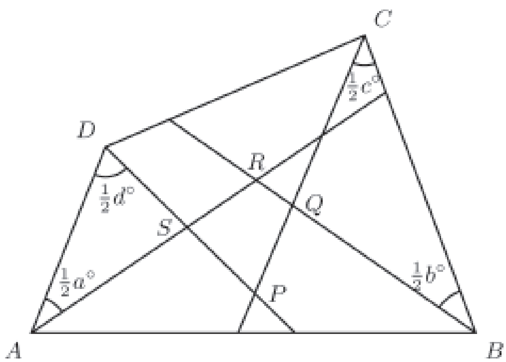
ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಶಿರದಲ್ಲಿರುವ ಹೊರ ಕೋನವು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆ ಶಿರದಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನವು $180^o - x^o$; ಚತುರ್ಭುಜ ಚಕ್ರಿಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು x^o. ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.



ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಬೇಕು. ಆಗ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಕೋನದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ಚತುರ್ಭುಜ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಈ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು 90^0 ಆಗಬೇಕು. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವಾಗಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳು ಮಾತ್ರ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಎಂದಾಗುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಾದರೆ ಆಯತವಲ್ಲದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೆಂದೂ ಚಕ್ರಿಯವಲ್ಲ.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, AB, CD ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾದ $ABCD$ ಎಂಬ ಸಮಲಂಬದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು D ಯ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಇದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಬೇಕಾದರೆ, B ಯಲ್ಲೂ D ಯಲ್ಲೂ ಇರುವ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಬೇಕು. ಆಗ A ಮತ್ತು B ಯ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇಂತಹ ಸಮಲಂಬವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗೆ ಸಮಲಂಬಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬಗಳು ಮಾತ್ರ ಚಕ್ರಿಯವಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಾದರೆ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುವುದು.

ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯುಲ್ಲಿ, $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು S, Q ಎಂಬೀ ಶಿರಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. $ABCD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ A, B, C, D ಎಂಬೀ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು a^o, b^o, c^o, d^o ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಆಗ, ASD

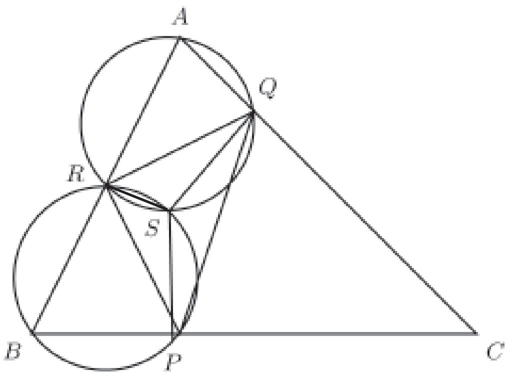


ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ S ನ ಕೋನವು $180^o - \frac{1}{2}(a^o + d^o)$ ಎಂದೂ BQC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ Q ವಿನ ಕೋನವು $180^o - \frac{1}{2}(b^o + c^o)$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. $PQRS$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ S ಮತ್ತು Q ವಿನ ಕೋನಗಳೂ ಇದುವೇ ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವು,

$$360^o - \frac{1}{2}(a^o + b^o + c^o + d^o) = 360^o - (\frac{1}{2} \times 360^o)$$

$$= 180^o$$

ಆರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, PQ ವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ $ABQP$ ಎಂಬ ದೊಡ್ಡ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು $PQDC$ ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ A ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನ ಮತ್ತು Q ವಿನ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುವವು. Q ವಿನ ಈ ಕೋನವು ಸಣ್ಣ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಹೊರಕೋನವಾದುದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರವಾದ C ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಆಗ A ಮತ್ತು C ಶಿರದ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿದೆ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ AB, CD ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹಾಗೆ $ABCD$ ಸಮಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ AC, BD ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಉದ್ದವಿರುವುದಾದರೆ $ABCD$ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಚಕ್ರೀಯವೂ ಆಗಿದೆ. ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ PQ, RS ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಮೂರು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಒಂದನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ A ಯ ಕೋನ ಮತ್ತು R ನ ಎಡಭಾಗದ ಕೋನ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಕೋನವು $SDCR$ ಎಂದೂ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಹೊರ ಕೋನವಾದುದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರದ D ಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ A ಮತ್ತು D ಯ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುವುದೆಂದೂ ಆದುದರಿಂದ $ABDC$ ಯು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.



ಏಳನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, AQR, BRP ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರಿವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ ಇವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು R ಮತ್ತು S ಆಗಿರಲಿ. CPQ ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತವು S ನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು $CPSQ$ ಚಕ್ರಿಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ C ಮತ್ತು S ನ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

S ನ ಇತರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು $AQSR$, $BPSR$ ಎಂಬೀ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ. ಆಗ S ನಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಕೋನವು, $360^{\circ} - ((180^{\circ} - A) + (180^{\circ} - B)) = A + B$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ $A + B = 180^{\circ} - C$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಹಾಗೆ $CPSQ$ ನಲ್ಲಿ C ಮತ್ತು S ನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.

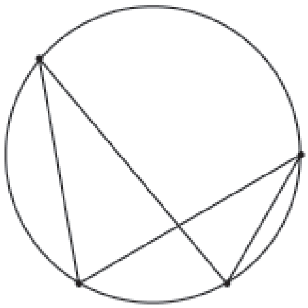
ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು

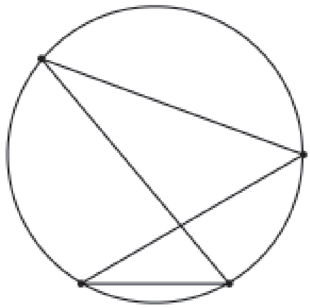
ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಬಂಧಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಆಯತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗದೆ ಆಯತವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿಗಳನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಖಂಡಿಸುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸದೃಶವಾದ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದು ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದುದಾಗಿದೆ:

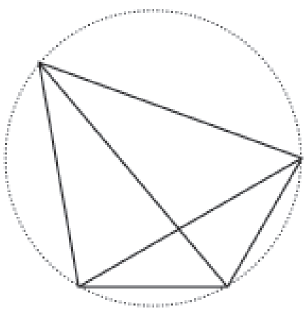
ಇದನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

- ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

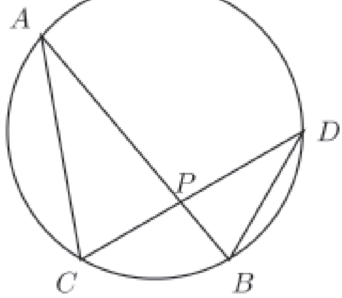




- ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಖಂಡಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ವಿರುದ್ಧ ಜೊತೆಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

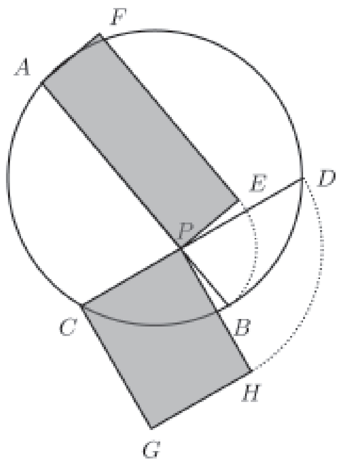


ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವ ತತ್ವವನ್ನು ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದರಿಂದ ಸಿಗುವ ಭಾಗಾಕಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದಾಗ ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧ ಸಿಗುವುದು.



$$PA \times PC = PB \times PD$$

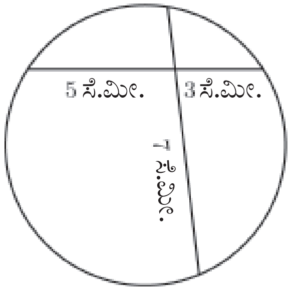
ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಾಗ, ಅದು ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವಾಗುವುದು:



$APEF$ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= CPHG$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

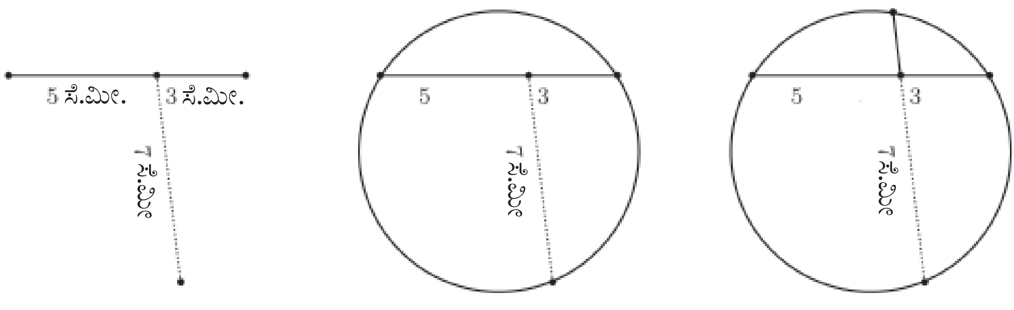
ಈ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗದೆ ಒಂದು ಭುಜವು ದೊಡ್ಡದಾಗುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಬಹುದು. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ನೇರವಾಗಿ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೇಳಿಕೊಡುವ ಮೊದಲು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯತದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವೂ 3 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಅಗಲವೂ ಇರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಇನ್ನು ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಉದ್ದವು, 7 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು

ಎಂದು ಕೇಳಬಹುದು. ಇಂತಹ ಒಂದು ಆಯತದ ಅಗಲವು $2\frac{1}{7}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಕೇಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈಗ ಮೇಲೆ ನೋಡಿರುವ ತತ್ವವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣುವಂತಹ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

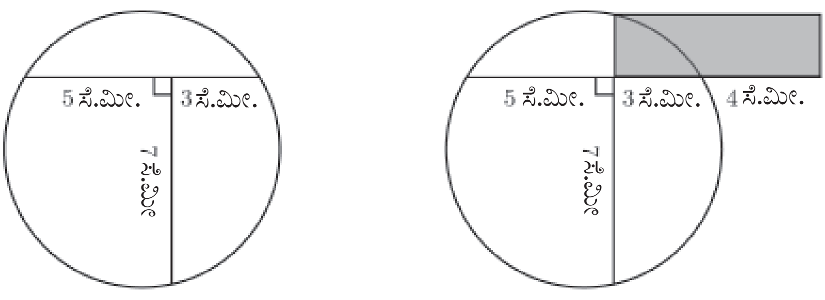


ಇದರಲ್ಲಿ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗದ ಉದ್ದವು $\frac{5 \times 3}{7}$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ.

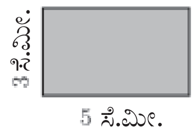
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು 5 + 3 = 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ 5 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ಈ ಗರೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 7 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇದೇ ಗೆರೆಯಲಿಲ್ಲದಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ಈ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನ ಗೆರೆಯ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೆಳೆದರೆ ಸಾಕು.

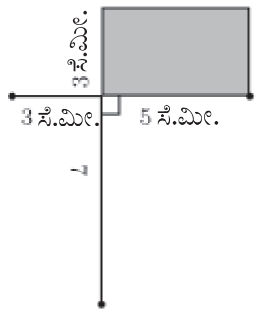


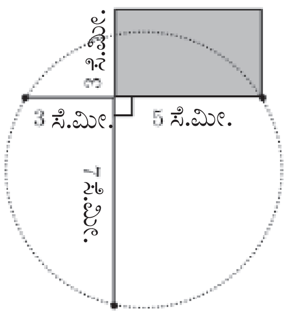
ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಓರೆಯಾದ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು ನಾವು ರಚಿಸಬೇಕಾದ ಆಯತದ ಅಗಲವಾಗಿದೆ. ಮುಂದೆ ಮೊದಲಿನ ಗೆರೆಯಿಂದ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಲಂಬ ದೂರದಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸುಲಭವೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

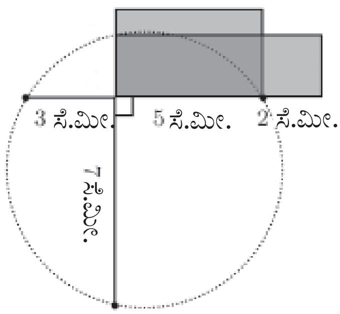


ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನೂ ಮಂಡಿಸಬಹುದು.





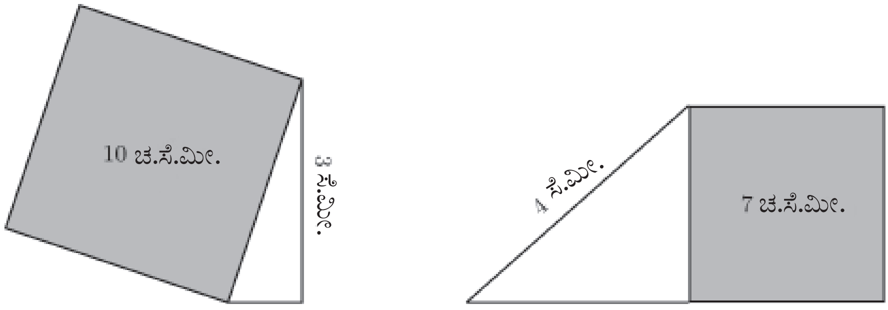




ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಿದ ನಂತರ, ಮೊದಲಿನ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಳೆಯದೆಯೇ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಸಿ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನೆಳೆಯಲು ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ವಿಭಿನ್ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವ ಆಯತಗಳನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ವಿತರಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು 2 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರೋ 3 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರೋ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಗುಂಪು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕು.

ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾವು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ತತ್ವದ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿ, ಆಯತದ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

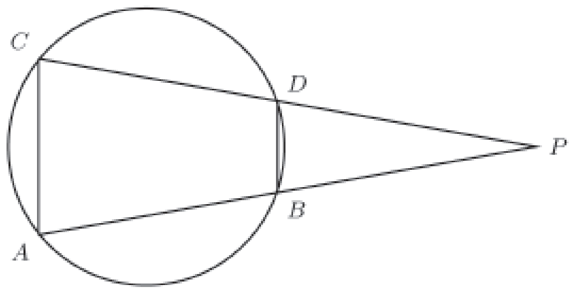
ಇದರಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲದ ಚೌಕಗಳನ್ನು, ಪೈಥಗೋರಸ್‌ನ ತತ್ವದ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿ ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.



(7ನೇ ತರಗತಿಯ **ಚೌಕವೂ ಮಟ್ಟವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠ)

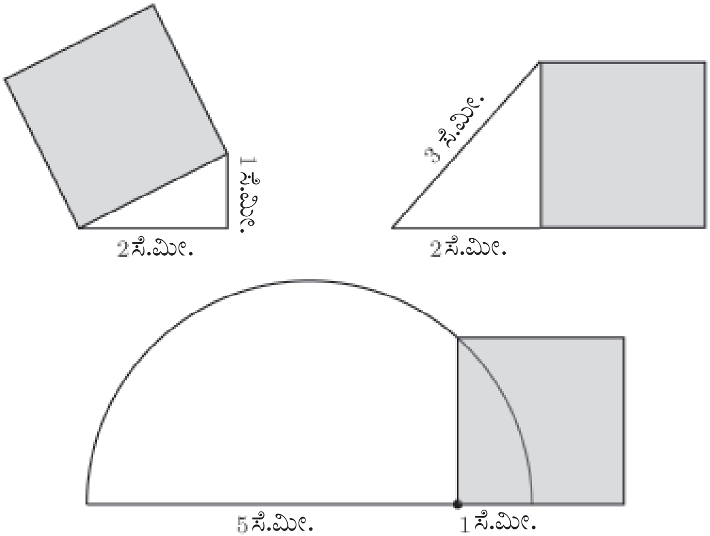
ಆದರೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೋ ಆಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ 6) ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿರುವ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ವೃತ್ತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಈಗಿನ ರೀತಿಯನ್ನು ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಳೆಯದೆಯೇ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. ಮೊದಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಒಂದು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, $PB = PD$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಂಡ $PA \times PB = PC \times PD$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧದಿಂದ $PA = PC$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ PAC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಆದುದರಿಂದ $ABCD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದ A ಮತ್ತು C ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದೂ ಕಂಡು ಬರುವುದು.



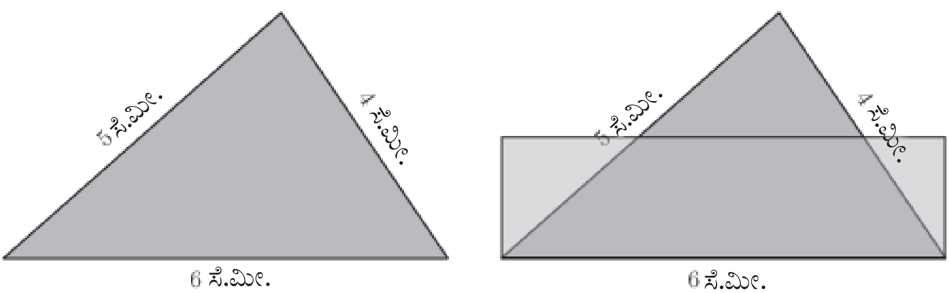
$ABDC$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, C ಮತ್ತು B ಯ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಸಮಾನಂತರವಾಗಿವೆ. ಹಾಗೆ AC ಮತ್ತು BD ಯೂ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಆಗ $ABDC$ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ $AB = PA - PB = PC - PD = CD$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವವೆಂದೂ ತಿಳಿಯುವುದು.

ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚೌಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು:

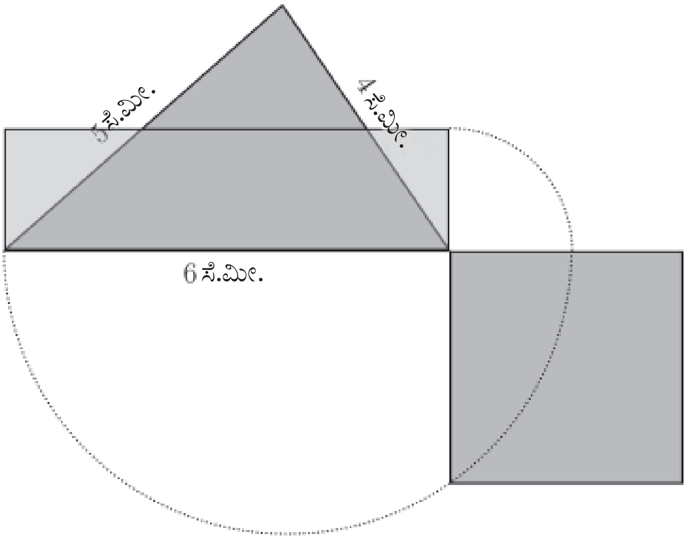


ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಿದ ನಂತರ ಆಯತದಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು 4, 5, 6 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್‌ಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವರು. ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಪಾದವನ್ನು ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಅರ್ಧವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು.



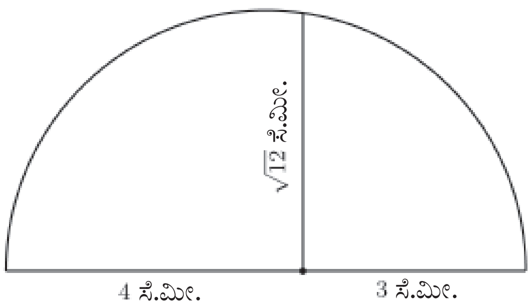
ಇನ್ನು ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿರುವಂತೆಯೇ ಈ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



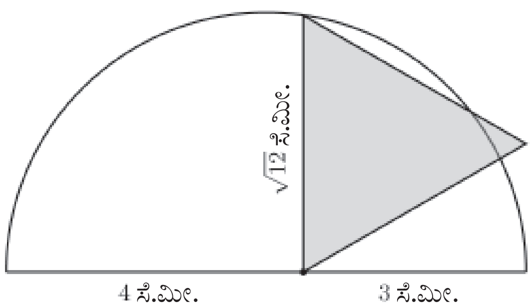
ಆರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜದ ಉದ್ದವು

$$3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

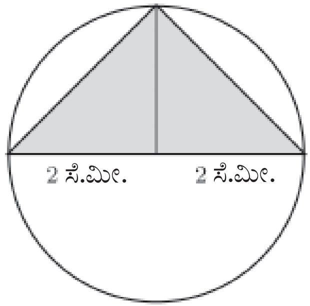
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನು ಈ ಉದ್ದವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದು.



ನಂತರ ಈ ಉದ್ದ ಭುಜವಾಗುವಂತೆ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಏಳನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಕರ್ಣವು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾದ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯ ರಚಿಸುವುದು ಸುಲಭದ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.



ಎಂಟನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, XYZ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ Y ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು 60^0 ಎಂದೂ $XYZQ$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವೂ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ Q ದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು $180^o - 60^o = 120^o$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

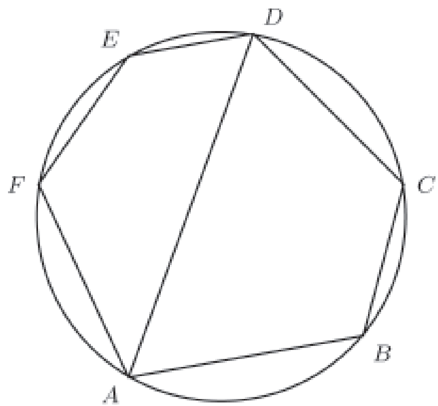
ಮೊದಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AC ಎಂಬ ಕರ್ಣವನ್ನೆಳೆದರೆ, $\angle ACB = 45^o$ ಎಂದೂ $ACBQ$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ P ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು $180^o - 45^o = 135^o$ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಸಂಶೋಧನೆ

ಶಿರಗಳೆಲ್ಲಾ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಆಗಿದೆ ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನು ಇತರ ಬಹುಭುಜಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಈ ಸಂಶೋಧನೆಯ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ತತ್ವವನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣಗೊಳಿಸಿ ಒಂದು ಹಂತದವರೆಗೆ ತಲುಪಿಸಿ ಆ ಮೂಲಕ ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಏಕೀಕರಿಸಲಿರುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ಗಣಿತ ಸಂಶೋಧನೆಯ ಒಂದು ಪ್ರಧಾನ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಚಕ್ರೀಯ ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ:

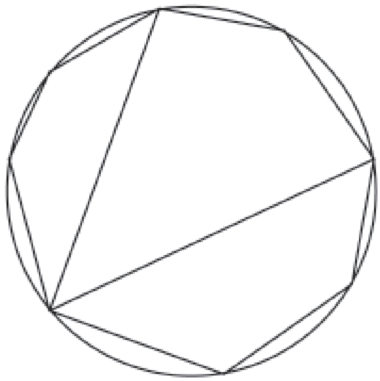
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜ, .. ಯಲ್ಲಿರುವ ಬಲಭಾಗದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಕೋನ A ಯು



ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ C ಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ. $ADEF$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿ ರುವುದರಿಂದ A ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಡಭಾಗದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಕೋನ E ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಈ ಆರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಷಡ್ಭುಜದ A, C, E ಎಂಬ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360^0 ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಷಡ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 720^0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ B, D, F ಎಂಬೀ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೂ 360^0 ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಅಂದರೆ ಚಕ್ರೀಯ ಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಇರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0 ಆಗಿದೆ.

ಅನಂತರ, ಚಕ್ರೀಯ ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ಮೂರು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯವುದು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಪರಿಪೂರಕವಾದ ಜತೆಗಳನ್ನು ಮಗುವು, ಒಂದು ಎಡೆ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು



$3 \times 180^o = 540^o$ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿದು, $2n$ ಭುಜಗಳಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಬಹು ಭುಜವನ್ನು $n-1$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದೆಂದೂ ಹಾಗೆ ಬಹುಭುಜದಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n-1)180^o$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವೊಂದನ್ನು ರೂಪೀಕರಿಸಬಹುದು.

3 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಗಣಿತ

ಮುನ್ನುಡಿ

ಯಾವುದನ್ನೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದೂ, ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದೂ ಗಣಿತದ ಮೂಲ ಧರ್ಮವಾಗಿದೆ. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ ಗಣಿತ ಪರವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯು ಸಾಧ್ಯತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತವಾಗಿದೆ. (Probability theory). *ಇದರ ಕೆಲವು ಮೂಲತತ್ವಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು ಮಾತ್ರ ಈ ಪಾಠದ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.*

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಆಟಗಳಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತಗಳು ಯಾವೆಲ್ಲಾ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು ಎಂಬುದರ ಕುರಿತು ೧೬ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಡಿನೋ ಬರೆದಿರುವ ಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು ನಡುವೆ ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿರುವ ಜೂಜಾಟದಲ್ಲಿ ಪಣಕ್ಕಿಟ್ಟಿರುವ ಹಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬುದರ ಕುರಿತು 17ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಹೆರ್ಮಾನೂ ಫಾಸ್ಕಲನೂ ನಡೆಸಿರುವ ಕಲಿಕೆಯು ಸಾಧ್ಯತಾಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿದೆ. ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನ ಅನುಭವಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಿರುವುದು, 17ನೇ ಶತಮಾನದ ಜೇಕಬ್ ಬೆರ್ನಾಲಿ ಎಂಬವನಾಗಿದ್ದಾನೆ. ನಂತರ ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. 20ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕೊಳಮಗ್ರೋವ್ ಮೂಲಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಗಣಿತಪರವಾದ ಸಾಧ್ಯತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಮಂಡಿಸಿದನು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಗಣಿತ)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಂಬ ಆಶಯ • ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಪರವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು	• ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಮೂಲಕ ಮಾತ್ರ ಹೇಳಬಹುದಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. • 'ಅನುಕೂಲಕರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಸಾಧ್ಯತೆ' ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಆಟಗಳಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ವಿಸ್ತೀರ್ಣದೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧವೇರ್ಪಡಿಸಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ವಿವರಿಸುವರು.
• ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸುವುದು • ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ಎಣಿಕಾ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು	• ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶದ ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಸಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವರು.
• ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಿರುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು	• ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು.	• ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಪರವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದರ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವರು.

ಆಶಯ ವಿಕಾಸ

ಈ ಪಾಠಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಂದು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಹೇಳುವ ಆಶಯವನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿಕೊಂಡು ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಮೂಲತ ಸೂಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಹಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವುದು. ಅದರ ಒಂದು ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು.

ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿರಬಹುದಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಚಾರದ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಗಣಿತ ಪರವಾಗಿ ಚಿಂತಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸುವುದು. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಒಟ್ಟು ಇರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯಾಗಿ ನಿರ್ವಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಆಗ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಅನುಕೂಲಕರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು. ಅವುಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಿ ತೆಗೆಯಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಸರಳವಾಗಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಇರುವಾಗ ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಎಣಿಸದೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಿರುವ ಕೆಲವು ರೀತಿಗಳನ್ನೂ ನಾಲ್ಕನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹನ್ನೊಂದನೇ ತರಗತಿ Permutations and Combinations ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಲಿಯುವ Discrete Mathematics ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ವಿವರಿಸಿರುವ ಎಣಿಕಾ ತಂತ್ರಗಳ (Counting techniques) ಪ್ರಾರಂಭವೂ ಇದಾಗಿದೆ.

ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಗಣಿತಪರವಾದ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಕೊಳ್ಳಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಈ ಪಾಠದ ಪ್ರಧಾನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯಾಗಿರುವುದೆಂಬ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಇತರ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು. ಇದು ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಪೂರ್ವ ನಿರ್ವಚನ (a priori definition) ಎಂದು ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ತದ್ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕವೋ, ಹಿಂದಿನ ಅನುಭವಗಳನ್ನೂ ಆಧಾರವಾಗಿರಿಸಿಯೋ ಇರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ನಿರ್ವಚನಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಕಾಲೀನ ನಿರ್ವಚನ (a posteriori definition) ಎಂದು ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ. ಇದರ ಕುರಿತು ಇರುವ ಕೆಲವು ಚರ್ಚೆಗಳನ್ನು ಪಾಠದ ಕೆಲವು ಸೈಡ್‌ಬಾಕ್ಸ್ ನಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

ಹಲವು ತರದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಕುರಿತು ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಮಾತನಾಡುತ್ತೇವೆ. ಭೌತಿಕ ಕಾರ್ಯಕಾರಣಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಸಿ ಆಕಾಶವನ್ನು ನೋಡಿ ಮಳೆ ಸುರಿಯಲು ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುವುದೇ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಓಟ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರು ಗೆಲ್ಲಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದು ಅವರ ಮೊದಲಿನ ಅನುಭವಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದಲ್ಲ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೋಲಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

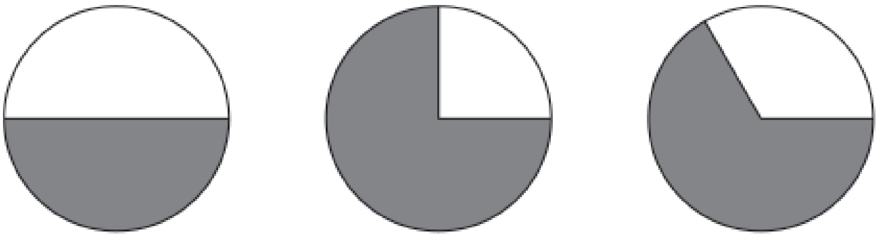
ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತುಗಳೂ 5 ಬಿಳಿ ಮುತ್ತುಗಳೂ ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ 6 ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತುಗಳೂ 4 ಬಿಳಿ ಮುತ್ತುಗಳೂ ಇರುವುದಾದರೆ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ತೆಗೆದಾಗ ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತು ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು, ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಆದರೆ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 6 ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತುಗಳೂ 5 ಬಿಳಿ ಮುತ್ತುಗಳೂ ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ 5 ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತುಗಳೂ 4 ಬಿಳಿ ಮುತ್ತುಗಳೂ ಇರುವುದಾದರೆ ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತು ಸಿಗುವ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುವುದು ಯಾವುದರಿಂದ ಎಂದು ಹೀಗೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಯಬೇಕು. ಒಟ್ಟು ಮುತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮುತ್ತುಗಳು ಎಷ್ಟುಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿರಿಸಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಗೆ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ತಲುಪಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ(ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಮತ್ತು ಸಣ್ಣದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.)

ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಮಾಡಲಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆಗಳನ್ನು ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಲು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ಮಾತ್ರ. ಇಂತಹ ಇಂತರ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಚರ್ಚಿಸಿದ ನಂತರ ಹೋಲಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಾಗಿ ನಿರ್ವಚಿಸಬಹುದು.

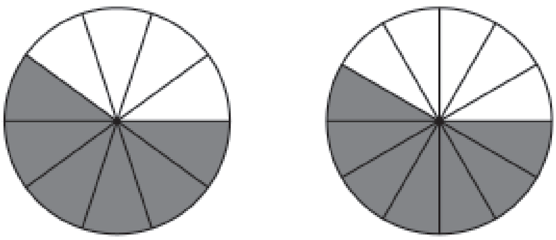
ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲೂ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಎಷ್ಟೆಂದೂ ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆಯೆಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 90 ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 6 ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳೂ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಾಧ್ಯತೆ

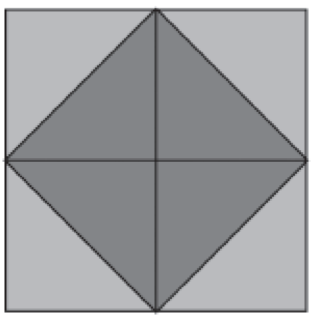
ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಗಿಂತ ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿರುವ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರ ಮಲೆ ಕಣ್ಣುಮುಚ್ಚಿ ಚುಕ್ಕಿ ಹಾಕಿದರೆ, ಅದು ಕಪ್ಪು ಭಾಗದಲ್ಲಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಎಂದು ಕೇಳಬಹುದು.



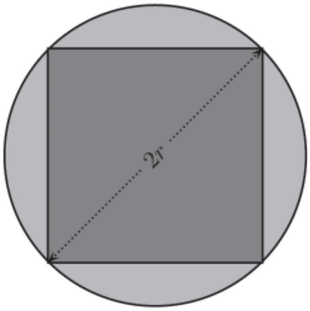
ನಂತರ ಕೆಳಗಿನಂತಹ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಬಹುದು.



ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೇಯದರಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಚಾರವಿಲ್ಲದೆ ಇಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಿಂದಲೇ ಹಸುರು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

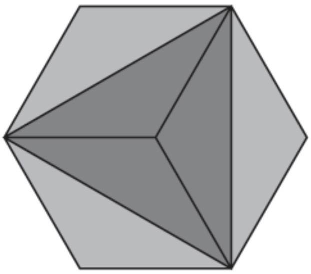


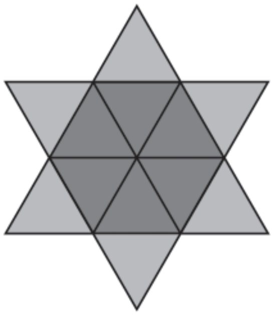
ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, πr^2 ಎಂದೂ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, $2r^2$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು (ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕರ್ಣದ ವರ್ಗದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.)



ಆಗ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{2}{\pi}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದರಂತೆ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದು ತೆಗೆದು ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು $\frac{4r^2}{\pi r^2}=\frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ನಾಲ್ಕು ಮತ್ತು ಐದನೇ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದರೆ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.





ಜೊತೆಗಳು

ಎರಡು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು. ಈ ವಿಚಾರಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ಕಂಡರೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಅಗತ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು(ಜೊತೆಗಳಾಗಿ) ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯುಂಟಾಗುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಿ ಹೇಳಬಹುದಾದ ಸರಳವಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ಜೋನಿಯ ಉಡುಪು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ, ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದನೆಯ ಆಭರಣ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಮೊದಲಿಗೆ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವ ಮೊದಲಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು.

		ಡಬ್ಬ 1			
		1	2	3	4
ಡಬ್ಬ 2	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)

ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಮಸಂಖ್ಯಾ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಮೊತ್ತವು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕೆಂದೂ, ಮೊತ್ತವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲು ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ, ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಆಗಬೇಕೆಂದು ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು. ಎಣಿಕೆ ಮಾಡದೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ತೆಗೆಯಬಹುದಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಇದು ಸಹಾಯಕವಾಗುವುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಕುರಿತು ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಅಂಕೆಗಳ ಜೊತೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಉತ್ತಮ.

		ಒಂದನೇ ಸಂಖ್ಯೆ		
		1	2	3
ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ	1	11	21	31
	2	12	22	32
	3	13	23	33

ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಮೇಲೆತ್ತುವ ಬೆರಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1,2,3,4,5, ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಒಟ್ಟು $5 \times 5 = 25$ ಜೊತೆಗಳು.

(ii) ಮೊತ್ತವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲು ಎರಡೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಎರಡೂ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಆಗಿರಬೇಕು.

(iii) 2, 4 ಎಂಬೀ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿವೆ. ಆಗ ಎರಡೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು, $2 \times 2 = 4$ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

(iv) 1, 3, 5 ಎಂಬೀ ಮೂರು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲಿವೆ. ಆಗ ಎರಡೂ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವುದು $3 \times 3 = 9$ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

(v) ಮೊತ್ತ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು $4 + 9 = 13$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಾಗಿದೆ.

(vi) ಒಟ್ಟು 25 ಜೊತೆಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಮೊತ್ತ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿರುವ ರೀತಿಗಳು $25 - 13 = 12$ ಆಗಿದೆ.

(vii) ಮೊತ್ತವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{13}{25}$, ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{12}{25}$.

ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾಗ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಚಾರದ ಕುರಿತು ಇರುವುದಾಗಿದೆ **ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ** ಎಂಬ ಸೈಡ್ ಬಾಕ್ಸ್. ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ತುಂಬಾ ಸರಳವಾಗಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.

ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಎರಡೂ ಹೆಡ್ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಟೈಲ್ ಆಗಬಹುದು. ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೆಡ್ ಇನ್ನೊಂದು ಟೈಲ್ ಆಗಬಹುದು. ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{1}{3}$ ಆಗುವುದು. ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ತಪ್ಪಾಗುವುದು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವುದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೆಡ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಟೈಲ್ ಎಂಬುವುದೇ ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಾಗಬಹುದು. ಆಗ ವಿಭಿನ್ನ ಜೊತೆಗಳು(ಹೆಡ್,ಹೆಡ್), (ಟೈಲ್,ಟೈಲ್), (ಹೆಡ್, ಟೈಲ್), (ಟೈಲ್, ಹೆಡ್) ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{1}{4}$.

ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ಜೋಡಿಗಳು

ಇದುವರೆಗೆ ಮಾಡಿರುವಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳೆಲ್ಲದರಲ್ಲೂ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಿ ತಿಳಿಯಬಹುದಿತ್ತು. ಗುಣಾಕಾರದ ಮೂಲಕ ಜೊತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದರಂತೆ ತೆಗೆದು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಯು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಮೂಲತತ್ವವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕದ ಮೂಲಕವೇ ಕ್ರಮೇಣ ಇಂತಹ ಒಂದು ಚಿಂತನೆಗೆ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ತಲುಪಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ನೀಟ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆಯೋ ಬಾಲವೋ ಬೀಳಲು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಂಬುವುದರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆಯುವುದೂ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಇತರ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದೂ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ದಾಳ ಎಸೆಯುವ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಆರರ ವರೆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{1}{6}$ ಎಂದು ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಆದರೆಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ

ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿಯಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಆವರ್ತಿಸಿರುವ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದಾಗಿದೆ. **ಸಾಧ್ಯತೆಯೂ ಆವೃತ್ತಿಯೂ** ಎಂಬ ಸೈಡ್‌ಬಾಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿರುವುದು. ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು, ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್ ಮೂಲಕ ಸಿಗುವ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ ಸ್ಥಿತಿವಂತರ ವಿನೋದವಾಗಿರುವ ಜೂಜಾಟದಿಂದ ಆರಂಭವಾದ ಸಾಧ್ಯತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರವೇಶಿಸುವುದು.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. ಒಂದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ತರಗತಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮಗುವಿನಂತೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸಿಗುವ ಹಲವು ತರದ ಜೊತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿಟ್ಟಿರುವುದು ಉತ್ತಮ.

(i) ಒಟ್ಟು ಜೊತೆಗಳು $50 \times 40 = 2000$

(ii) ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗಿಯರಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $20 \times 25 = 500$

(iii) ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗರಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $30 \times 15 = 450$

ಇದರಿಂದ ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗಿಯರಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{1}{4}$ ಎಂದೂ ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗರಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{9}{40}$ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಒಟ್ಟು ಸಿಗುವ 2000 ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗರು ಅಥವಾ ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗಿಯರು ಆಗಿರುವುದು $500 + 450 = 950$ ಜೊತೆಗಳಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದಿರುವ $2000 - 950 = 1050$ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿಯಾಗಿರುವರೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಆಗ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಆಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{21}{40}$ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೊನೆಗೆ ಓರ್ವ ಹುಡುಗನಾದರೂ ಇರಬಹುದಾದ ಜೊತೆ ಎಂದರೆ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರುವ ಜೊತೆಯೋ, ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗರಿರುವ ಜೊತೆಯೋ ಆಗಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯ ಜೊತೆಗಳು 1050 ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಜೊತೆಗಳು 450 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು $450 + 1050 = 1500$. ಆಗ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನಾದರೂ ಆಯ್ಕೆಯಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{3}{4}$, ನಂತರ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿಯಾದರೂ ಆಯ್ಕೆಯಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಹೇಳಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ನೀಟ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮೊದಲೇ ತಯಾರಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳೆರಡೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಲು ಹೇಳಬಹುದು.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ಈ ಗೆರೆಯ ಎಡಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದನೇ ಅಂಕೆಯು ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದೂ, ಬಲಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದನೇ ಅಂಕೆಯು ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಿಂತ ಸಣ್ಣದೂ ಎಂದು ಕಾಣುವುದಲ್ಲವೆ. ನಂತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡುವ

(1) ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $10 \times 9 = 90$.

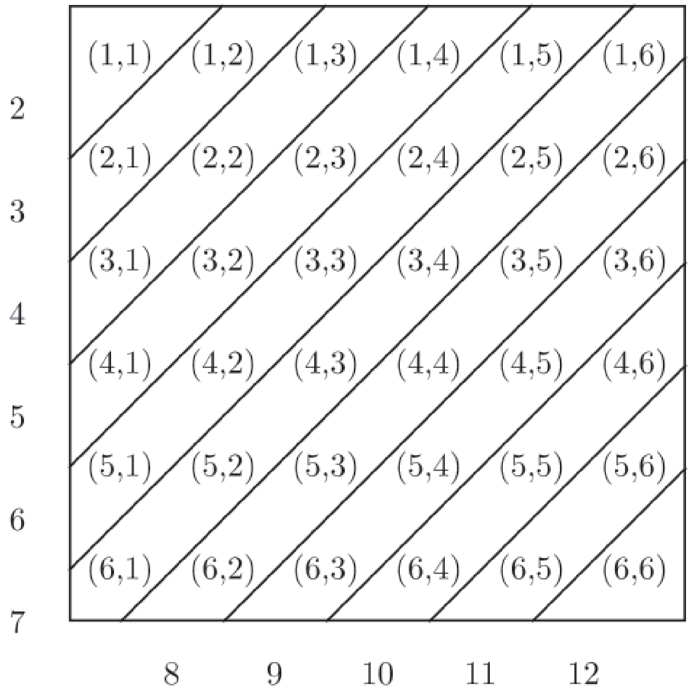
(2) ಎರಡಂಕೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವವುಗಳು 9.

(3) ಮೊದಲನೇ ಅಂಕೆಯು ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವವುಗಳು $1 + 2 + ... + 9 = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 = 45$.

(4) ಮೊದಲನೇ ಅಂಕೆಯು ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವವುಗಳು $1 + 2 + ... + 8 = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 = 36$.

ಇನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು, ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಸಿಗಬಹುದಾದ ಮೊತ್ತಗಳು 2ರಿಂದ 12ರ ತನಕ ಆಗಿರಬಹುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೊತ್ತವೂ ಸಿಗುವ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡ–ನೀಟ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಸಮಾನ ಮೊತ್ತ ಬರುವ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬೇರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.



ಇದರಿಂದ ಮೊತ್ತವು 7 ಆಗಿರುವ ಜೊತೆಗಳು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದೂ, ಆದುದರಿಂದ ಈ ಮೊತ್ತ ಸಿಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೊತ್ತವೂ ಸಿಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

4 ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

ಮುನ್ನುಡಿ

ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನೂ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳಾಗಿಸಿ, ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಬೀಜ ಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿಸಿ ಈ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಎಂಟು ಮತ್ತು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿದಿರುವರು. ಒಂದು ಅಳತೆಯ ಕುರಿತಾದ ಒಂದು ಮಾಹಿತಿ ಮಾತ್ರ ತಿಳಿದಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಎರಡು ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಅಜ್ಞಾತ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರವಿರುವ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನೂ ಎರಡು ಅಜ್ಞಾತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಕಲಿತಿರುವುದು.

ಆದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಗೂ ಇತರ ವಿಚಾರಗಳಿಗೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುವಾಗ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಎರಡನೇ ಘಾತದಲ್ಲಾಗುವುವು. ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿ ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳ ವಿಶದೀಕರಣವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಳತೆಗಳ ಎರಡನೇ ಘಾತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಿ.ಸಿ. ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಬೆಬಿಲೋನಿಯದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವರು. ಜ್ಯಾಮತಿಯೀ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಈ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದರು. ಎ.ಡಿ. ಐದನೇ ಶತಮಾನದಿಂದ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೂ, ಎಂಟನೇ ಶತಮಾನದಿಂದ ಅರಬ್ ನಾಡಿನ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಈ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ವಿಕಾಸಗೊಳಿಸಿದರು. ನವೋತ್ಥಾನ ಕಾಲದ ಯುರೋಪಿನಲ್ಲಿ ಇಂತಹಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದುವು. ನಂತರ ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು, ಅನೇಕ ಅಜ್ಞಾತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಗುಂಪುಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಂದ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು. • ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರ. • ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು ಲಭಿಸುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು. • $p(x)$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ $p(x)=0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು	• ವಿವಿಧ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಚೌಕಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ದಪ್ಪ ಕಾಗದದಿಂದ ಚೌಕ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಅದರ ಒಳಹಿಡಿವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವುದು ಎಂಬ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿರುವ ಪುಷ್ಟೀಕರಣ. • ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ತಿಳಿದಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ಚೌಕವಾಗಿಸಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು ಸಿಗುವ ಸಂದರ್ಭಗಳು. • ಒಂದೇ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗ, ವೇಗದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ, ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಚರಿಸಿದ ಸಮಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾಗಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. • ವರ್ಗ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. • ಕೆಲವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು. • ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರವು ಭೌತಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರವೂ ಆಗುವ ಮತ್ತು ಆಗದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
	• ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು. • ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಪರಿಹಾರ ಲಭಿಸದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು • ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿದೆಯಾದರೂ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು. • ವಿವಿಧ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗಿರುವ ಪರಿಹಾರ	

ಆಶಯವಿಕಾಸ

ಈ ಪಾಠದ ಆಶಯಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿಸಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅಥವಾ ಅದರಿಂದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ದೊರಕಿದುದರ ವರ್ಗದಿಂದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೀಜ ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ , $(x + a)^2 = b$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರ ಕಾಣುವ ವಿಧಾನ.

ಒಂದು ಅಳತೆಯ ವರ್ಗದೊಂದಿಗೆ ಅಳತೆಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಪವರ್ತ್ಯವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅಥವಾ ವರ್ಗದಿಂದ ಅಳತೆಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಪರ್ತ್ಯವನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದರಿಂದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ, $x^2 + ax = b$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳು

ಅಳತೆಗಳ ಎರಡನೇ ಘಾತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿ ಬರಬಹುದು. ಇಂತಹಾ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಎರಡು ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಮಾತ್ರ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಿಹಾರವಾಗುವುದು. ಅಂತಹಾ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ಸಿಗಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ವರ್ಗ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಅಳತೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **'ಸಮವಾಕ್ಯ'**ಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಪರಿಚಯ ಹೊಂದಿರುವರು. ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸರಳವಾದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇದರಂತೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂತಹಾ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ. ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಿಂದ ಚೌಕದ ಭುಜವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ನೀಡಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನಾಗಲಿ (ಅದರಂತಿರುವ ಇತರ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನಾಗಲಿ) ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿದರೆ ಉತ್ತಮ. (ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಅದರ ಬಳಿಕ ಮಾಡಬಹುದು)

ಈ ಮೂರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಮೈದಾನ ಮತ್ತು ದಾರಿ ಸೇರಿದ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿ $\sqrt{1225} = 35$ ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ ಮೈದಾನದ ಒಂದು ಬದಿ 35–4=31 ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು (ಅಗತ್ಯವಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನೂ ಎಳೆಯಬಹುದು)

ಇದರಂತೆ ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಾದದ ವರ್ಗವು 2500 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪಾದದ ಅಂಚು 50 ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯು, ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ 50 ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಬದಲಾಗುವುದು. ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಕುರಿತಾದ ಪಾಠವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ ಅದು 17ನೇ ಪದವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕವನ್ನೂ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಿಂತಲೂ ಎರಡನೆಯದಾಗಿ ಹೇಳಿದ ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೀತಿಯು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಇಷ್ಟವಾಗಬಹುದು. ಇದರ ನಂತರ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗಿರುವ ನಾಲ್ಕನೆ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಮಾಡಲು ಕಷ್ಟ. ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುವುದು.

$$2000\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 2205$$

ಇದರಿಂದ

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{2205}{2000} = \frac{441}{400}$$

ಎಂದೂ, ನಂತರ

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{\sqrt{441}}{\sqrt{400}} = \frac{21}{20}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನು $x = 5$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಲ್ಲೂ ಋಣ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಲಿಲ್ಲ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಕಾರಣಗಳಿವೆ. ಒಂದನೆಯದಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡುವ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಋಣವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಮವಾಕ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಗಣಿತ ಪರವಾದ ಒಂದು ಉತ್ತರವಾಗಿದ್ದರೂ) ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾದ ಭೌತಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರವಲ್ಲ. ಎರಡನೆಯದಾಗಿ ಋಣವರ್ಗಮೂಲ ಎಂಬ ಆಶಯವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಮಕ್ಕಳು ನೆನಪಿಸುವಂಥದಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಉತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ಅದು ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸೂಕ್ತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿರಸ್ಕರಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕೃತ್ರಿಮವೆಂದು ತೋರಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಋಣವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಒಂದು ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅದನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವುದು

ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ $(x+a)^2 = b$ ಅಥವಾ $(x-a)^2 = b$ ಎಂದಾದರೆ, ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಯಿತು. ಇನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೂಪವು $x^2 + ax = b$ ಅಥವಾ $x^2 - ax = b$ ಎಂದು ಆಗುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುವುದು. ಇಂತಹಾ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ x ನ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಬೀಜ ಗಣಿತ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ವರ್ಗವಾಗಿಸುವುದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಈ ಚಿಂತನೆಯ ಕಡೆಗೆ ಮುನ್ನಡೆಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಬೇಕು. ಅದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಓದಿ, $x^2 + 2ax + a^2$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜ ಗಣಿತ ವಾಚಕಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ವರ್ಗವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಮನದಟ್ಟುಪಡಿಸಬೇಕು. ಈ ಭಾಗದ ಮೊದಲ ವಾಕ್ಯವು ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ವೇದಿಕೆಯನ್ನೊದಗಿಸುತ್ತದೆ. ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೂಪವು

$$x^2 + 2x + 1 = 100 \text{ ಆದರೆ } x \text{ ಎಷ್ಟು?}$$

ಎಂದು ಬರೆದ ನಂತರ, x ನ್ನೂ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $(x+1)^2$ ಗಿದೆಯೆಂದು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಯಾರಾದರೂ ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭವಾಗುವುದು. ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗಿಂತ ಈ ಲೆಕ್ಕವು ಹೇಗೆ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಬೇಕು. ಅವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೂಪವು $(x + \text{ಸಂಖ್ಯೆ})^2$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಆಗಿತ್ತು ಎಂದೂ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದೂ ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ, ನಂತರ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಬರುವುದು. ಎಂದರೆ,

$x^2 + 2x + 1$ ಎಂಬುವುದನ್ನು $(x + \text{ಸಂಖ್ಯೆ})^2$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

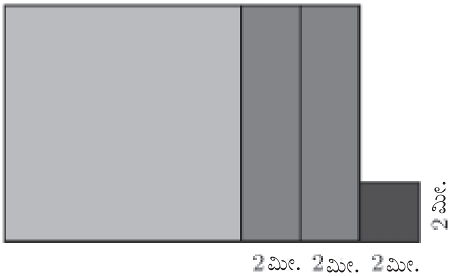
ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗದ ಕುರಿತು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಸರ್ವ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬಹುದು.

ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ದಾಟುವ ಮೊದಲು ಇದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಿಸಿ ಕೇಳಬಹುದು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕದೊಂದಿಗೆ ಅಷ್ಟೇ ಎತ್ತರವಿರುವ ಎರಡು ಆಯತಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಚೌಕವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 100 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.



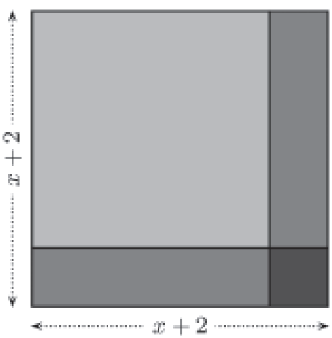
ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಹೀಗಾಗುವುದು.

$x^2 + 4x + 4 = 100$ ಆದರೆ x ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$(x + 2)^2 = 100$ ಆದರೆ x ಎಷ್ಟು?



ಇದರಿಂದ $x = 8$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗೆ ನೀಡಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $x, x+2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುವುದು.

$$x^2 + 2x + 1 = 289$$

ಇದರಂತೆ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, 6ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು $x, x + 6$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದೆಂದು ಮೊದಲು ಮನಗಾಣಬೇಕು. (ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುವುದನ್ನು 2ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಲ್ಲವೆ) ನಂತರ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x^2 + 6x + 9 = 729$$

ಇದರ ಎಡಬದಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವನ್ನು $(x + 3)^2$ ಎಂದು ಬರೆದು $x = 24$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ 9, 11, 13, ... ಎಂದು ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ n-ನೇ ಪದವು $2n + 7$ ಎಂದೂ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $n(n + 1) + 7n = n^2 + 8n$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು.

$$n^2 + 8n + 16 = 256$$

ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಬೀಜ ಗಣಿತ ವಾಕ್ಯವನ್ನು $(x + 4)^2$ ಎಂದಾಗಿಸಿ, $x = 12$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಮುಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಹೋಗಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $x^2 + 2x$ ನೊಂದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ ಆಗುವುದೆಂದು ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬೇಕು. ಹೊರತು x ನ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಆಶಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದ ನಂತರವಲ್ಲ. ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಅನುಭವಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ತತ್ವವನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗಿರುವ ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇದರ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರವನ್ನೂ xಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪಾದ $x + 2$ ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ, ಆಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}x(x + 2)$ ರ ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವುದು.

$$\frac{1}{2}x(x + 2) = 12$$

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಲ್ಲವೆ

$$\begin{aligned} x(x + 2) &= 24 \\ x^2 + 2x &= 24 \\ x^2 + 2x + 1 &= 25 \\ (x + 1)^2 &= 25 \\ x + 1 &= 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗಿರುವ 6ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. 5,7,9,.. ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ n-ನೇ ಪದ $2n + 3$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $n(n + 1) + 3n = n^2 + 4n$ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುವುದು.

$$n^2 + 4n = 140$$

$(n+2)^2 = n^2+4n+4$ ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಂಡು, ಸಮವಾಕ್ಯದ ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೂ 4ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$(n + 2)^2 = 144$$

ಎಂದೂ ನಂತರ $n = 10$ ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ವರ್ಗ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕೆಂಬುವುದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರನೇ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $x^2 + 2x = 224$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೂ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಎಡಭಾಗದ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವರ್ಗಗಳಾಗುವುವು, ಇದರಂತೆ ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $x^2 + 20x = 224$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲೂ ಎರಡು ಬದಿಗೂ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಬಲಬದಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಎಡಬದಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವನ್ನು ವರ್ಗವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೋಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುವುದನ್ನೂ ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿಯಬೇಕು. $x^2 + 2ax$ ನ್ನು ವರ್ಗರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಲು a^2 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಆಶಯದೆಡೆಗೆ ಹೋಗುವುದರ ಪ್ರಾರಂಭದ ಹೆಜ್ಜೆ ಇದಾಗಿದೆ. ಇದರಂತಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಬೇಕಾಗಿದೆ.

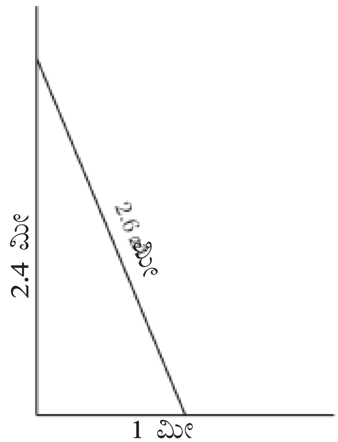
ನಂತರ ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ $x^2 - 2ax = b$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿವೆ. ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ಎಂಬ ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅನೇಕ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ ಎಂಬ ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಲು ಕಷ್ಟವಾಗಲಾರದು.

ನಂತರದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $2ax - x^2 = b$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಮೊದಲು $x^2 - 2ax = -b$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು ಎಂದು ವಿವರಿಸಬೇಕು.

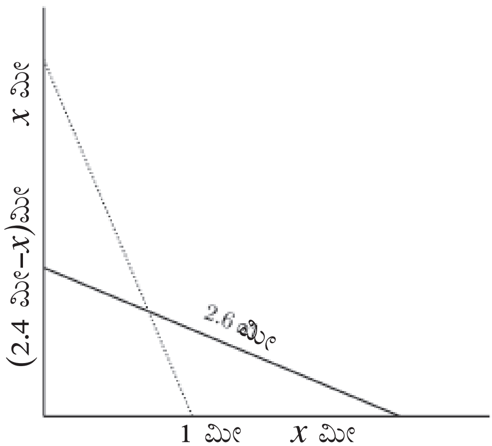
ಇನ್ನು ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ, ನಾಲ್ಕನೇ, ಏಳನೇ ಮತ್ತು ಎಂಟನೇ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ (ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೆ) ಇಂತಹಾ ಎಲ್ಲ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಾಗಿಸಿ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ತ್ರಾಸದಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಬಹಳ ಸಾವಧಾನವಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮೊದಲಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋಲಿನ ಮೇಲಿನ ತುದಿಗೆ ಗೋಡೆಯ ಬುಡದಿಂದ ಇರುವ ಎತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

$$\sqrt{2.6^2 - 1^2} = \sqrt{3.6 \times 1.6} = \sqrt{36 \times 16 \times 0.01} = 6 \times 4 \times 0.1 = 2.4 \text{ ಮೀಟರ್}$$



ಇನ್ನು ಕೋಲಿನ ಕೆಳಗಿನ ತುದಿಯ ಅಡ್ಡಕ್ಕೂ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯ ನೀಟಕ್ಕೂ ದೂಡಲ್ಪಟ್ಟ ದೂರವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಹೀಗಾಗುವುದು.



ಆಗ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುವುದು

$$(1 + x)^2 + (2.4 - x)^2 = 2.6^2$$

ಎರಡು ವರ್ಗಗಳನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದು ಮೊದಲ ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಲಭಿಸಿದ $(1 + 2.4)^2 = 2.6^2$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸರಳಗೊಳಿಸಿದರೆ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಹೀಗಾಗುವುದು.

$$2x^2 - 2.8x = 0$$

ಇದನ್ನು $2x^2 = 2.8x$ ಎಂದು ಬರೆದು ಎರಡೂ ಬದಿಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$x^2 = 1.4x$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದರೂ 1.4ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೂ ಉತ್ತರವು ಸಮಾನ ಎಂದು ಇದರ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದೆಂದು ಚರ್ಚಿಸಬೇಕು. ಯಾರೂ ಉತ್ತರ ಹೇಳದಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸರಳವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಕೇಳಬಹುದು.

> ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದರೂ 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೂ ಒಂದೇ ಉತ್ತರ ಸಿಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಹೀಗೆ ಕೋಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $x = 1.4$ ಎಂಬ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ತಲುಪಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹಾ ಎಲ್ಲ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಸೊನ್ನೆಯೂ ಒಂದು ಉತ್ತರವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಯೂ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $x = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಕೋಲು ದೂಡಲ್ಪಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲಿದ್ದ ಸ್ಥಿತಿ ಸಿಗುವುದು; $x = 1.4$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ದೂಡಲ್ಪಟ್ಟ ನಂತರದ ಸ್ಥಿತಿ ಎಂದರ್ಥ.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆದುದಲ್ಲ ಎಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಇದರ ಹಾಗಿರುವ ಇತರ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನೂ ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

> ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಣ್ಣ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಭುಜವು ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಎರಡು ಮಡಿಗಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಕರ್ಣವು ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಎರಡು ಮಡಿಗಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ಅತ್ಯಂತ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x^2 + (2x - 1)^2 = (2x + 1)^2$$

ಇದರಿಂದ

$$x^2 = (2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ನಂತರ $x = 8$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು, 8,15, 17 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಏಳನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನ ಪ್ರಯಾಣದ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವನ್ನು ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ x ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಹಾಗೆ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಬೀಜ ಗಣಿತದಲ್ಲಾಗಿ ಸಬಹುದು.

ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರ	300 300 ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್
ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ	$\frac{300}{x}$
10 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ	$x + 10$ ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ.
ಈ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ	$\frac{300}{x+10}$ ಗಂಟೆ
ಸಮಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10}$ ಗಂಟೆ

ಕೊನೆಯ ಹಂತಕ್ಕೆ ತಲುಪಿದಾಗ ಯಾವುದನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕೆಂದು ಗೊಂದಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $x + 10$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ x ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಛೇದ ಮಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಾಗುವಾಗ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಚಿಕ್ಕದಾಗುವುದೆಂದೂ ನೆನಪಿಸಬಹುದು. ನಂತರ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ,

$$x^2 + 10x = 3000$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಬ್ಬರಿಗೂ 25ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ $(x + 5)^2 = 3025$ ಎಂದಾಗಿಸಿ, $x = 50$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಇದರಂತೆ ಎಂಟನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$\frac{30}{x-1} - \frac{30}{x} = 1$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿರಿ

$$x\,(x - 1) = 30$$

ಎಂದಾಗಿಸಬಹುದು. ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 30 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಿವರಿಸಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಲೇಬೇಕೆಂದು ಹಠ ಹಿಡಿದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಜಟಿಲವಾಗಿಸಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವಾಗಲೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬೇಕು. ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರ ಸಿಗುವ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ತಿಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಎರಡು ಉತ್ತರ

ಇದುವರೆಗೆ ಮಾಡಿದ ಎಲ್ಲ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಪರವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾದ ಸನ್ನಿವೇಶಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಇದುವರೆಗೆ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿಲ್ಲ. ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನೂ ಸ್ವೀಕರಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭದ ಮೂಲಕ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಈ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಪರಿಚಯ ಹೊಂದಿರುವರು. ಅದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರಿಸುತ್ತಾ ಈ ಪಾಠಭಾಗವು ಆರಂಭವಗುತ್ತದೆ. ನಂತರ ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭದ ಕುರಿತು ಚರ್ಚೆ ಆರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. 40 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿ, ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ವೇಗವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ವಸ್ತುವಿನ ಸಮಯ – ದೂರ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$s = 40t - 4t^2$$

ಇದರ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು.

(1) ಸಮಯವನ್ನೂ, ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇರುವ ದೂರವನ್ನೂ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು.

(2) ಈ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ 5 ಸೆಕೆಂಡಿನ ವರೆಗೆ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ನಂತರ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

(3) 5 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವೇಗವು 0 ಆಗುವುದೆಂದೂ ನಂತರ ಸಂಚಾರವು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಾಗುವುದೆಂದೂ ತಿಳಿಯುವುದು.

(4) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲಿರುವ ಸಮಯವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

(5) 99 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರಲು ಸಮಯ t ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದಾದರೆ $(t - 5)^2 = \frac{1}{4}$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

(6) ಇದರಿಂದ, ಈ ತನಕ ಮಾಡಿದಂತೆ $t - 5 = \frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $t = 5\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು.

(7) ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಸಮಯ $4\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗುವಾಗಲೂ ದೂರವು 99 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

(8) ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು.

ನಂತರ $t = 4\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಉತ್ತರವು ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಸಿಗದಿರಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದು ಅನ್ವೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗುವುದು. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂಬ ಎರಡು ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿವೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದರೊಂದಿಗೆ, $(t-5)^2 = \frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸತ್ಯವಾಗಲು $t - 5 = \frac{1}{2}$ ಎಂಬುದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ $t - 5 = -\left(\frac{1}{2}\right)$ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಹಾಗೆ $t = 5\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $t = 4\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು ಲಭಿಸುವವೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಇದರಂತಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡುವ.

ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 96 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಮೊದಲ ಆಯತದ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

ಮೊದಲ ಆಯತದ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

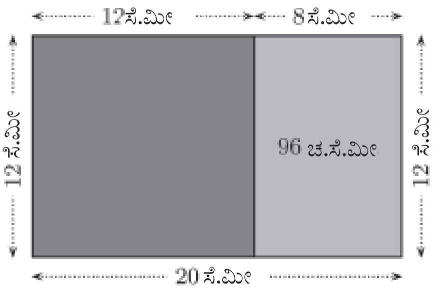
$$20x - x^2 = 96$$

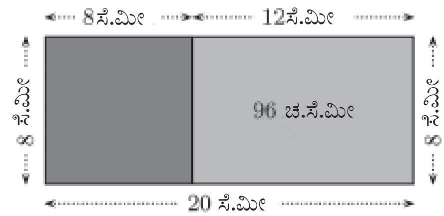
ಇದನ್ನು $x^2 - 20x = -96$ ಎಂದು ಬರೆದು ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೂ 100 ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$(x - 10)^2 = 4$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇನ್ನು $x - 10 = 2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $x = 12$ ಎಂದೂ $x - 10 = -2$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ $x = 8$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು, ಎಂದರೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದ ಪ್ರಕಾರ ಎರಡು ಆಯತಗಳಿವೆ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 20, 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತ ಮತ್ತು 20, 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಆಯತದ ಉಳಿದ ಬಾಗವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಇರಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ಆಯತದ ಉಳಿದ

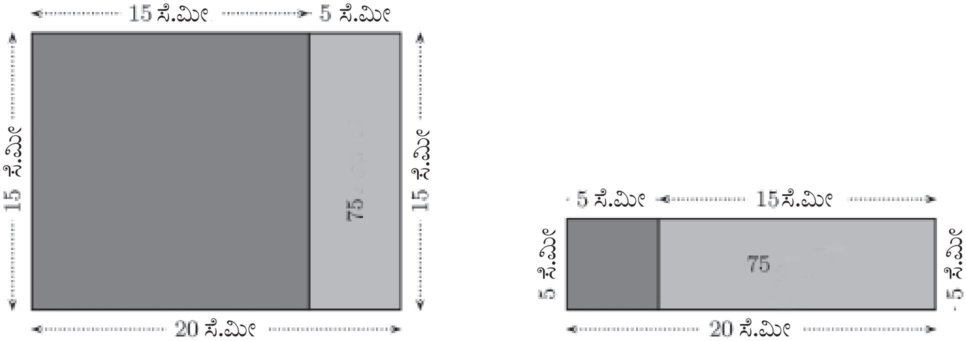




ಭಾಗವು ಸಿಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದವು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಉಳಿದ ಭಾಗ ಮತ್ತು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಅದೇ ಅಳತೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಆಯತದ ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳು ಇದರಂತೆ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

$p(x) = 20x - x^2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ x ಆಗಿ 10ರ ಎರಡೂ ಬದಿಯಿಂದಲೂ ಒಂದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವ



ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $p(x)$ ಆಗಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಯೋಜ್ಯವಾದುದನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟುಪಡಿಸಬೇಕು.

ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

> ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 1ನ್ನು ಕಳೆದುದರ ವರ್ಗ ಮತ್ತು 2 ಕಳೆದುದರ ವರ್ಗಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುವುದು.

$$(x-1)^2 = (x-2)^2$$

ಎರಡೂ ಬದಿಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದು $x - 1 = x - 2$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಮುಂದುವರಿದು, $1 = 2$ ಎಂಬ ಅಸಂಬಂಧವು ಸಿಗುವುದು. ಆದರೆ $(x-2)^2 = (2-x)^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $2 - x$ ಎಂಬುದೂ $(x-2)^2$ನ ವರ್ಗಮೂಲವೆಂದು ತಿಳಿದು,

$$x - 1 = 2 - x$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$x = 1\frac{1}{2}$$

ಎಂಬ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಸಿಗುವುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$x(x + 2) = 168$$

ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ

$$(x + 1)^2 = 169$$

ಎಂದಾಗಿಸಬಹುದು. ನಂತರ $x + 1 = 3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $x = 12$ ಎಂದೂ, $x + 1 = -13$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x = -14$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 12, 14 ಅಥವಾ −14, −12 ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳು ಸಿಗುವುವು.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ $4 - x$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು,

$$x(4 - x) = 2$$

ಇದನ್ನು $x^2 - 4x = -2$ ಎಂದು ಮಾಡಿ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ 4 ಕೂಡಿಸಿ.

$$(x - 2)^2 = 2$$

ಎಂದಾಗಿಸಬಹುದು. ಆಗ $x - 2 = \sqrt{2}$ ಅಥವಾ $x - 2 = -\sqrt{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. $x = 2 + \sqrt{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ $4 - \left(2 + \sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. $x = 2 - \sqrt{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ $4 - \left(2 - \sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಈ ಲೆಕ್ಕದ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ.

ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಯು n-ನೇ ಪದವನ್ನು $101 - 2n$ ಎಂದೂ ಮೊದಲ x ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $101n - n(n + 1)$ ಎಂದೂ ಮೊದಲು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು : $n^2 - 100n = -900$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇಬ್ಬದಿಗಳಿಗೂ 2500ನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ : $(n - 50)^2 = 1600$.

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ $n = 90$, ಅಥವಾ $n = 10$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 10 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ 90 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 900 ಆಗಿರುವುದು.

ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು ಯಾಕೆ ಎಂದು ಆಲೋಚಿಸುವ. ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 10 ಪದಗಳು,

$$99, 97, 95, 93, 91, 89, 88, 87, 85, 83, 81$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಗಿದೆ. ನಂತರದ 40 ಪದಗಳು

$$79, 77, ..., 3, 1$$

ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ. ಮುಂದಿನ 40 ಪದಗಳು

$$-1, -3, ..., -79$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಪದಗಳ ಋಣವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ 90 ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವಾಗ 11ರಿಂದ 50ನೇ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗಿನ 40 ಪದಗಳು ಮತ್ತು 51ರಿಂದ 90ನೇ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗಿನ 40 ಪದಗಳು ಸೇರಿ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ ಮೊದಲ 10 ಪದಗಳು ಮಾತ್ರ ಬಾಕಿಯಾಗುವುವು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ 11ನೇ ಪದದಿಂದ 90ನೇ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಇತರ ಕೆಲವು ಅನ್ವೇಷಣೆಗಳನ್ನೂ ಮಾಡಬಹುದು.

(1) ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ m ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾದರೆ m, n ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ಏನಾಗಿರಬಹುದು?

(2) ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ m ನಿಂದ n ವರೆಗಿರುವ ಸ್ಥಾನಗಳ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಲು m, n ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ಏನಾಗಿರಬಹುದು ?

(3) ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ (ಪದಗಳು ಕ್ರಮೇಣ ಸಣ್ಣದಾಗುವ) ಎಲ್ಲ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ನಾಲ್ಕನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಸಮವಾಕ್ಯ

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

ಎರಡು ಬದಿಗಳೂ x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಇದನ್ನು

$$x^2 - \frac{13}{6}x = -1$$

ಎಂದಾಗಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನು ಎಡಬದಿಯನ್ನು ವರ್ಗವಾಗಿಸಲು $\frac{13}{6}$ ರ ಅರ್ಧ $\frac{13}{12}$ ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕೆಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

$$\left(x - \frac{13}{12}\right)^2 = \frac{13^2}{12^2} - 1 = \frac{13^2 - 12^2}{12^2} = \frac{(13+12)(13-12)}{12^2} = \frac{25}{12^2} = \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಿಂದ $x-\frac{13}{12} = \frac{5}{12}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ ಎಂದೂ $x-\frac{13}{12} = -\frac{5}{12}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x = \frac{2}{3}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು.

(1) ಸಣ್ಣ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿಟ್ಟರೆ ಟ್ಯಾಂಕಿ ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ x ಮಿನಿಟ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

(2) ದೊಡ್ಡ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿಟ್ಟರೆ ಟ್ಯಾಂಕಿ ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $x-10$ ಮಿನಿಟ್.

(3) ಸಣ್ಣ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿಟ್ಟರೆ ಒಂದು ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಂಕಿಯ $\frac{1}{x}$ ಭಾಗವು ತುಂಬುವುದು.

(4) ದೊಡ್ಡ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿಟ್ಟರೆ ಒಂದು ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಂಕಿಯ $\frac{1}{x-10}$ ಭಾಗವು ತುಂಬುವುದು.

(5) ಎರಡೂ ಕೊಳವೆಗಳನ್ನು ತೆರೆದಿರಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಂಕಿಯ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10}$ ಭಾಗವು ತುಂಬುವುದು.

(6) ಲೆಕ್ಕದ ಮಾಹಿತಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಎರಡು ಕೊಳವೆಗಳನ್ನು ತೆರೆದಿಟ್ಟರೆ ಒಂದು ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಂಕಿಯ $\frac{1}{12}$ ಭಾಗವು ತುಂಬುವುದು.

ಇನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-10} = \frac{1}{12}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ,

$$x^2 - 34x = -120$$

ಎಂದಾಗಿಸಬಹುದು. ನಂತರ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ 289 ಕೂಡಿಸಿ

$$(x - 17)^2 = 169$$

ಎಂದಾಗಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ $x - 17 = 13$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x = 30$ ಎಂದೂ $x - 17 = -13$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x = 4$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. $x = 30$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x - 10 = 20$ ಎಂದೂ $x = 4$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x - 10 = -6$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. $x - 10$ ಎಂಬುವುದು ದೊಡ್ಡ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿರಿಸಿದರೆ ಟಾಂಕಿಯು ತುಂಬಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದೊಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಣ್ಣ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿರಿಸಿದರೆ 30 ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ ಟಾಂಕಿ ತುಂಬುವುದು.

ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೂ ಬಹುಪದಗಳೂ

ಇದುವರೆಗೆ ನಿರ್ವಹಿಸಿದ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೆಲ್ಲ $ax^2 + bx = c$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದುವು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು. ವರ್ಗಪೂರ್ತಿ ಗೊಳಿಸಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೂ ಈ ರೂಪವು ಅನುಕೂಲವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇಂದಿನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು $ax^2 + bx + c$ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದು ಇದರ ಪ್ರಯೋಜನವಾಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲೂ ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಬಹುಪದಗಳ ಸೊನ್ನೆಗಳೊಳಗಿನ (zeros of the polynomial) ಸಂಬಂಧವು ಬಹಳ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಇದುವರೆಗೆ ಮಾಡಿದುದಕ್ಕಿಂತ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲ $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರ ಬದಲು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಸೊನ್ನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಕಲ್ಪಿಸಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಕುರಿತು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೂಲಕ ಎಲ್ಲ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು ಸಿಗುವುದು.

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ವಿವರವಾಗಿ **'ಬಹುಪದಗಳು'** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

$p(x)$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ x ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(x) = 0$ ಸಿಗುವುದು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯೊಂದಿಗೆ ಈ ಭಾಗವು ಆರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಹಿಂದೆ ಚರ್ಚಿಸಿದಂತಿರುವ ಒಂದು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ವಿವರಿಸುವುದು. ನಂತರ $p(x)$ ಆಗಿ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಬದಲು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು x ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಕೂಡಾ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ

ಒಂದು ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಈ ರೀತಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಯಾವುದೇ ಎರಡೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು.

$ax^2 + bx + c = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಆಗಬೇಕು.

ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ರೀತಿ ಸುಲಭವೋ ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಸುಲಭವೋ ಎಂದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$x^2 + 14x = 72$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

$$x^2 + 14x - 72 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆದು

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + (4 \times 72)}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{-14 \pm 22}{2} = 4 \text{ ಅಥವಾ } -18$$ ಎಂದು

ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ

$$(x + 7)^2 = 72 + 49 = 121$$

ಎಂದು ಬರೆದು

$$x = -7 \pm 11 = 4 \text{ ಅಥವಾ } -18$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ

$$40t - 4t^2 = 99$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

$$4t^2 - 40t = -99$$

ಎಂದು ಬರೆದು, 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತಲೂ

$$4t^2 - 40t + 99 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆದು,

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \times 4 \times 99}}{8} = \frac{40 \pm \sqrt{4^2(100-99)}}{8} = \frac{40 \pm 4}{8} = 5 \pm \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \text{ ಅಥವಾ } 4\frac{1}{2}$$

ಎಂದು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಹರಿಸಲು ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಅಥವಾ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾದ ಸೌಕರ್ಯವಿದೆ.

ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಾಗ, ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಸಮವಾಕ್ಯ ಉಂಟಾದ ಭೌತಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಅರ್ಥ ಎಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಕಲಿತವರು ಇಂತಹಾ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಾಗಿದೆ (complex numbers) ಎಂಬ ಅಸಂಬಂಧ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಕೆಲವು ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಇಂತಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಯಥಾರ್ಥ ಚರಿತ್ರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿದೆ. ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೀತಿಯನ್ನು 16ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಆದರೆ ಇಂತಹ ಕೆಲವು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿದ್ದರೂ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುವುದು. ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸವನ್ನು ಸಮನ್ವಯಗೊಳಿಸಲು ಇಟಲಿಯ ಬೋಂಬೆಲ್ಲಿ ಎಂಬವನು ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಮೊತ್ತ ಮೊದಲಾಗಿ ಮಂಡಿಸಿದನು. (ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ ವಿಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿಹರಿಸಿರುವುದನ್ನೆಲ್ಲ ಸಮನ್ವಯಗೊಳಿಸಲು 7ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಭಾರತದ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದನು) ಉತ್ತಮ ಚಿಂತಕರು ಅವರ ಚಿಂತನೆಯನ್ನು ನಡೆಸುವುದು ಯಥಾರ್ಥ ಗುರಿಸಾಧನೆಯ ಆಧಾರದಿಂದಾಗಿದೆ.

ಹಿಂದಿನ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ವಿವೇಚಕಗಳ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ ಎಂಬವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಹನ್ನೊಂದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಲಿರುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಪಂಚಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ, ಕೋನಗಳು $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು $2 : \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}+1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆಯೆಂದೂ

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಈ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು **'ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ'** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಈ ಪಾಠದ ಕೊನೆಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಸ್ವ ಇಚ್ಛೆಯಂತೆ ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಅಥವಾ ನೇರವಾಗಿ ಉತ್ತರ ಬರೆದು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಒಂದನೇ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜ x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುವುದು.

$$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$$

ಇದನ್ನು ಲಘೂಕರಿಸಿ ಹೀಗಾಗಿಸಬಹುದು.

$$2x^2 - 42x = 15^2 - 21^2 = (15 + 21)(15 - 21) = -36 \times 6$$

ಎರಡೂ ಬದಿಯನ್ನು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಇದು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆಗುವುದು.

$$x^2 - 21x = -36 \times 3 = -108$$

x ನ ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಣಕವು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಲು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು. ಆದುದರಿಂದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು,

$$x^2 - 21x + 108 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆದು, ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರ ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭ.

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 431}}{2} = \frac{21 + 3}{2} = 12 \text{ ಅಥವಾ } 9$$

ನಂತರ ಆಯತದ ಭುಜಗಳು 12 ಮೀಟರ್, 9 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$\frac{1}{2} n (n + 1) = 300$$

ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಇದನ್ನು

$$n^2 + n - 600 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆದು

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{2} = \frac{-1 \pm 49}{2} = 24 \text{ ಅಥವಾ } -25$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ n ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $n = 25$ ಎಂಬ ಉತ್ತರ ಮಾತ್ರ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದ್ದು ಸ್ವೀಕಾರವಾಗಿದೆ.

ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಸಮವಾಕ್ಯ

$$x = \frac{1}{x} = 1\frac{1}{2}$$

ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬದಲಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = 2 \text{ ಅಥವಾ } -\frac{1}{2}$$

ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೇಳಿರುವುದರಿಂದ $x = 2$ ಮಾತ್ರ ಉತ್ತರವಾಗಿದೆ. ನಾಲ್ಕನೇ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು,

x ಆಗಿ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾಗ $x + \frac{1}{x} = 1\frac{1}{2}$ ಆಗುವುದೇ.

ಎಂದಾಗಿದೆ ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$2x^2 - 3x + 2 = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿದೆಯೇ?

x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾದರೆ,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{4}$$

ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲ ಬರುವುದರಿಂದ, ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ. (ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರೆ ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಉದ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿದೆ) ಹನ್ನೊಂದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಅಂಗೀಕರಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ $\frac{1}{4}(3 + \sqrt{7}i)$, $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{7}i)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $x + \frac{1}{x}$ ಎಂಬ ಬೀಜ ಗಣಿತ ವಾಚಕದಲ್ಲಿ x ಗೆ ಬದಲು ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾಗ, ಯಾವೆಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದೆಂದು ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಈ ವಾಚಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{(x-1)^2 + 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 2$$

$$x+\frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{(x+1)^2-2x}{x} = \frac{(x+1)^2}{x}-2$$

ಇದರಲ್ಲಿ x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ $\frac{(x-1)^2}{x}$ ಎಂಬುದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ $x+\frac{1}{x}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಇನ್ನು x ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದ $\frac{(x+1)^2}{x}$ ಎಂಬುದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು. ಆಗ $x+\frac{1}{x}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ -2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು -2 ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಎಂದರೆ, x ಆಗಿ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x+\frac{1}{x}$ ಆಗಿ 2ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ x ಆಗಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ . $x+\frac{1}{x}$ ಆಗಿ -2 ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಿಗುವುವು. ಹಾಗಾದರೆ -2 ಮತ್ತು 2ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು $x+\frac{1}{x}$ ಆಗಿ ಸಿಗಲಾರದು.

ಐದನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ತಪ್ಪಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಚಾರವಾಗಿದೆ. ತಪ್ಪಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಳತೆ 24 ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 10 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜ 2, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 20 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 20 ಆಗಿದೆ. ಸುತ್ತಳತೆ 42 ಆಗಿದೆ. ಈಗ ಸರಿಯಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ :

$$x(21-x) = 20$$

ಇದನ್ನು

$$x^2 - 21x + 20 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆದು

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441-80}}{2} = \frac{21 \pm 19}{2} = 20 \text{ ಅಥವಾ } 1$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ನಂತರ ಸರಿಯಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 20, 1 ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಕೊನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ತಪ್ಪಾಗಿ ಬರೆದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$ax^2 + bx + 24 = 0$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. 4 ಮತ್ತು 6 ಇದರ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಎಂದರೆ,

$$16a + 4b + 24 = 0$$

$$36a + 6b + 24 = 0$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ

$$4a + b + 6 = 0$$

$$6a + b + 4 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ $2a - 2 = 0$ ಅಥವಾ $a = 1$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿ $b = -10$ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಆಗ ಸರಿಯಾದ ಸಮವಾಕ್ಯ.

$$x^2 - 10x - 24 = 0$$

ಇದನ್ನು

$$x^2 - 10x = 24$$

ಎಂದು ಬರೆದು ವರ್ಗ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ

$$(x - 5)^2 = 49$$

ಎಂದೂ, ನಂತರ $x = 12, x = -2$ ಎಂಬ ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅನುಬಂಧ

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಹೇಗೆ ಲಭಿಸಿತು ಎಂದು ತಿಳಿಸುವ ಸರಿಯಾದ ವಿವರಣೆ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದು ಗಣಿತದ ಅನುಕಲನ (Integration) ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು ನಿರಂತರ ಬದಲಾವಣೆಗೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ಷಣದ ವೇಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಕಷ್ಟಕರವಲ್ಲ. ಮೊದಲು uಮೀಟರ್/ ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಗುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ aಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದಾದರೆ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗ $u + a$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್, $\frac{1}{2}$

ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗ $u + \frac{1}{2}a$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್, $3\frac{1}{4}$ ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗ $u + \frac{13}{4}a$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ.

ಒಂದು ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ u ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ a ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದಾದರೆ t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ವೇಗವು $u + at$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗಿದೆ.

ಹೀಗಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು ವೇಗವು ಪ್ರತಿಕ್ಷಣದಲ್ಲೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಬದಲು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸಣ್ಣ ಸಮಯಾಂತರದಲ್ಲಿ ವೇಗ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಊಹಿಸುವ, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಸಂಚಾರದ ಮೊದಲ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗ u ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ರ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲೂ ನಂತರ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗ $u + \frac{1}{10}at$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲೂ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದು ಕೊನೆಯ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗವು $u + \frac{9}{10}at$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲೂ ಸಂಚರಿಸುವುದು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

$$\begin{aligned} s &= \left(u \times \frac{1}{10}t\right) + \left(u + \frac{1}{10}at\right) \times \frac{1}{10}t + \left(u + \frac{2}{10}at\right) \times \frac{1}{10}t + \ldots\ldots + \left(u \times \frac{9}{10}at\right) \times \frac{1}{10}t \\ &= ut + \frac{1}{10^2}(1 + 2 + \ldots\ldots\ldots + 9)\, at^2 \\ &= ut + \frac{1}{10^2} \times \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times at^2 \\ &= ut + \frac{9}{10} \times \frac{1}{2}at^2 \\ &= ut + \left(1 - \frac{1}{10}\right)\frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

ಸಂಚಾರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\frac{1}{100}$ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೇಗವು ಬದಲಾಗುವುದು ಎಂದಾದರೆ

$$s = ut + \left(1 - \frac{1}{100}\right)\frac{1}{2}at^2$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವು $\frac{1}{1000}$ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$s = ut + \left(1 - \frac{1}{1000}\right)\frac{1}{2}at^2$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ವೇಗವು ಬದಲಾಗುವ ಸಮಯಾಂತರದ ಅಂತರವು ಕಡಿಮೆಯಾದ ಹಾಗೆ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವ ಸಿಗುವುದು.

> ಒಂದು ನೇರ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ u ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮಯಾಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದಾದರೆ ಈ ಸಮಯಾಂತರದ ಅಂತರವು ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆ t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇರುವ ದೂರವು $ut + \frac{1}{2} at^2$ ಮೀಟರಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಿರುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ಷಣದಲ್ಲೂ ವೇಗವು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ, ಎಂದರೆ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ a ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಕ್ಷಣವೂ ವೇಗ ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುವುದಾದರೆ, ಸಮಯ–ದೂರ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$s = ut + \frac{1}{2} at^2$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳು

1. ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 5 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 97 ಆಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?
2. ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಒಟ್ಟು ಕರ್ಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 90 ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಬಹುಭುಜಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿರಬೇಕು ?
3. ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳು 172°, 168°, 164° .... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಬಹುಭುಜಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿವೆ.
4. ಒಂದು ಟಾಂಕಿಯಲ್ಲಿ ನೀರು ತುಂಬಿಸಲು ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಕೊಳವೆ ಹಾಗೂ ನೀರನ್ನು ಹೊರಹಾಕಲು ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಕೊಳವೆ ಇದೆ. ದೊಡ್ಡ ಕೊಳವೆ ಬಳಸಿ ಟಾಂಕಿಯನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು, ಸಣ್ಣ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಟಾಂಕಿಯ ನೀರನ್ನು ಖಾಲಿ ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 4 ಮಿನಿಟು ಕಡಿಮೆ ಸಮಯ ಸಾಕು. ಈ ಎರಡೂ ಕೊಳವೆಗಳು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕಾರ್ಯಾಚರಿಸಿದರೆ 15 ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ ಟಾಂಕಿ ತುಂಬುವುದು. ದೊಡ್ಡ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಟಾಂಕಿಯಲ್ಲಿ ನೀರು ತುಂಬಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಒಟ್ಟು ದಿನಗೂಲಿ 3150 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ. ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 5 ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಉಳಿದವರ ಕೂಲಿಯನ್ನು 5 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು ಕೂಲಿ 3250 ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು. ಒಬ್ಬ ಕಾರ್ಮಿಕನ ದಿನಗೂಲಿ ಎಷ್ಟು?

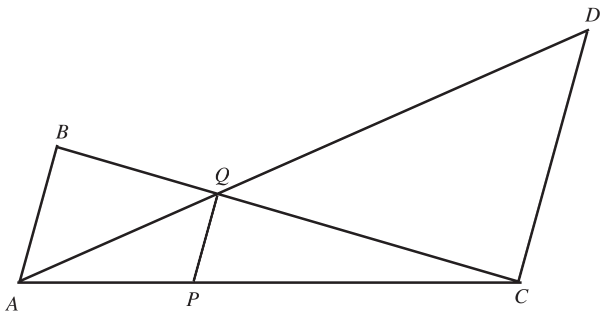
6. ಒಂದು ವಾಹನವು ಮೊದಲ 150 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುತ್ತದೆ. ನಂತರದ 200 ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್ ದೂರವನ್ನು ಮೊದಲ ವೇಗಕ್ಕಿಂತ ಗಂಟೆಗೆ 20 ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುತ್ತದೆ. ಸಂಚರಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಒಟ್ಟು ಸಮಯ 5 ಗಂಟೆಯಾಗಿದ. ವಾಹನದ ಮೊದಲ ವೇಗ ಎಷ್ಟು?

7. 10.6, 8, 10, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 490 ಆಗುವುದೇ? 500 ಆಗುವುದೇ?

8. x ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಬೆಲೆಯು 0 ಆಗಲು $p(x) = x^2 + 4x + 4$ ನ್ನು ಯಾವ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು? x ನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಈ ಬಹುಪದದ ಬೆಲೆಯು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಾರದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. a, b, c ಎಂಬಿವುಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿರುವುದಾದರೆ ಅದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB, CD, PQ ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. AB ಯ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 15 ಸೆ.ಮೀ. ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. CD ವಿನ ಉದ್ದ 4 ಸೆ.ಮೀ ಆದರೆ, PQ ಎಂಬಿವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



5

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಮುನ್ನುಡಿ

ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಹಲವು ವಿಧದ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ಕಲಿತಿರುವರು. ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮಾನತೆ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳು ಇತರ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದನ್ನು ಕಂಡಿರುವರು. ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯ ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದಿಲ್ಲವಾದರೂ, ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದೆಂದೂ ಕಂಡುಕೊಂಡಿರುವರು. ಈ ಆಶಯಗಳ ಮುಂದುವರಿದ ಕಲಿಕೆಯಾಗಿಯೇ ಈ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂಬ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚಾರಿತ್ರಿಕವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅಳತೆಗಳು ರೂಪೀಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವುದು ಎರಡು ದಾರಿಗಳಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 1650ರಲ್ಲಿ ಬರೆದುದೆಂದು ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಾಚೀನ ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಆಹ್‌ಮೋಸ್ ಪೆಪ್ಪೈರಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಎತ್ತರವು ಪಾದದ ಅರ್ಧದ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಇಂದಿನ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖವು ಪಾದದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ Co - tangent ಅಳತೆಯು ಇದಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ನಿರ್ಮಾಣ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ಶಿಲ್ಪಿಗಳು ಕೋನವನ್ನಳೆಯಲು ಇಂದು ನಾವು ಹೇಳುವ tan, cot ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದದಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಸೈನ್‌ನ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್‌ನ ಆರಂಭವು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಕೃಷಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹವಾಮಾನ ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಾಗಿ ಬಹುಕಾಲದ ಹಿಂದೆಯೇ ಮಾನವನು ಆಕಾಶಕಾಯಗಳ ಚಲನೆಯನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದನು. ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಚಾಪ ಹಾಗೂ ಜ್ಯಾಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಾಗಿತ್ತು. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 1 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸಿನ ಹಿಪಾರ್ಕಸ್, ಚಾಪ ಹಾಗೂ ಜ್ಯಾಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತು ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕ ರಚಿಸಿದನು. ಮುಂದಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಸುಲಭವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಹಾಗೂ ಅದರ ಇಮ್ಮಡಿ ಉದ್ದವಿರುವ ಚಾಪದ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ

ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದನು. ಚಾಪದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕೇಂದ್ರಕೋನದ ರೇಡಿಯನ್(radian) ಅಳತೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಸಂಬಂಧವು ನಾವಿಂದು ಉಪಯೋಗಿಸುವ Sin ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಕ್ರಿ.ಶ. ಐದನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಭಾರತದ ಸೂರ್ಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಬರೆದ ಅಜ್ಞಾತನಾದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಹಾಗೂ 6ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಆರ್ಯಭಟ ಮತ್ತಿತರರು ಈ ರೀತಿಯ ಸೈನ್ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದ್ದರು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಅಗತ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಮಟ್ಟಕ್ಕಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಸಾಕಾಗಿತ್ತು. ನಂತರದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ನಿರ್ವಚನವನ್ನು ವಿಸೃತಗೊಳಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದಾದ ಕರಣಗಳಾಗಿ (function) ವಿಕಾಸಗೊಳಿಸಿದರು. ಮಟ್ಟಕ್ಕಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಎಂಬ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತವಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಈ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಮತ್ತು ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್‌ಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳು ಕರಣಗಳಾಗಿ ವಿಕಾಸಗೊಳ್ಳುವ ವಿಚಾರವನ್ನು (function related) 11 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಲಿಕ್ಕಿದೆ.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಒಂದೇ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿವೆ. • ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.	• 45^0, 45^0, 90^0 ಯ ಹಾಗೂ 30^0 60^0 90^0 ಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದೇ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾದರೂ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಇಂತಹ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಭುಜ ಸಿಕ್ಕಿದರೆ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಕೆಲವು ಕೋನಗಳು 45^0, 30^0, 60^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಸಿ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್‌ನ್ನು ನಿರ್ವಚಿಸುವುದು. • ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಲಘುಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಮತ್ತು ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕರ್ಣದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು. • ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳ sin, cosine ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.	• ಗೆರೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ವಿಧಾನವಾಗಿ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್, ಟೇನ್ ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ – ಬೋಧನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನದ ಅರ್ಧದ ಸೈನ್ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದರ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. • ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಅವುಗಳ ಎದುರಿನ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಅಳತೆಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆ. • tangent ಎಂಬ ಆಶಯ. • ದೂರ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಸಂಬಂಧವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.	• ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ c^0 ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ $2r \sin\left(\frac{c}{2}\right)$ ಆಗಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಅದರ ಎದುರಿನ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಬೆಲೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಲಘುಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವನ್ನು ಸಮೀಪ ಭುಜದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ನಿಮ್ನಕೋನ, ಉನ್ನತಕೋನ ಎಂಬೀ ಆಶಯಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ದೂರ, ಉನ್ನತಿಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • sine, cosine ಬೆಲೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • tan ಬೆಲೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ದೂರ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿವಿಧ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಹಾಗೂ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು sine ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು. • ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಕೋನಗಳ sine ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. • ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಇತರ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸುವುದು. • ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ದೂರ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

ಆಶಯ ವಿನಿಮಯ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಐದು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿರುವ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಎಂದು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವರೆಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತಾ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುವುದು. ನಂತರ ಇವುಗಳು ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ ತಿಳಿಸುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ, ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗುವುದು.

ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೈನನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ, ಅದರ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಇದನ್ನು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ, ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ತಿಳಿಸುವುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೋನದ tangent ಎಂಬ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೂರ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ವಿವರವಾಗಿ ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

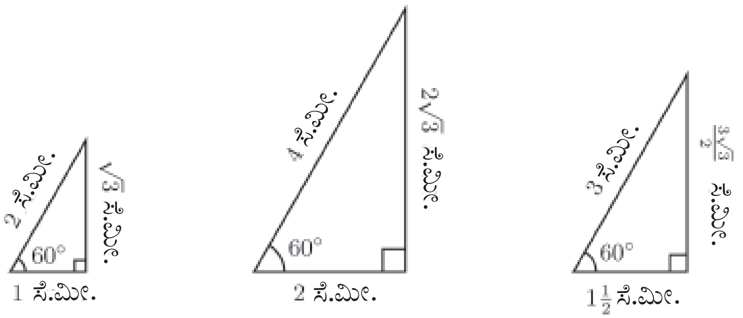
ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳೂ ಭುಜಗಳೂ

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಬೇಕು. ಇದು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುವು ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ರೂಪೀಕರಿಸಲಿರುವ ಮೊದಲ ಹಂತವಾಗಿದೆ. ನಂತರ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸಮಪಾರ್ಶ್ವಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ, ಒಂದು ಲಂಬ ಭುಜದ $\sqrt{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಮಕ್ಕಳು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವರು. ಅದನ್ನು ನೆನಪಿಸುವ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಂತರ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಕೋನಗಳು 30^0 60^0 90^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

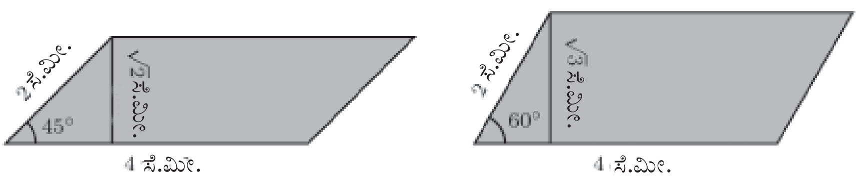
ಈ ರೀತಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೂ ಇದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಲು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರಿಸಬೇಕಾಗಿ ಬರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೋನಗಳು 30^0, 60^0, 90^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೂ ಇವುಗಳೆಲ್ಲಲ್ಲಾ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಎರಡು ಮಡಿ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಭುಜ ಹಾಗೂ $\sqrt{3}$ ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇವುಗಳೆಡೆಯ ಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರದ ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದಿಂದ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸಂದರ್ಭವನ್ನೊದಗಿಸಬೇಕು.



ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು ಅತಿ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಕೋನಗಳು 30^0, 60^0, 90^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

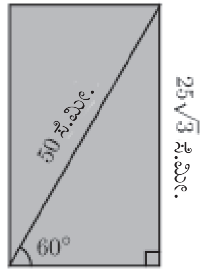
ಲಂಬವಲ್ಲದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವ ಮೊದಲು, ಇದುವರೆಗೆ ತಿಳಿದ ಆಶಯಗಳ ಕೆಲವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಎಂಬ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾದ ಮೊದಲ ಮೂರು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ.

ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಂಡು, ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಂಡ ವಿಚಾರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ.

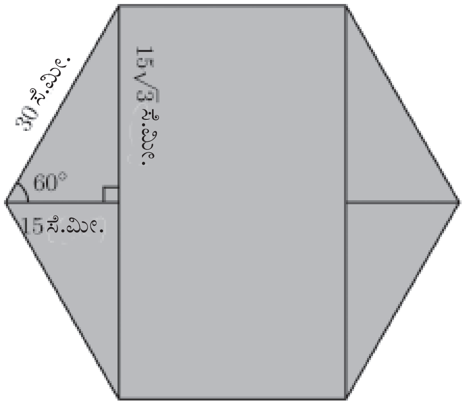


ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $4\sqrt{2}$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $4\sqrt{3}$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.

ಎರಡನೇ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಆಯತವನ್ನು ಕರ್ಣವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಅರ್ಧ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

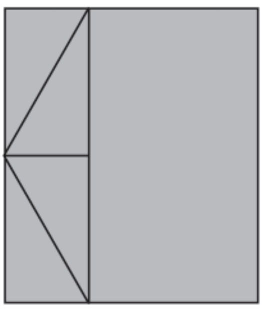


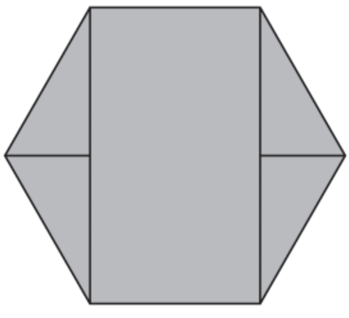
ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು 120^0 ಎಂಬುದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.



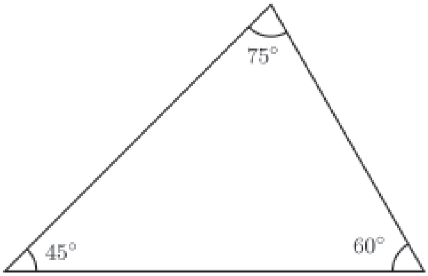
ಆದ್ದರಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $30, 30\sqrt{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ, ಸಣ್ಣ ಆಯತದ ಭುಜಗಳು $15, 15\sqrt{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

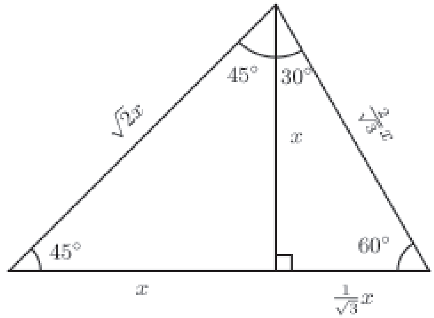
ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಆಯತಗಳ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $1 : \sqrt{3}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಣ್ಣ ಆಯತದ ಭುಜಗಳು ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಮುಂದುವರಿದು ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕಾಣುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಅದರ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಹೇಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಬಹುದು.





ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು 30^0, 45^0, 105^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ, ಕೋನಗಳು 45^0, 60^0, 75^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ.

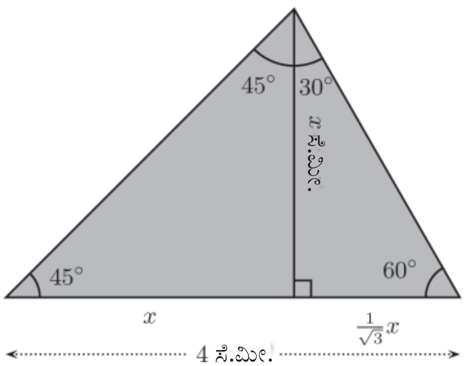




ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದು, ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತಿಯು $2:\sqrt{6}:1+\sqrt{3}$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇದಾದ ನಂತರ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತೆ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ



$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x=4$$

ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\frac{8\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಜ್ಯಾದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಿದ ನಂತರ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಹಾಗೂ ಆರನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸುವ.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ ಎಂದೂ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೊನ 120^{o} ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಹೀಗಾದೀತು.

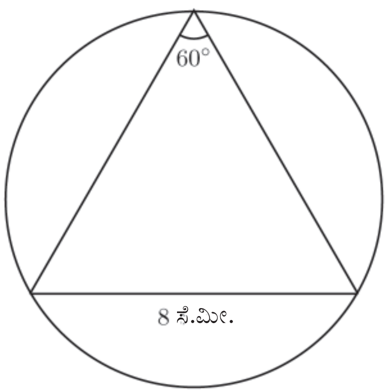
> ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 120^{o} ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನವಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.
> ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಷ್ಟು?

ಇಂತಹ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\sqrt{3}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದೆಯಲ್ಲವೇ ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಆರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರವು ಹೀಗಿದೆ.



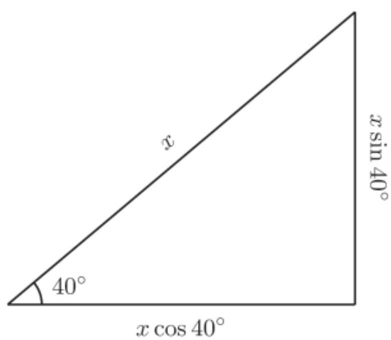
ಈಗ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{8}{\sqrt{3}}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಹೊಸ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು

ಕೋನಗಳ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುವುದು. ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಬದಲಾಗುವುದಾದರೂ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡ ವಿಚಾರದ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಈ ವಿಚಾರವು ಸರಿಯಾದೀತೇ ಎಂಬ ಅನ್ವೇಷಣೆಯನ್ನು ನಡೆಸುವ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಮಂಡಿಸಬೇಕು.

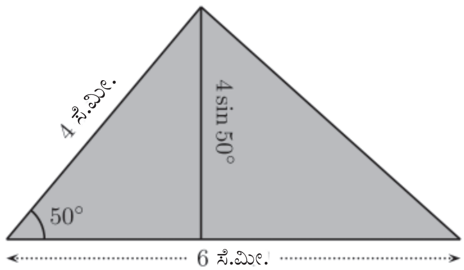
ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳೆದುರಿನ ಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯ ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಕಲಿತಿರುವರು. ಅಂದರೆ ಇಂತಹ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜವು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದೋ ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಮಧ್ಯದ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಹಾಗೂ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ಚಿಂತನೆಗೆ ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಪಾಠಭಾಗ ಒಳಪಡಲಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಸಿ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದೆಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಉದ್ಭವಿಸುವುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವೂ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಭುಜಗಳು ಕರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಲಘುಕೋನವು ತಿಳಿದರೆ ಅದರ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಲಘುಕೋನವು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಕೋನ 40^0 ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 40^0 ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಕರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ $\sin 40^0$. ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬಭುಜವು ಕರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ $\cos 40^0$.

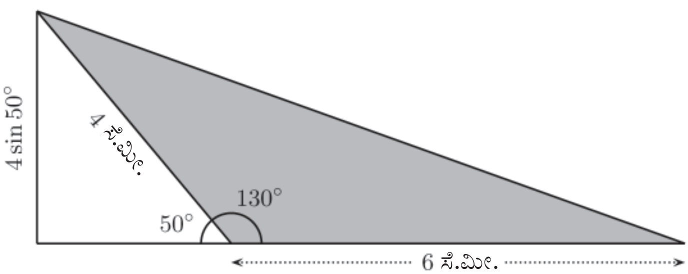


ಒಂದು ಕೋನ 40^0 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಲಂಬ ಭುಜಗಳು ಕರ್ಣದ ಅದೇ ಭಾಗವಾದುದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 40^0 ಎಂಬ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಅವಲಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು 35^0 ಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದರೆ ಕೋನದ ಶಿರದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರದ $\sin 35^0$ ಭಾಗವು ಲಂಬದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಈ ದೂರದ $\cos 35^0$ ಭಾಗವು ಲಂಬದ ಬುಡ ಮತ್ತು ಕೋನದ ಶಿರಕ್ಕಿರುವ ದೂರವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರ ಕುರಿತು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಎಡೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇವುಗಳ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಎದುರಿನ ಶಿರದಿಂದ ಇರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಹಾಗೂ ಕೋನದ ಸೈನ್ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $12 \sin 50^0$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.



ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೋನ 50^0 ಗೆ ಬದಲಾಗಿ 130^0 ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಇದರ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಿದೆ.



ಇದರಲ್ಲಿಯೂ ಲಂಬದ ಎತ್ತರ $4 \sin 50^0$ ಆಗಿದೆ.

ಅರ್ಥವನ್ನು ಗ್ರಹಿಸದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ac \sin B$ ಎಂದು $\sin (180 - x)^o = \sin x^o$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಕಲಿಸಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು

$$\frac{1}{2}\times 6\times 4\times \sin 130^{o} = 12\sin 50^{o}$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡುವವರಿದ್ದಾರೆ. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಪಾಠದ ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ತೊಂದರೆಗಳಿವೆ. ಒಂದನೆಯದಾಗಿ ಇದುವರೆಗೆ ಹೇಳಿದುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಒಂದು ಕೋನದ ಸೈನ್ ಎಂಬುದು ಆ ಕೋನವು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು ಕರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಒಂದುಕೋನ 130^0 ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ನಿರ್ವಚನಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ $\sin 130^o$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅಗತ್ಯಗಳಿಗಾಗಿ ವಿಶಾಲಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೊಸತಾಗಿ ನಿರ್ವಚಿಸಿದ ನಂತರವೇ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಬೆಲೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳುವುದರಲ್ಲಿ ಅರ್ಥವಿದೆ.

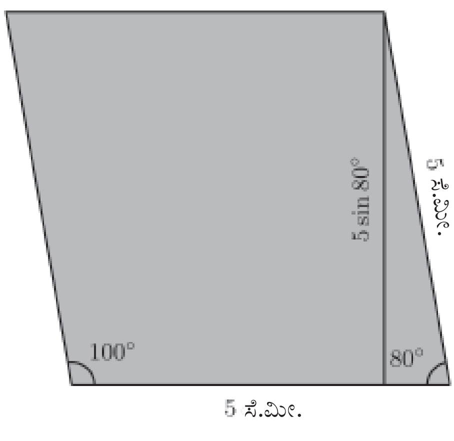
ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಡಭಾಗದ (ಬಿಳಿಯ) ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಲಂಬದ ಉದ್ದವು $4 \sin 50^o$ ಎಂದೇ ಸಿಗುವುದು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಹೊಸ ನಿರ್ವಚನವನ್ನು ಹೇಳಿ $\sin 130^o$ ಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೈನ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದೇ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಮಾತ್ರವೇ ಇಲ್ಲಿ $\sin 130^0$ ಎಂದು ನಂತರ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದು. ಇಂತಹ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕಲಿಸಲು ಉದ್ದೇಶಿಸಿಲ್ಲ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೈನನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಮಾತ್ರವೇ ಇಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವುದಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯು ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಯದೇ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಪಾಠಮಾಡಿ ಯಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಿರುವ ತರಬೇತಿಯಲ್ಲ. ಯುಕ್ತಿಯುಕ್ತವಾದ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರಗಳ ಮೂಲಕ ಸೃಜನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಲಿರುವ ಅನುಭವ ಜ್ಞಾನಕ್ಕಾಗಿರುವ ವೇದಿಕೆ ನಿರ್ಮಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ 7 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ನಂತರ 2 ನೇ ಹಾಗೂ 3 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು.

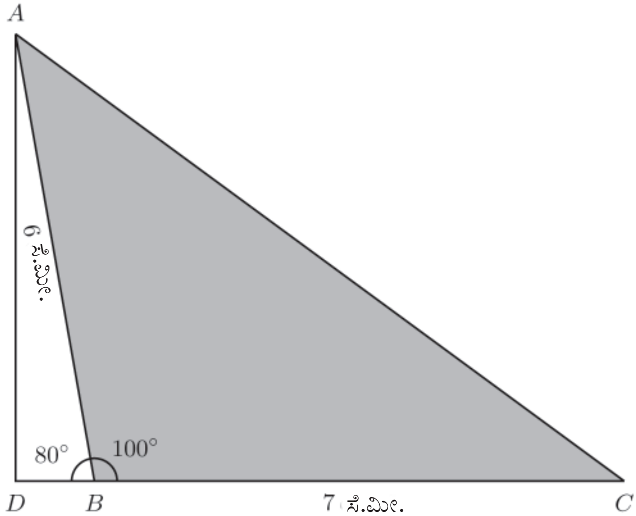
ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಿದೆ :

ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $5\times 5\sin 80^o \approx 24.62$ ಚ. ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



ಇದೇ ರೀತಿ ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $8\times 12\sin 50^o \approx 68.18$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಎರಡು ಭುಜಗಳು 6 ಸೆ.ಮೀ, 7 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದು ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನ 100^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಿದೆ.



ಇದರಿಂದ

$$AD = 6 \sin 80^{\circ} \approx 5.91 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$BD = 6 \cos 80^{\circ} \approx 1.04 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

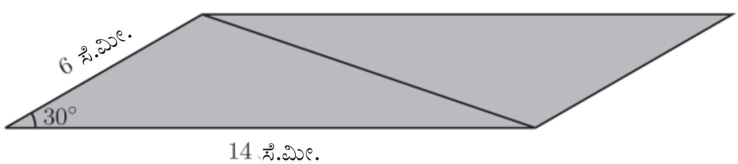
ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{5.91^2 + 8.04^2} \approx 9.98 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

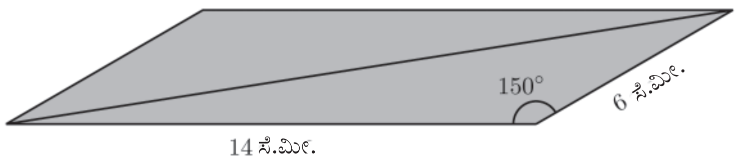
ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ B ಯ ಕೋನವು ಲಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದುದರಿಂದ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಬೇಕು.

ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿನ 4 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸುವ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು.



ಇನ್ನೊಂದು ಕರ್ಣವನ್ನೆಳೆದರೆ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಾದೀತು.



ಇವುಗಳೆರಡೂ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮೂರನೇ ಭುಜವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಮೊದಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿದಂತೆ ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು.

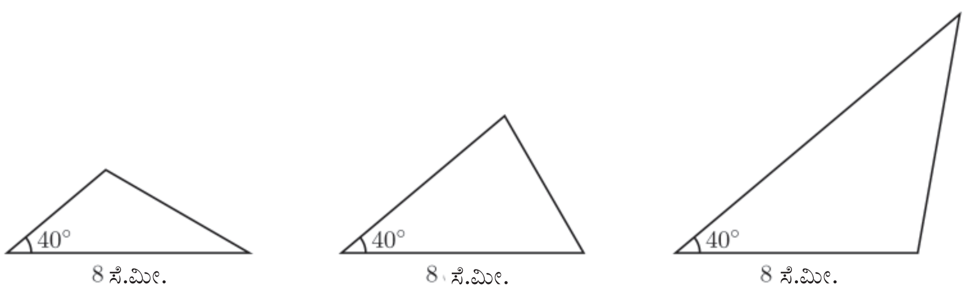
ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯದರ ಉತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಲು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಲಘುಕೋನವು ಕ್ರಮೇಣ ದೊಡ್ಡದಾಗುವಾಗ ಇದರ ಎದುರಿನ ಭುಜವೂ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು, ಲಂಬವು ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ಸಮೀಪ ಭುಜವು ಚಿಕ್ಕದಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು ಅಂದರೆಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾದಂತೆ ಸೈನ್ ಸದಾ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಕೊಸೈನ್ ಸಣ್ಣದಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ $\sin 1^o < \sin 2^o$ ಎಂದೂ $\cos 2^o < \cos 1^o$ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

2^0 ಎಂಬುದು ತುಂಬಾ ಸಣ್ಣ ಕೋನವಾದುದರಿಂದ $\sin 2^o$ ತೀರಾ ಚಿಕ್ಕಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದೂ, ಇದರಿಂದ ಈ ಕೋನದ ಸಮೀಪಭುಜ ಹಾಗೂ ಕರ್ಣಗಳೊಳಗೆ ದೊಡ್ಡ ವ್ಯತ್ಯಾವೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ $\cos 2^0$ ಎಂಬುದು 1ರ ಹತ್ತಿರದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ $\sin 2^o < \cos 2^o$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ

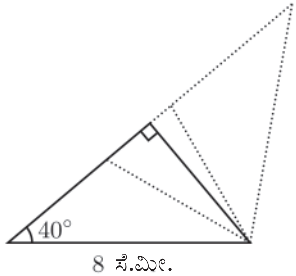
$$\sin 1^o < \sin 2^o < \cos 2^o < \cos 1^o$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

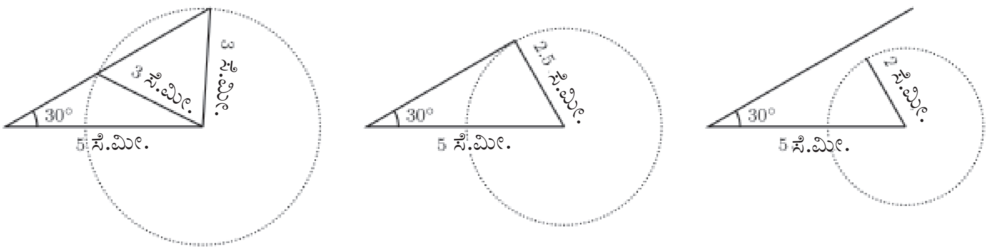
ಎರಡು, ಮೂರು, ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಈ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿಯಾಯಿತು. ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು 8 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಗೆರೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 40^0 ಕೋನವನ್ನೆಳೆದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ. ಎರಡನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೊದಲ ಗೆರೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದಂತಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಿಗುವುದು.



ಈ ರೀತಿ ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಮೂರನೇ ಭುಜವು ಸಿಗುವುದು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯಿಂದ ಮೇಲಿನ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದಾಗ ಅಲ್ಲವೇ. ಈ ಲಂಬದ ಉದ್ದವು 8sin $40^\circ \approx 5.1$

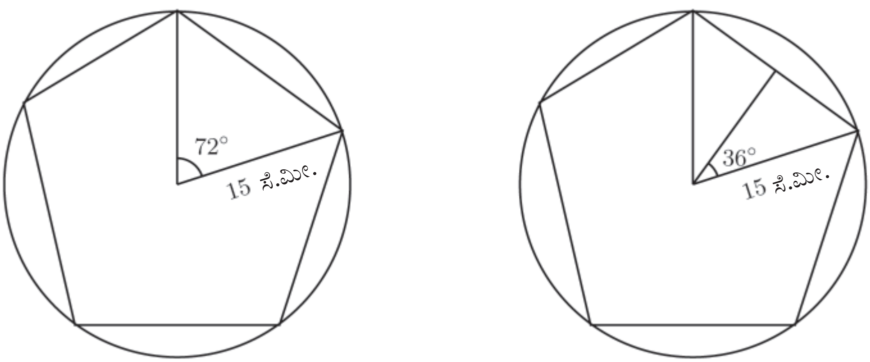


ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಇನ್ನೊಂದು ಕೋನ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವಲ್ಲದ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಚರ್ಚೆಯಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರೆ ಇತರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಒಂದೇ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂದೂ, ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದೂ ಕಂಡಿರುವೆವು..



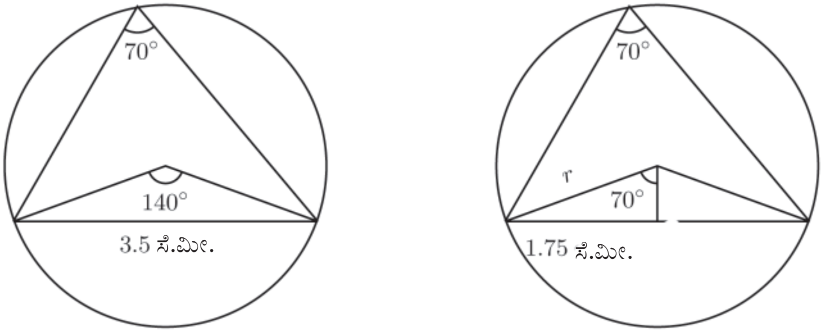
ರಚನೆಯಿಂದ ಮಾತ್ರವೇ ಕಂಡುಕೊಂಡ ಈ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಇನ್ನು ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮಾತ್ರ ಸಿಗುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು.

ಆರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಪಂಚಭುಜದ ಬದಿಗಳೆಲ್ಲಾ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 72^0 ಯಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ.



ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 120^0 ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತೆ ಈ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು $30\sin 36^o \approx 17.6$ ಸೆ.ಮೀ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಏಳನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ಉತ್ತರಿಸಿಯಾಯಿತು. ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮೊದಲಭಾಗದ ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 140^0 ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾವಲ್ಲವೇ.



ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $r \sin 70^o = 1.75$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ

$$r = \frac{1.75}{\sin 70^o} \approx 1.86$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ತ್ರಿಕೋನವೂ ವೃತ್ತವೂ

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಚಾಪದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಸೈನ್ ಬೆಲೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ಕಂಡಿರುವೆವು. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಂದುವರಿದು ಈ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಕೋನಗಳ ಸೈನ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಹೇಗೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು. ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು, ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈ ಮೂಲಕ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಹೇಳಿದ ನಂತರ, ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚರ್ಚೆಗಳಿಗೆ ದಾಟುವಾಗ ಈ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿದ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ಕೋನದ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಚಿಸುವುದು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಲಂಬ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ

ಕೋನಗಳ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್‌ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ಪ್ರಸ್ತುತ ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣಾ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಅಥವಾ ಮಾಧವನ್ ಶ್ರೇಣಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವುಗಳ ನಿರ್ವಚನವನ್ನು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ.

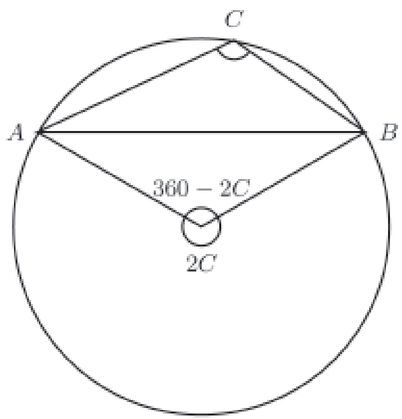
ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳನ್ನು, ಭುಜಗಳನ್ನು, ಸೈನ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸುವಾಗ ಮೂರು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿ ಕಾಣಬೇಕಾಗಿ ಬರುವುದು.

(i) ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

(ii) ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು

(iii) ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು

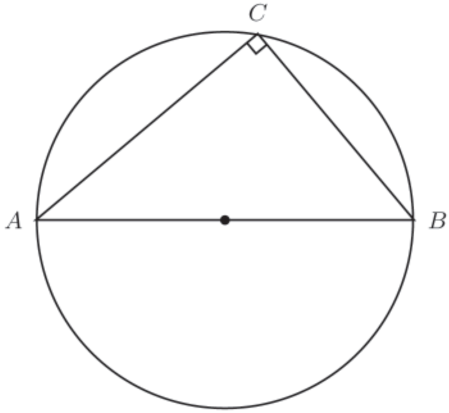
ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿಗರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಕೋನಗಳ ಸೈನ್‌ನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾದರೆ ಅದರ ಎದುರಿನ ಭುಜವನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ಆಗಿ ಕಾಣುವಾಗ ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ, ಈ ಮೊದಲು ಕಂಡಂತೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನದ ಎರಡು ಮಡಿಯಲ್ಲ ಬದಲಾಗಿ ಪರಿಪೂರಕದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬೇಕು.



ಆಗ ಚಾಪದ ಉದ್ದದ ಕುರಿತಾಗಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದಿಂದ

$$AB = 2r \sin \frac{1}{2}(360 - 2C) = 2r \sin (180 - c)$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬಕೋನವಾದರೆ ಅದರ ಎದುರಿನ ಭುಜ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವೇ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.



ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು ಹಾಗೂ ಭುಜಗಳು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮೂರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಮೊದಲೇ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ ಸೈನಿನ ಅರ್ಥ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ನಂತರವೇ ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಏಕೀಕರಿಸಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್‌ನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಒಂದೇ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕು. (ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಏಕೀಕರಣವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ)

ಒಂದೇ ಕೋನವಿರುವ ಅನೇಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು, ಆದುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು ಭುಜಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವು. ಕೋನಗಳು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧಿರಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ಈ ಪಾಠಭಾಗದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವು. ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ತಾನೇ ನೋಡಿದೆವು.

ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ಒಂದು ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ ಸೇರಿ ಆರು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವು.

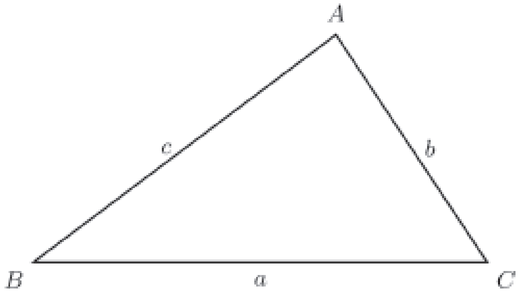
(i) ಮೂರು ಭುಜಗಳು

(ii) ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವೂ

(iii) ಒಂದು ಭುಜ ಹಾಗೂ ಅದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಇದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಇಂತಹ ಒಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಇಂತಹ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇತರ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸಲು, ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಂತೆ a, b, c ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ



ಇದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳಾದ a, b, c ಗಳು ತಿಳಿದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಕೊಸೈನ್ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ತಿಳಿದರೆ ಮೂರನೇ ಭುಜವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆದು ಬೇಕಾದುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ನಂತರ ಇತರ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಕೊಸೈನ್‌ನ್ನು ಈ ಮೊದಲು ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಒಂದು ಭುಜ ಹಾಗೂ ಅದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದೆರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆ a, B, C ಗಳು ತಿಳಿದರೆ $A = 180 - (B + C)$ ಎಂದೂ, ಉಳಿದೆರಡು ಭುಜಗಳು

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\frac{4}{\sin 70^\circ} \approx 4.3 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು ಒಂದು ರಫ್ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಗ್ರಹಿಸಿಯೋ ಬರೆದೋ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಕೋನ 80^0 ಯೂ ಅದರ ಎದುರಿನ ಭುಜ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿರುವುದು?

$$\frac{5}{2\sin 80^o} \approx 2.7 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಕೋನ 140^0 ಮತ್ತು ಅದರ ಎದುರಿನ ಭುಜ 8 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ?

ಇಲ್ಲಿ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದುದರಿಂದ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನದ ಸೈನ್ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಗ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

$$\frac{4}{\sin 40^o} \approx 6.2 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಕೋನ 70^0 ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ ವೃತ್ತಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಂಡಂತೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ ಅದರೊಳಗೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಅಥವಾ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ

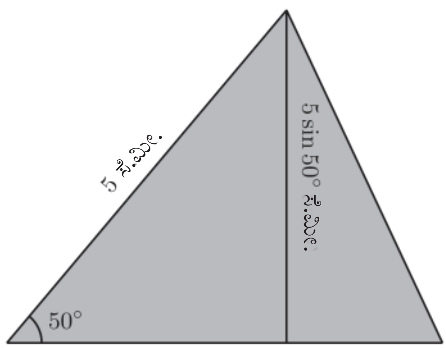
$$5 \sin 70^o \approx 4.7$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಬಹುದು.

ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಕೋನ 65^0 ಆದುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವವೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

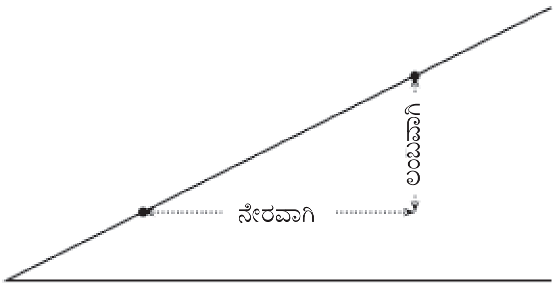
$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \sin 50^o \approx 9.58 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$



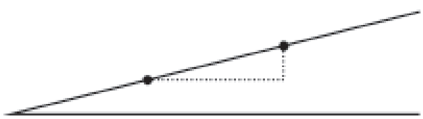
ಇನ್ನೊಂದಳತೆ

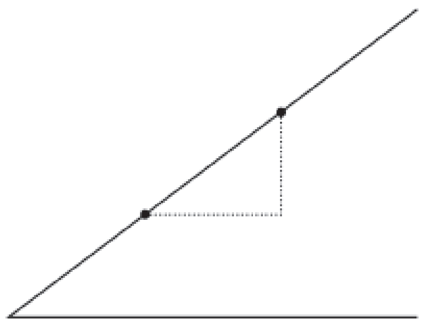
ಒಂದು ಕೋನದ tangent ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುವುದು. ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ಸಾಕು. ಆದರೂ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭಗೊಳಿಸಲು ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಈ ಚಿಂತನೆಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿ ಕೋನದ tan ನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಬಾಗುವಿಕೆಯ ಅಳತೆಯೇ tan ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಗಣಿತಪರವಾದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು **ಬಾಗುವಿಕೆಯ ಅಳತೆ** ಎಂಬ sidebox ನಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದೆ. ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ಒಂದು ಏರು (ಚಡವು) ಹತ್ತುವಾಗ ನೇರವಾಗಿ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಸಾಗುತ್ತಾ ಲಂಬವಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೇರುವುದಿದೆ.

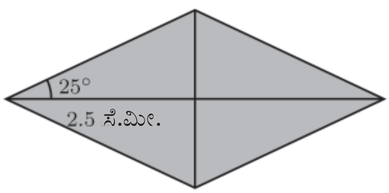


ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯು ನೇರವಾಗಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲು ಸಂಖ್ಯೆಯೇ tan. ಇದು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಏರು (ಚಡವು) ಅಧಿಕವಾದೀತು.





ಪಾಠುಪುಸ್ತಕದ ಮೆಟ್ಟಲು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ tan ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬಾಗುವಿಕೆಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

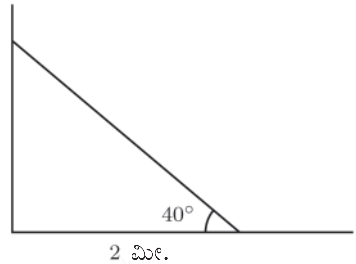


ಇದರ ಸಣ್ಣ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧ 2.5 tan 25° ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$5 \times 2.5 \tan 25^\circ \approx 5.83 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಿದೆ.

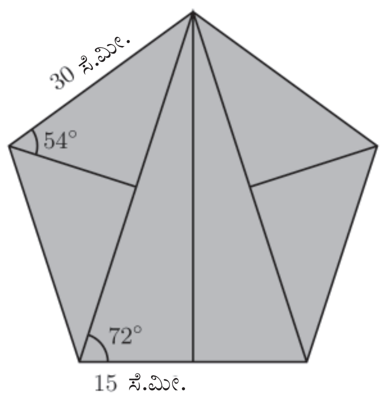


ಇದರಿಂದ ಏಣಿಯ ಮೇಲಿನ ತುದಿಗಿರುವ ಎತ್ತರ

$$2 \tan 40^\circ \approx 1.7 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಪಂಚಭುಜದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.



ಇದರಿಂದ, ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಅಗಲವು 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ, ಉನ್ನತಿ

$$15 \tan 72^\circ \approx 46.2 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

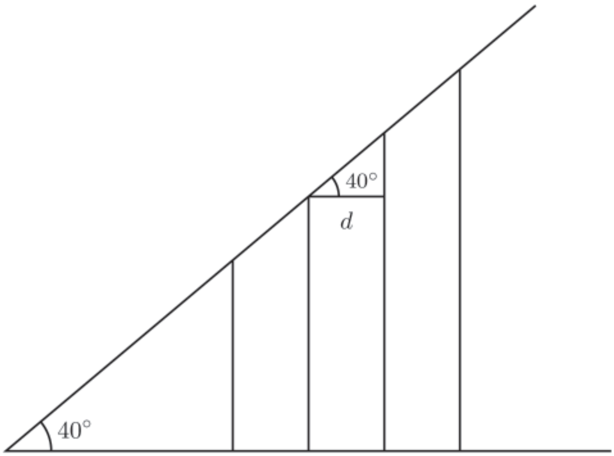
ಸಣ್ಣ ಆಯತದ ಭುಜಗಳು

$$30 \cos 54^\circ \approx 17.6 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$30 \sin 54^\circ \approx 24.3 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

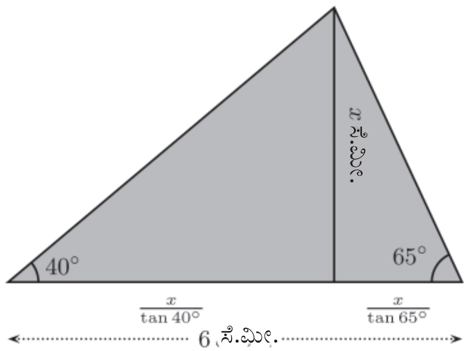
ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಕೋನದ ಒಳಗೆ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬವಾದ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ ಯಲ್ಲಿವೆಂದು, ಮೊದಲ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಭಾಗದ ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವು. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಗೆರೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ d ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.



ಚಿತ್ರದಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d \tan 40^{o}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು.



ಇದರಿಂದ

$$x\left(\frac{1}{\tan 40^{o}}+\frac{1}{\tan 65^{o}}\right)=6$$

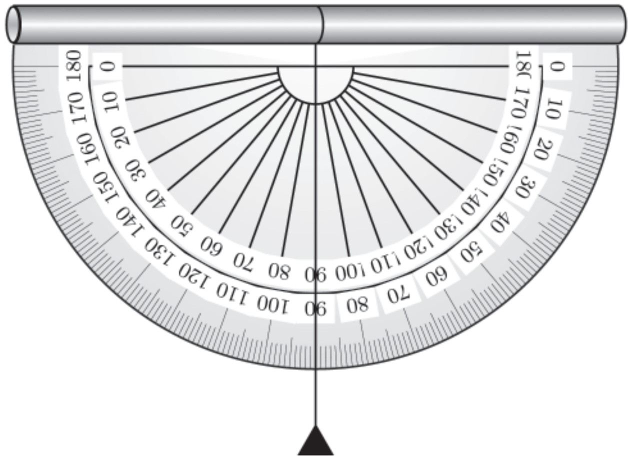
ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಇನ್ನು $x \approx 6 \div 16 \approx 3.61$ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $3 \times 3.61 = 10.83$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ದೂರವೂ ಉನ್ನತಿಯೂ

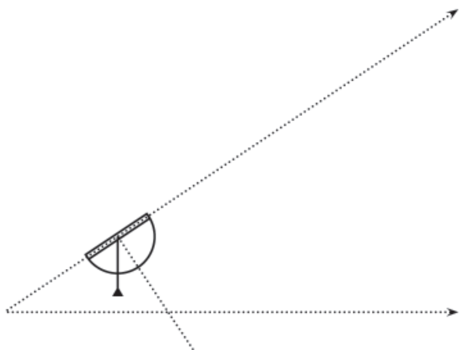
ದೂರವನ್ನೂ ಉನ್ನತಿಯನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಲು ಉನ್ನತಕೋನ, ನಿಮ್ನಕೋನಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಾದುವುಗಳು ಎಂದು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಬೇಕು. ಕ್ಲೈನೋಮೀಟರ್

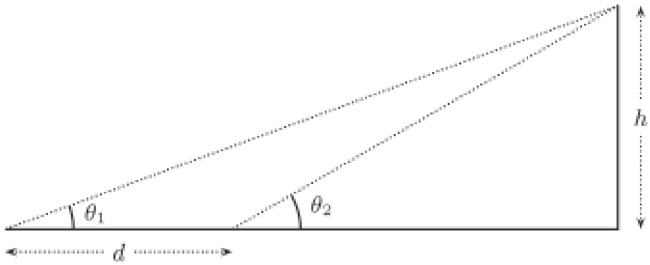
ಎಂಬ ಉಪಕರಣದ ಕುರಿತು ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಸರಳಮಾದರಿಯನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಂದ ಮಾಡಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಕೊಳವೆಯ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ನೂಲನ್ನು ಕಟ್ಟಿ ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಗೆ ಭಾರವನ್ನು ತೂಗಾಡಿಸಿ, ಕೋನಮಾಪಕದೊಂದಿಗೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿದಿರೆ ಸಾಕು.



ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಮರದ ತುದಿಯನ್ನೋ, ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯನ್ನೋ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ಕಾಣಲು ಅದನ್ನು ಓರೆಯಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎತ್ತಬೇಕು. ದಾರದಲ್ಲಿ ತೂಗಾಡಿಸಿದ ಭಾರದ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ ದಾರವು ನೆಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು. ದಾರ ಹಾಗೂ ಕೋನಮಾಪಕದ 90^0 ಗೆರೆಯ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವೇ ಉನ್ನತಕೋನವಾಗಿರುವುದು.

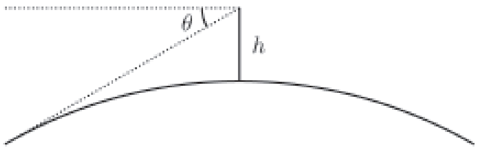


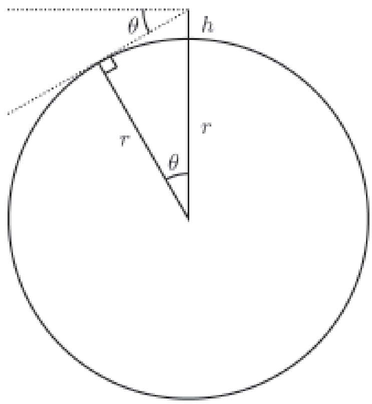
ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಶಾಲಾಪರಿಸರದ ಮರಗಳ ಹಾಗೂ ಇನ್ನಿತರ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಹತ್ತನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಪರ್ಷಿಯಾದ ಅಬುರೈಹಾನ್ ಆಲ್ ಬೆರೂನಿ ಭೂಮಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಅಳೆದ ಕಥೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು ಆತನು ಸಮತಟ್ಟಾದ ನೆಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ನಿಂತು ಒಂದು ಬೆಟ್ಟದ ಉನ್ನತಕೋನವನ್ನೆಳೆದು ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದನು.



$$h = \frac{d \tan\theta_1 \ \tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

ನಂತರ ಆ ಬೆಟ್ಟದ ಮೇಲಿನಿಂದ ಭೂ ತಳಕ್ಕಿರುವ ನಿಮ್ನ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆದನು.





ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಭೂಮಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

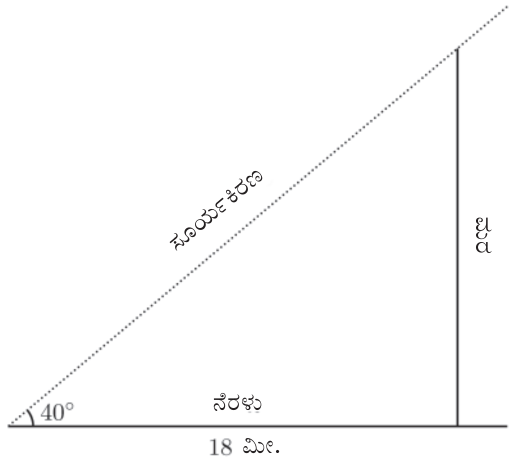
$$h = \frac{h \cos\theta}{1 - \cos\theta}$$

ಆತನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದ ಪ್ರಕಾರ ಭೂಮಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ **6339.0** ಕಿಲೋಮೀಟರಾಗಿದೆ. ಈಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಪ್ರಕಾರ ಅದು **6356.7** ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಹತ್ತೊಂಬತ್ತನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಟಿಷರು ನಡೆಸಿದ Great Trigonometrical Survey ಯನ್ನೂ ಅದರಲ್ಲಿ ರಾಧಾನಾಥ್ ಸಿಕ್ತರ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಬೇಕು. ಗಣಿತ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಕುರಿತು ಹೊಸ ದೃಷ್ಟಿಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಬೇಕು. ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

- https: //en.wikipedia.org/wiki/Great_Trigonometrical_Survey
- https: //en.wikipedia.org/wiki/Radhanath_Sikdar

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.



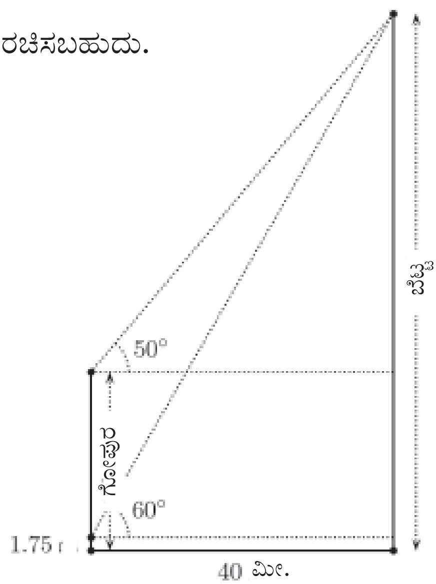
ಮರದ ಎತ್ತರ 18 tan 45° ≈ 15.1 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸುವ. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮರದ ಎತ್ತರ 10 tan 35° ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ ಸೂರ್ಯನು ಕೆಳಕ್ಕಿಳಿಯುವಾಗ ಮರದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ

$$\frac{10 \tan 35^\circ}{\tan 25^\circ} \approx 15.1 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು.



ಇದರಿಂದ ಬೆಟ್ಟ ಎತ್ತರ

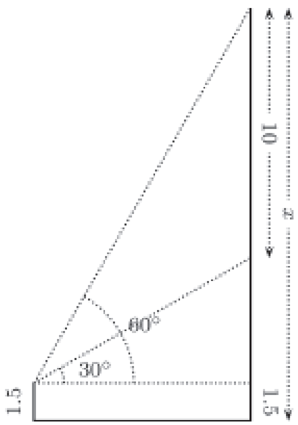
$$1.75 + 40 \tan 60^{o} \approx 71 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ

$$1.75 + 40 (\tan 60^{o} - \tan 50^{o}) \approx 23.4 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು..

ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿಗೊಂಡ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

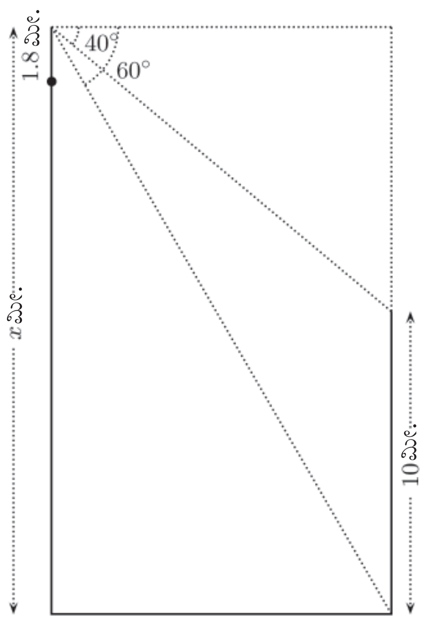


ಮಗು ಹಾಗೂ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು 30^0 ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ $((x-10)-1.5)\sqrt{3} = (x-11.5)\sqrt{3}$ ಎಂದೂ, 60^0 ಕೋನವಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ $\frac{x-1.5}{\sqrt{3}}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

$$(x-11.5)\sqrt{3} = \frac{x-1.5}{\sqrt{3}}$$

ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ $x = 16.5$ ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಟವರ್ ಹಾಗೂ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಎತ್ತರಗಳ ಮೊತ್ತ x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.



ಟವರ್ ಹಾಗೂ ಗೋಪುರಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ

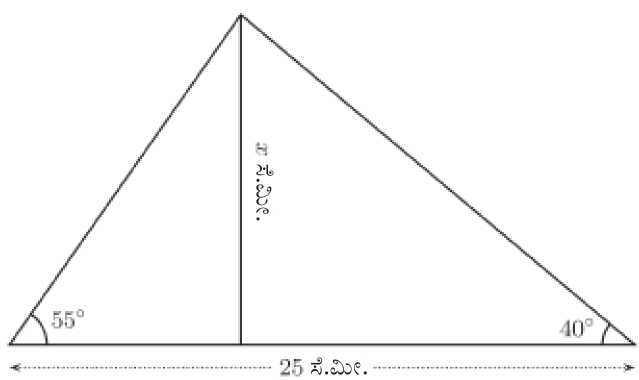
$$\frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x-10}{\tan 40^\circ}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

$$x = \frac{10 \tan 60^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 40^\circ} = 19.4$$

ಇದರಿಂದ ಟವರಿನ ಎತ್ತರ $19.4 - 1.8 = 17.6$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರವು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದುದಾಗಿದೆ.



ಈ ಮೊದಲೇ ಮಾಡಿದಂತೆ

$$x\left(\frac{1}{\tan 55^{\circ}}+\frac{1}{\tan 40^{\circ}}\right)=25$$

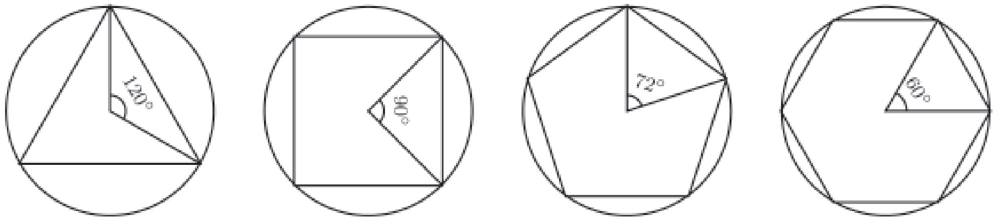
ಇದರಿಂದ

$$x \approx 13.21 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಸಂಶೋಧನೆ

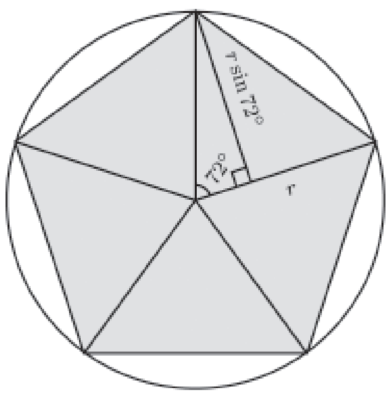
ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತದ ಒಂದೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಜ್ಯಾಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ 360^{0}ಯನ್ನು ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಅಳತೆಗಳಾಗಿವೆ.



ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ n ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಭುಜದ ಪ್ರತಿಭುಜಗಳೂ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ $\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$. ಆದ್ದರಿಂದ ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆದರೆ, ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದದ ಕುರಿತು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು $2r\sin\left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದರಿಂದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

n ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆದರೆ, ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ $2nr\sin\left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}$.

ಬಹುಭುಜದ ಶಿರಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬಹುಭುಜವನ್ನು n ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}r^{2}\sin\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$ ಆಗಿರುವುದು.



ಇದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆದರೆ ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$\frac{1}{2} nr^2 \sin \left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$.

ಒಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ಆಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು **ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ** ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು ಎಂದು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಅಳತೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವು. ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈಗ ನೋಡಿದ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $2nr \sin \left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2\pi r$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ πಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೋಡಬಹುದು.

$x_n = n \sin \left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು π ಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು.

6

ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಪೀಠಿಕೆ

ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಗಣಿತವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಗಣಿತವೂ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಆಗಿದೆ. ಅಂಕಗಣಿತವು ಕಾಲಕ್ರಮೇಣ ಬೀಜ ಗಣಿತವಾಗಿ ಬೆಳೆಯಿತು. ಆ ಕಾಲದಿಂದಲೇ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಬೀಜ ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಚಿಂತನೆಗಳು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬೀಜ ಗಣಿತ ಚಿಂತನೆಗಳೂ ಹಾದು ಬರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಬೀಜಗಣಿತದಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೂ ಹಾಗೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೂ ಇರುವ ತರ್ಜುಮೆ ನಿಖರವಾಗಿ ನಡೆಸಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ರೀತಿಯನ್ನು 17ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಫ್ರಾನ್ಸಿನಲ್ಲಿ ದೆಕಾರ್ತೆ, ಫೆರ್ಮ ಎಂಬೀ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮಂಡಿಸಿರುವರು. ಈ ರೀತಿಯು ಮುಂದೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾ ಜ್ಯಾಮಿತಿ (Analytical geometry) ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿತು. ಇದರ ಪ್ರಾಥಮಿಕವಾದ ಕೆಲವು ಆಶಯಗಳನ್ನು ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿಯೂ ಬಳಿಕ ಬರುವ **ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೆಂ (ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ–ಭೋದನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು • ಸೂಚಕಾಕ್ಷಗಳು, ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬೀ ಆಶಯಗಳು. • ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನ • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ ಎಂಬ ಆಶಯ. • ದೂರ ಎಂಬ ಆಶಯದ ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು.	• ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಗ್ರಿಡ್‌ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಿರುವ ಸೌಕರ್ಯವನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಗ್ರಿಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಲಿರುವ ಸೌಕರ್ಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಅಕ್ಷಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • X ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, Y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ • ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಂತರವಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು • x, y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ತ್ರಿಕೋನ, ಸಮಾನಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು • ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು	• ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳು ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಗುರುತಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು • ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಹಲವು ರೀತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು • x, y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಹಲವು ಆಕೃತಿಗಳ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು • ಕಂಪ್ಯೂಟರಿನಲ್ಲಿ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

<table>
<tr><th>ಆಶಯಗಳು</th><th>ಕಲಿಕಾ–ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು</th><th>ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು</th></tr>
<tr><td></td><td>• ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಂತರವಾದ ಗೆರೆಗಳ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.
• ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸರಿಸುಮಾರು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ
• X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ
• Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ
• ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಂತರವಲ್ಲದ ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ .
• ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (x_1, y_2), (x_1, y_2)ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
• ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಜಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.
• ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ</td><td>• ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.
• ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಅವು ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ಜಾಮಿತಿಯ ರೂಪಗಳ ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.</td></tr>
</table>

ಆಶಯ ವಿಕಾಸ

ಈ ಪಾಠಭಾಗದ ಆಶಯಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂದು ಬದಲಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದೆಂಬ ಮೂಲಭೂತ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಮೊದಲ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವುದು. ಇದು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸುವುದರ ವಿಕಸಿತ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

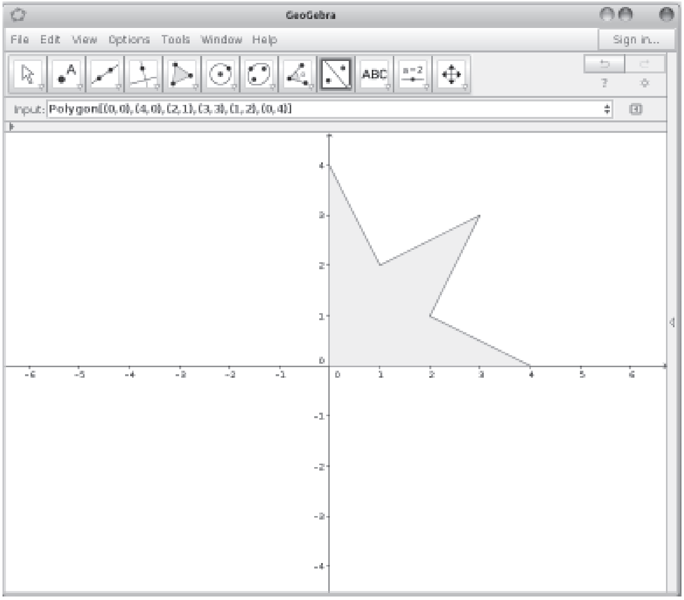
ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಲದ (ದೆಕಾರ್ತೆ ತಲ) ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಾಗಿಯೂ ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಂತರವಾಗಿಯೂ ಒಂದು ಆಯತವಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಆಯತವೇ ಇರುವುದಷ್ಟೆ ಈ ಆಯತದ ಮೂರನೆಯ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೆ ಮೊದಲ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೆಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ದೂರವನ್ನೂ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಮೂರನೆಯ ಭಾಗವು ಈ ರೀತಿ ರಚಿಸುವ ಆಯತಗಳ ಕುರಿತಾಗಿದೆ.

ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ದೆಕಾರ್ತೆ ತಲದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನೂ ಮುಂದೆ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನೂ **ಜಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವು** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

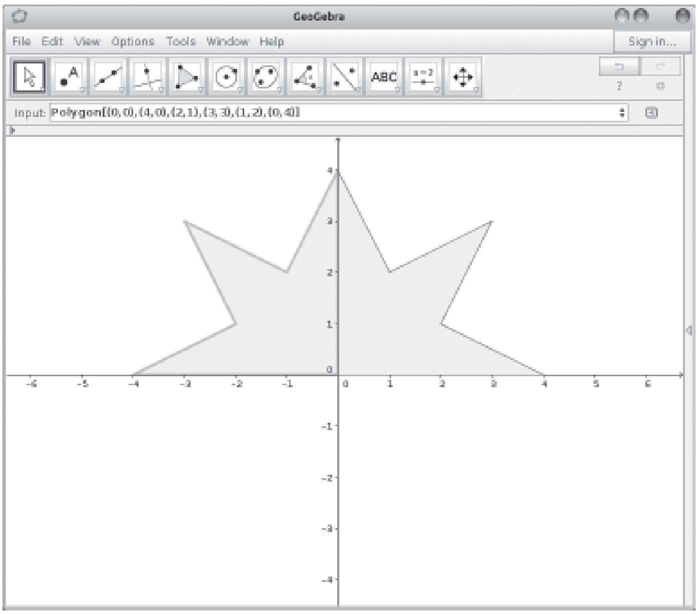
ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನಕಲು ಮಾಡಲು ಅದನ್ನು ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ಭಾಗಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕಭಾಗಗಳನ್ನು ನಕಲು ಮಾಡುವುದು ಎಂಬುದು ಚಿತ್ರಕಲೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠವಾಗಿದೆ. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ನಕ್ಷತ್ರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವುದನ್ನು ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟರಿನ ಮೂಲಕ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಇದನ್ನು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೂಲಕ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

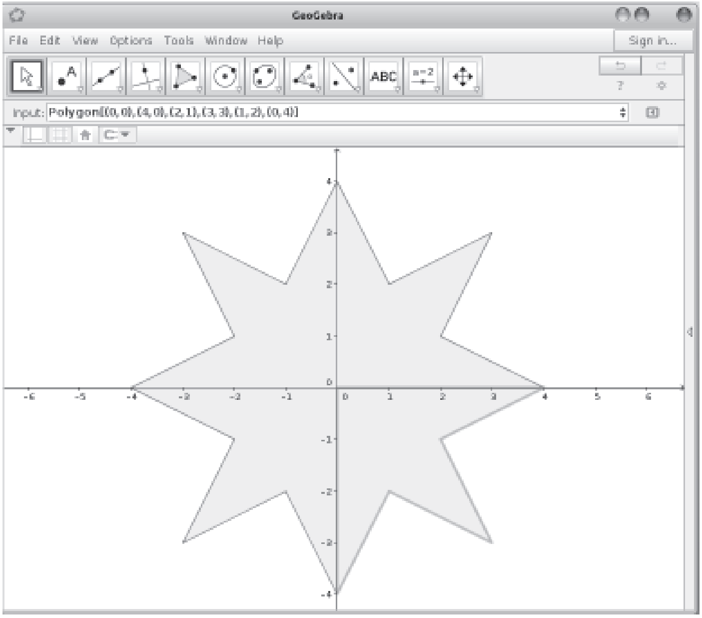
ಅದಕ್ಕೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಹೇಳುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವ ತಯಾರಿಯಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ. ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಬಾರ್‌ನಲ್ಲಿ Polygon [(0, 0), (4, 0), (2, 1), (3, 3), (3, 3), (1, 2), (0, 4)] ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಚಿತ್ರವು ಲಭಿಸುವುದು.



ಇನ್ನು Reflect about Line ತೆಗೆದು ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಅದರ ಎಡಭಾಗದ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ, ಚಿತ್ರವು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುವುದು.



Reflect about Line ಎರಡು ಸಲ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡೋಣ



ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿದ ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು Axes ನ್ನು ಮರೆ ಮಾಡಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬೇಕು. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೇಳಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಕಲು ಮಾಡುವ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ Grid ತೋರಿಸಿಕೊಡಬೇಕು. ಬಳಿಕ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸಮಾನವಾದ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕಾಣಲಿರುವ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಸಬೇಕು. ಬಳಿಕ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸಮಾನವಾದ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕಾಣಲಿರುವ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಸಬೇಕು. ಅದರ ಬಳಿಕ ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಚಿತ್ರದ ಹೊರತಾಗಿ ಮೂರು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿಯೂ right click ಮಾಡಿ ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಮರೆಮಾಡಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು Input Bar ನಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

ಇತರ ಭಾಗಗಳ ಶಿರಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವುದೆಂಬುದರ ಮೂಲಕ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಬೇಕು. Axes ನ್ನು ತೋರಿಸಿ ಇದನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ದೃಢಪಡಿಸಬೇಕು. ಇನ್ನು ಮಕ್ಕಳೆಲ್ಲರ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಫ್ ರಚಿಸಿ ಶಿರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

ಕಂಪ್ಯೂಟರು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೌಕರ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಪೂರ್ತಿ ನಕ್ಷತ್ರದ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಬೇಕು.

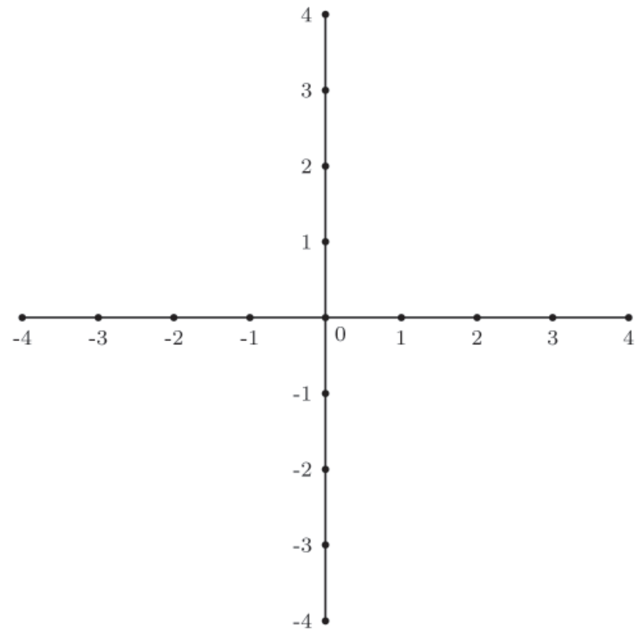
ಸ್ಥಾನಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ ವಿಷಯಗಳ ಗಣಿತಪರವಾದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಡೆಸುವುದು. ಅಕ್ಷಗಳು, ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬೀ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಮಂಡಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಅವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನಲ್ಲ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಎಂಬ

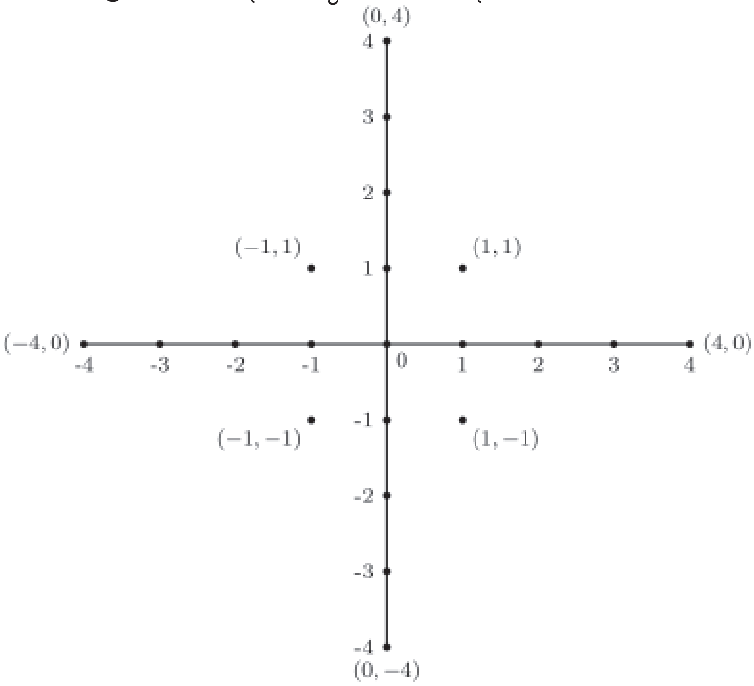
ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಬದಲಾಗಿ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಪ್ರಯತ್ನದ ಮೂಲಕ ಈ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ರೂಪಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರವನ್ನು(ಕಂಪ್ಯೂಟರಿನಲ್ಲೋ ಕಾಗದದಲ್ಲೋ) ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ರಚಿಸುವುದನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವುದರ ಜತೆಗೆ ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ನಕಲು ಮಾಡಬಹುದೆಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೂಲಕ ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲ ಭಾಗದ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಂಡು ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂದು ಆಲೋಚಿಸಬೇಕು. ಕೋಟೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದರ ಬದಲು ಮಧ್ಯದ ಮೂಲಕ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ದೂರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಸಾಕು ಎಂದು ಮನವರಿಕೆಯಾಗಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಈ ಚಿತ್ರದ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಳಿಕ ನೋಟುಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ವಿದಾನವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

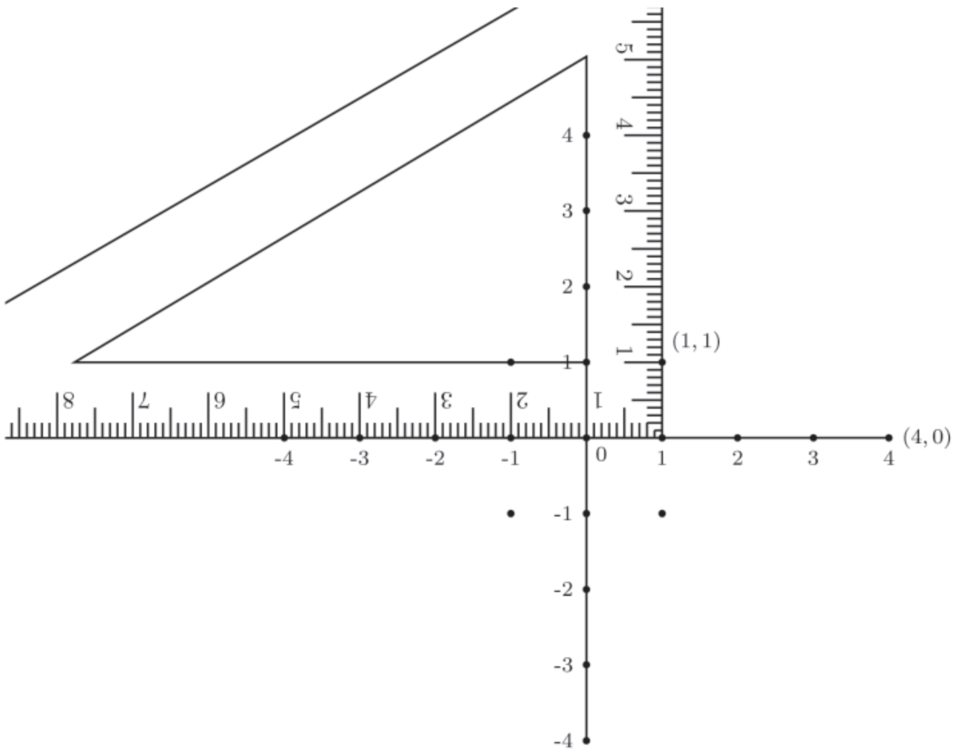
i. ಎಂಟು ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇದರ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇದರ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಎರಡೂ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಗುರುತಿಸಬೇಕು.



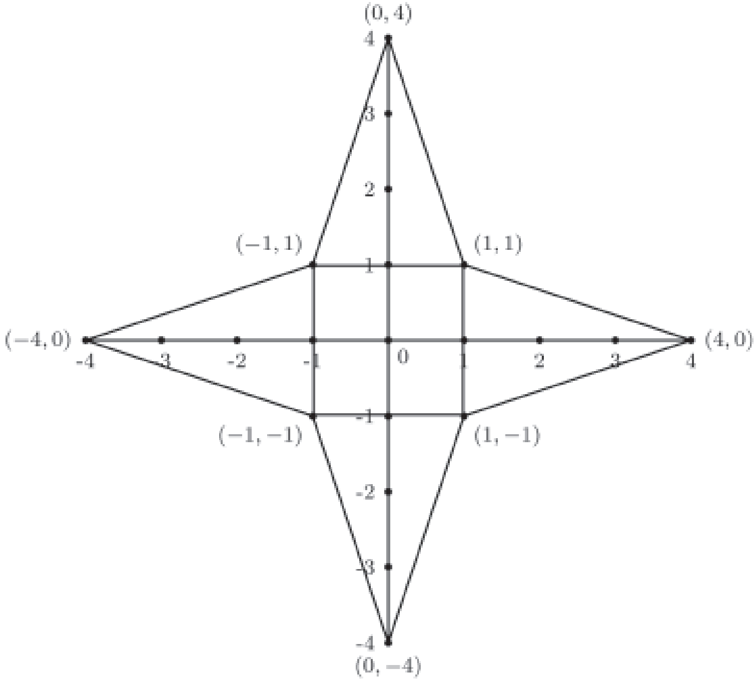
ii. ರಚಿಸಬೇಕಾದ ಚಿತ್ರದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಗುರುತಿಸಬೇಕು.



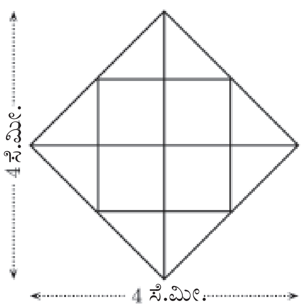
ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಮಟ್ಟವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

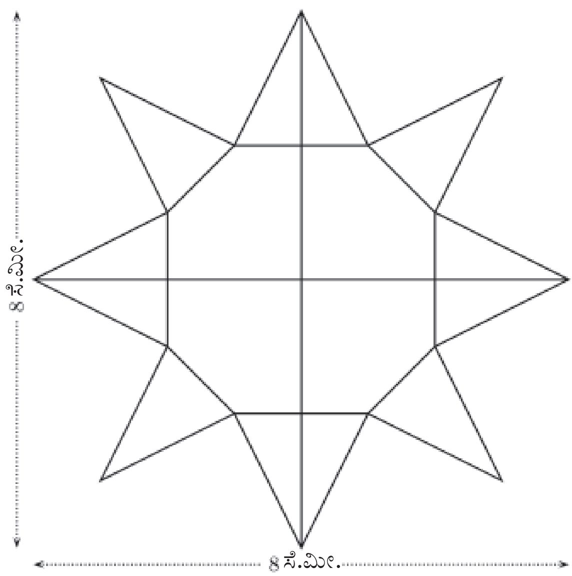


iii. ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬೇಕು.



ಬಳಿಕ ಇದೇ ರೀತಿ ಇತರ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

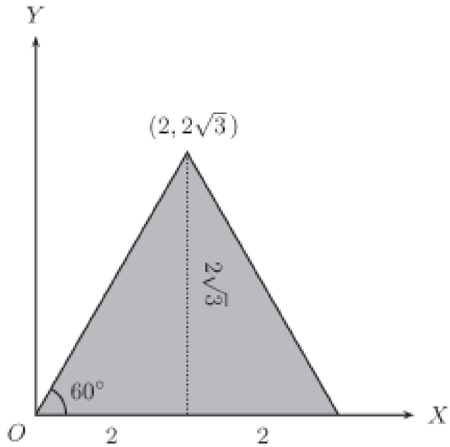




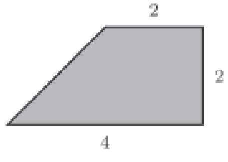
ಅದರ ಬಳಿಕ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅಕ್ಷಗಳು, ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬೀ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಸಬೇಕಾದ ಅತಿ ಪ್ರಧಾನವಾದ ವಿಷಯವು ಒಂದು

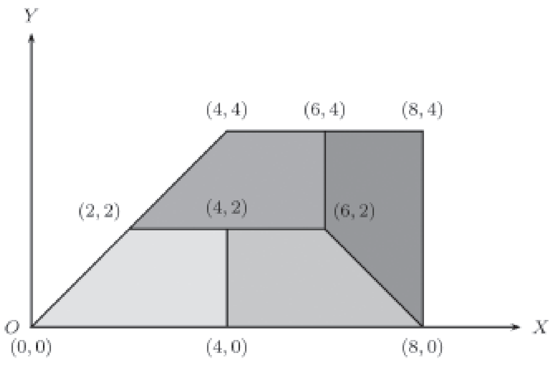
ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು(ಬಳಿಕ ಕೆಲವು ಜಾಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು) ವಿಶ್ಲೇಷಣಾ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ ಅತ್ಯಂತ ಸೌಕರ್ಯವಿರುವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸೌಕರ್ಯಪ್ರದವಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಏಕಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಒಂದೇ ಚಿತ್ರವನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿಯೂ ವಿಭಿನ್ನ ಏಕಕಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿಯೂ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವುದು.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮೂರಕ್ಕೆ ವಿವರಣೆಯೊಂದೂ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ನಾಲ್ಕನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪಾಠದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ಭಾಗವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.



ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಸಮಲಂಬಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿನ **ಸಮಲಂಬಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಸಮಲಂಬದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಲಂಬಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

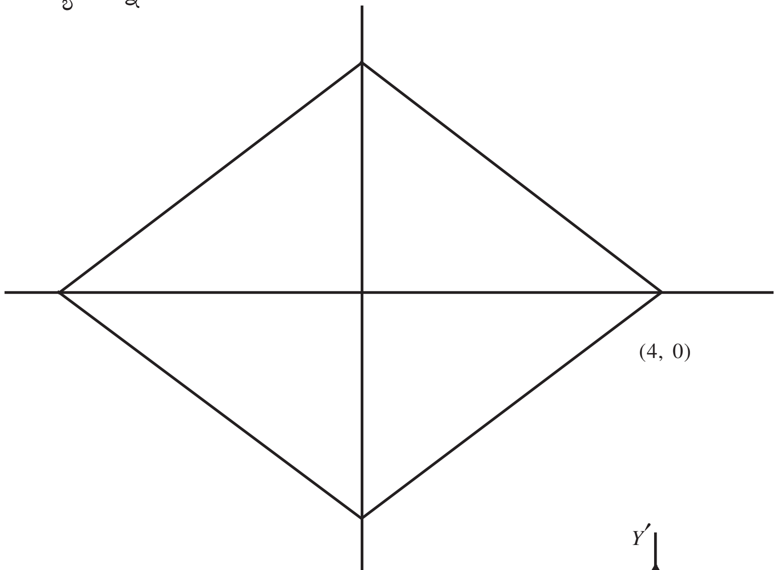




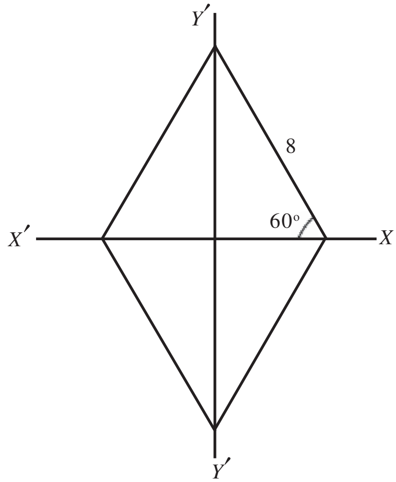
ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

(1) ಕೇಂದ್ರವು ಆಧಾರ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

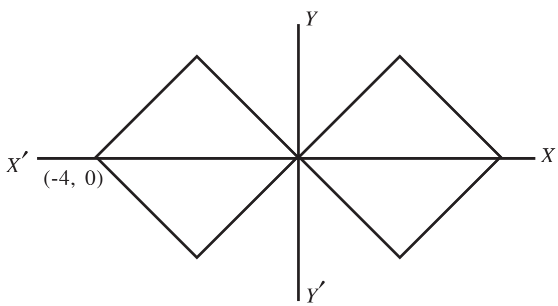
(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಭುಗಳ ಉದ್ದ 5 ಸೆಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾನಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವಿದೆ. ಇದರ ಕರ್ಣಗಳು ಅಕ್ಷರಗಳಾಗಿಯೂ ಉದ್ದದ ಏಕಕ ಒಂದು ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರಾಗಿ ತೆಗೆದು ಒಂದು ತೆಗೆದು ಒಂದು ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (4, 0) ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



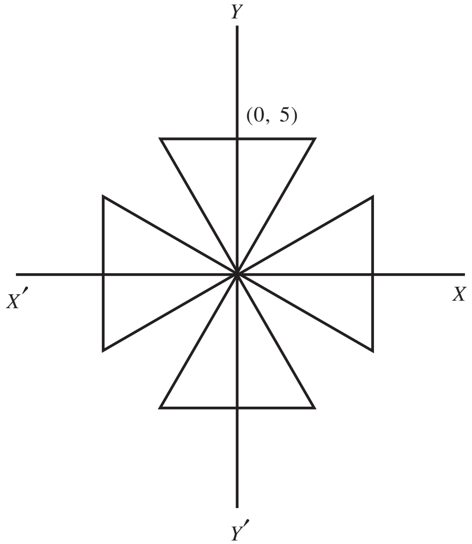
(3) ಸಮಾನಂತರ ಸಮ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜ 8 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜವು x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವು 60° ಎಂದೂ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಉದ್ದದ ಏಕಕ ಒಂದು ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

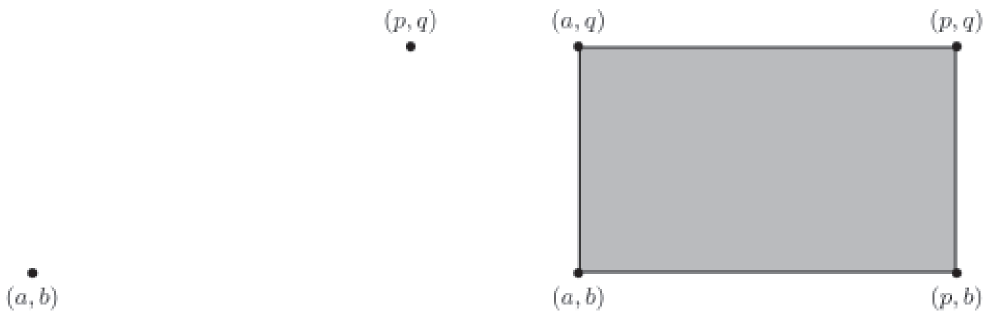


(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ನಾಲ್ಕು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಯತ ಲೆಕ್ಕಗಳು

ದೆಕಾರ್ತೆ ತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೊಂದೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದೂ, ಮೊದಲ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಆಯತದ ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವುದನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿಯೂ **ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜ ಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾದಲ್ಲಿಯೂ ಆವರ್ತಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಒಂದು ಸತ್ಯಾಂಶವಾಗಿದೆ.



ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇವನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯದ ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

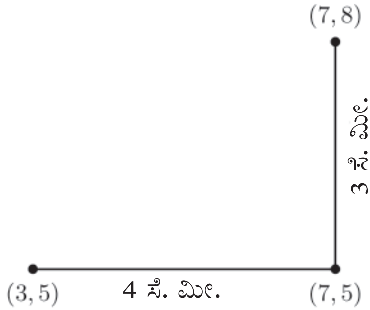
ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇತರ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಂತರವಾಗಿ ಸಾಗುವಾಗ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದೂ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಂತರವಾಗಿರುವಾಗ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಮೊದಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಳಿಕ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಪಡಿಸುವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವುದು.

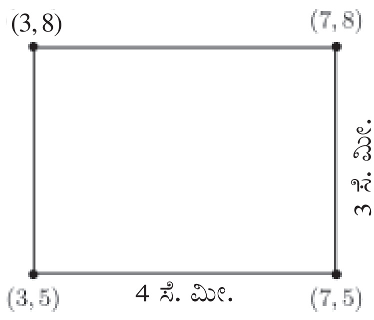
ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಈ ಚರ್ಚೆಯ ಭಾಗವನ್ನಾಗಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಮೊದಲ ಉಪಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಬೋರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅದರ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $(3, 5)$ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿ ಆರಂಭಿಸೋಣ. ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ಮೊದಲ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಮಕ್ಕಳು ಗುರುತಿಸಿ ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಇನ್ನು ಮೊದಲು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದಕ್ಕೆ x ಅಕ್ಷವು ಸಮಾನಂತರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಂಕಲ್ಪಿಸಬೇಕು. ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಲಿರುವ ಏಕಕ 1 ಸೆ. ಮೀ. ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ 4 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು$(7,5)$ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈಗ ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುವಿನ 3 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಂದು ಎಂದು ಕಂಡರೆ ಅದನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.



ಇನ್ನು ಇಡೀ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರವನ್ನು $(3,8)$ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.



ಬಳಿಕ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಉಳಿದಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಮಕ್ಕಳೇ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ (5,4) ಎಂಬ ಬಿಂದು (6,2) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ(5,4) ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೊದಲು ಗುರುತಿಸುವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವುದು. ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ ರಚಿಸಲಿರುವ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳೂ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಗಳಾಗಬಹುದು.

- ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳ ಕೆಲವು ಜೋಡಿ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಂತರವಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

  (a) (3, 5), (7, 8) (b) (2, −1), (−3, 8) (c) (2, −1), (−3, −6)

  (d) (2, −1), (7, −5) (e) (2, −1), (0, 0)

ದೂರಗಳು

ಕಳೆದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಆಶಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿಯೇ ಅಥವಾ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆ x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಬೇಕು.

ಬಳಿಕ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಅವುಗಳ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆಯೆಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ತಲುಪಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಎಂಬ ಅರ್ಥದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಮಾತ್ರವೇ ಕೇವಲ ಬೆಲೆ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು. ಗೊತ್ತಿರುವ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾಗ ಮೊದಲು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಂತೆ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು.

ಇನ್ನು x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಬದಲಾಗಿ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಶಿರದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ದೂರವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ವಿವರಿಸೋಣ. ಸಮಾನ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಿಲ್ಲ. ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಇದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬೇಕು.

ಮುಂದಿನ ಭಾಗವು ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆರಡೂ ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥವಾದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೂ ಸಮಾನಂತರವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಮಗುವು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಆಗ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂಬ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದ ಮೂಲಕ ಆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಅದರ ಬಳಿಕ ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಂತೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು. (ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೂ ಸಾಕು) ಇದರಿಂದ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಬಳಿಕ ಕರ್ಣ ಉದ್ದವನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಗಬಹುದೆಂದೂ, ಅದು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಾದರೂ ದೂರವನ್ನು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬೇಕು.

ಕೊನೆಯದಾಗಿ, ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಎಲ್ಲಾ ರೀತಿಯಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಬೀಜ ಗಣಿತದ ರೂಪವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವಿದೆಯಂದೂ ತಿಳಿದಿರುವ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾಗ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯದೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು ಎಂಬುದಾಗಿ ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು, ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನೆಲ್ಲಾ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಮಾಡಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು x ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, ಎಡಭುಜ y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯದೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಬಳಿಕ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಮೂರನೆಯ ಭುಜದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು. ಆಗ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಈ ವರ್ಗಗಳೂ 10, 40, 50 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. $10 + 40 = 50$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದು.

ಒಂದು ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳ ಭಾಗದಲ್ಲೋ ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲೋ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕವು ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದು. ಇಲ್ಲಿಯೂ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಆಧಾರ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರದ ವರ್ಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವಾದ 100ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೋ, ಹೆಚ್ಚೋ ಅಥವಾ 100 ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ (6, 9) ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ಆಧಾರಬಿಂದುವಿಗೂ ಇರುವ ದೂರದ ವರ್ಗ $6^2 + 9^2 = 117$. ಇದು 100ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರ ಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ (6,8) ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದೇ ಎಂದು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಕೇಳಬೇಕು. ಅಗತ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ 100ನ್ನು $6^2 + 8^2$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $8^2 + 6^2$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ ಎಂಬ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. ಆದರೆ (8,6) ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು

ಬಳಿಕ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮತ್ತು ಅದರ ಋಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವರ್ಗವಿರುವುದೆಂಬ ಚಿಂತನೆಗೆ ಮಗುವನ್ನು ಮುನ್ನಡಿಸಿದರೆ (6,8) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (6,−8,), (−6,8), (−6,−8) ಎಂಬ ಇತರ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳೂ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. (8,6)ರಿಂದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬರೆದಾಗ ಒಟ್ಟು 8 ಬಿಂದುಗಳಾದುವು.

x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಲೆಕ್ಕದ ವೃತ್ತವು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $(x, 0)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕಿರುವ ದೂರದ ವರ್ಗವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$(x - 1)^2 + 1 = 2$$

ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಇದರಿಂದ $x = 1 \pm 1 = 0$ ಅಥವಾ 2 ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ ವೃತ್ತವು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು $(0, 0), (2, 0)$. ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು y ಅಕ್ಷವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು$(0, 0), (0, 2)$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಐದನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ (1, 2), (2, 3), (3, 1)ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಆಗ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಲಭಿಸುವುದು.

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - 4y &= -3 \end{aligned}$$

ಇದರಿಂದ

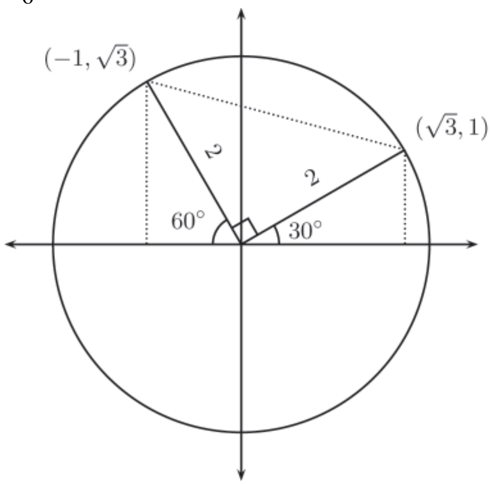
$$x = \frac{13}{6} \quad y = \frac{11}{6}$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು $\left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$.

ಇನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗ

$$\left(\frac{13}{6}-1\right)^2 + \left(\frac{11}{6}-2\right)^2 = \frac{50}{36}$$

ಇನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.



ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ *A*, *B* ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದದ ವರ್ಗ

$$(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 = 2(3 + 1) = 8$$

ಎಂದೂ, ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು $2\sqrt{2}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಮತ್ತು ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 90^0. ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು

$$2 \times 2 \times \sin\left(\frac{90}{2}\right)^{o} = 4 \sin 45^{o} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

ಎಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಆಶಯಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳು

1. $(-2, 3)$ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವು *x* ಅಕ್ಷವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವು? $(0–6)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ.

2. ಆಧಾರ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ *x, y* ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ ಎಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳು ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರಬಹುದು? ಕೇಂದ್ರ $(2,3)$ ಆದರೋ?

3. $(1, 1)$, $(5, 1)$ $(7, 8)$, $(3, 8)$ಎಂಬಿವುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು

ಪೀಠಿಕೆ

ವೃತ್ತಗಳ ಕುರಿತಾದ ಹಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಈ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿಯೂ ಕಲಿತೆವು. ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟವುಗಳಾಗಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬ ಹೊಸ ಆಶಯವನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇತರ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಂತೆಯೇ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಸಮ್ಮಿಶ್ರಣಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಂಧಿಸುವ ಗೆರೆ ಎಂಬ ನಿರ್ವಚನಕ್ಕೆ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮೊದಲಾಗಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ನಿರ್ವಚನವು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿನ ವಕ್ರಗಳಿಗೆ (curves) *ಸರಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುವುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ವಕ್ರಗಳಿಗೂ ಸರಿ ಹೊಂದುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿರುವುದು. ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ತರಗತಿಯ ವಕ್ರಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳ ಕುರಿತಿರುವ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿಂದಲೇ ಆರಂಭಿಸೋಣ.*

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ ಎಂಬ ಆಶಯ • ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು. • ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, ಅದರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು, ಇವುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆ. • ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವು ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ.	• ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾದು ಹೋಗುವ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಚಿತ್ರಗಳು. • ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಲನಾತ್ಮಕತೆಯ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಪ್ರಸೆಂಟೇಶನ್. • ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜ್ಯದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 90° ಆಗಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನ, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು. • ಜ್ಯಾದ ಎರಡೂ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು. • ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. • ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಎರಡೂ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ, ರಚಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ, ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ, ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಅದರ ತುದಿಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. • ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. • ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು. • ಒಂದು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.	• ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದ ತುದಿಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಉದ್ದವಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಚರ್ಚೆ.	• ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ವೃತ್ತವನ್ನು ತುಂಡರಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. • ಪರಸ್ಪರ ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಗೆರೆಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಾಗಿದೆ. • ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. • ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.	• ವೃತ್ತವನ್ನು ತುಂಡರಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದದ ವರ್ಗ, ವೃತ್ತವನ್ನು ತುಂಡರಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗದ ಉದ್ದ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ವಿಭಿನ್ನ ಆಯತಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ಅದರ ಎದುರಿರುವ ಬಾಹ್ಯವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಅಂತಃವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನದ ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳು, ವಿವರಣೆ. • ಅಂತಃ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿ. • ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಹೆರೋನ್‌ನ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ತಲುಪುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು.	• ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿಕೊಂಡು ಅದರ ಒಳಗೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಆಶಯದ ಬೆಳವಣಿಗೆ

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಐದು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು.

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಕೋನ, ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಕೋನ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಯಾಗಿ ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ.

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವಿವಿಧ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಲಾಗಿದೆ. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬಲ್ಲಿಗೆ ತಲುಪಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವುದು ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ. ಆಗ ಯಾವ ಜೊತೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯೂ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಐದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮುಂದುವರಿದ ಭಾಗವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವು ಸಿಗುವುದು. ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದರೆ ಈ ಪಾಠವು **ವೃತ್ತಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ** ಎಂಬೀ ಪಾಠಗಳೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

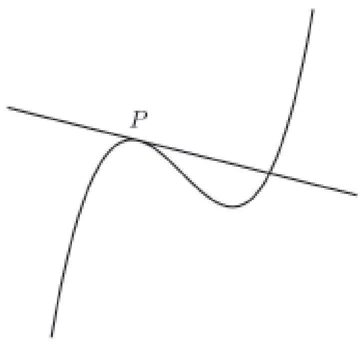
ಪಾಠಭಾಗದ ಮೂಲಕ

ಗೆರೆಯೂ ವೃತ್ತವೂ

ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಹೀಗೆ ನಿರ್ವಚಿಸಿರುವನು (ಪುಸ್ತಕ 3, ನಿರ್ವಚನ 2):

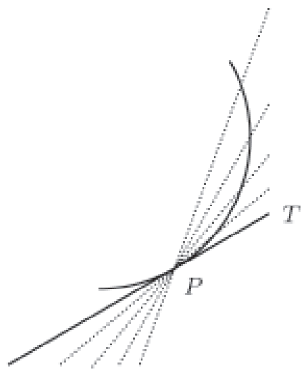
> ಒಂದು ಗೆರೆಯು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಎಷ್ಟೇ ವೃದ್ಧಿಸಿದರೂ ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗದಿರುವುದೂ ಆಗಿದೆ. ಎಂದಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

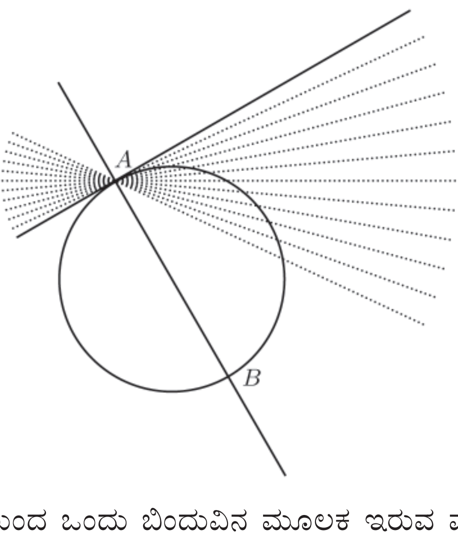


ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆ, ವಕ್ರವಾಗಿ P ಎಂಬ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು ಆದರೂ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವಕ್ರಗೆರೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ವಕ್ರಗೆರೆಯ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಮೀಪವಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಎರಡನೆಯ ಬಿಂದು P ಯ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವಾಗ ಈ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗೆರೆಯ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದಾದರೆ ಆ ಗೆರೆಯು ವಕ್ರಗೆರೆಯ P ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.



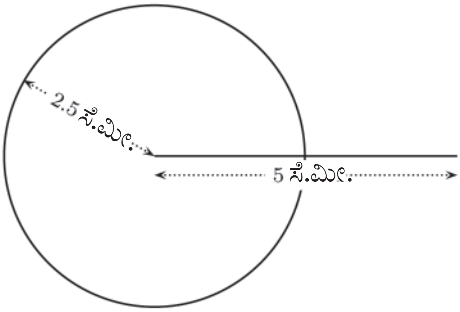
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿರಿಸಿ, ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಲವು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನೆಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

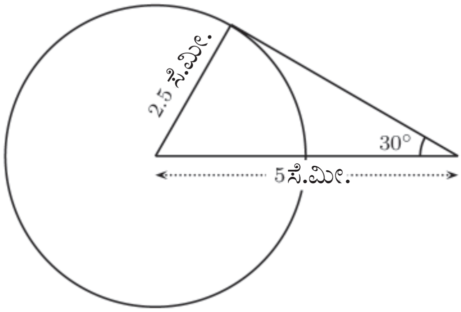


ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇರುವ ವ್ಯಾಸವೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಚಲನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಅದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನೂ ಎಳೆಯಬೇಕು. 0° ಯಿಂದ 90° ಯ ವರೆಗೆ 5° ಯಂತೆ ಬದಲಾಗುವ ಒಂದು Angle Slider ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. Angle with given size ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಬೇಕು. ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ನೀಡಬೇಕಾದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಈ ಸ್ಲೈಡರಿನ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ನಂತರ Slider ನಲ್ಲಿ Animation ಕೊಡಬೇಕು. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ಜ್ಯಾವು ಮೆಲ್ಲಗೆ ತಿರುಗಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುವುದೂ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು 0° ಯಿಂದ 90° ಆಗುವುದನ್ನೂ ನೋಡಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. ಒಂದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಅದರ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜವು ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 30° ಆಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಆಗ, ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನೂ ರಚಿಸಿ, ಗೆರೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 30° ಕೋನವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು.

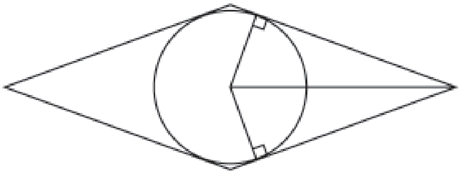


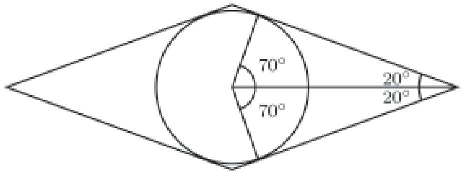


ಒಂದು ಭುಜ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು 60°, 30° ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ ಅದರ 60° ಯ ಶಿರವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ ಅದರ ಮೂಲಕವಿರುವ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜವು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಈ ಎರಡು ರೀತಿಯನ್ನೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ.

ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಣ್ಣ ಕೋನಗಳು 60°, 30° ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನಂತರ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಸುಲಭ (ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $2\sqrt{3}$ ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ)

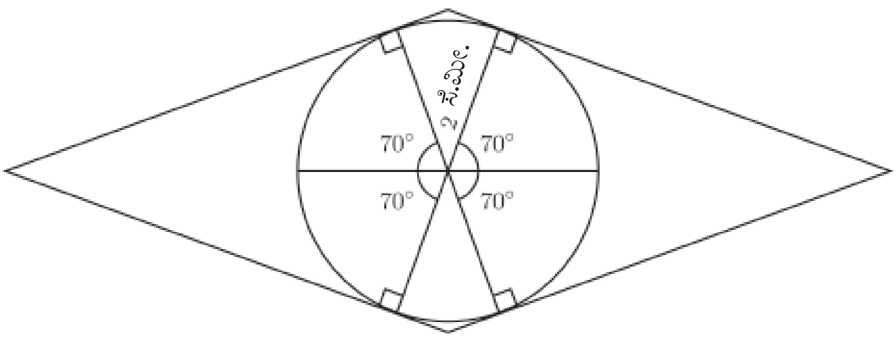
ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಮೊದಲು ಒಂದು ಕರಡು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದು ಕೆಲವು ಕೋನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಲ ಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಲಭಿಸುವುದು.





ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಇದೇ ರೀತಿ 70º ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳೇ ಲಬಿಸುವುದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಆಗ ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಮೊದಲು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಈ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ 70º ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವು ಸಿಗುವುದು.



ಇದೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಉಳಿದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 40º ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಇದರಿಂದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಈ ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವುದು. ಆಗ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು 40º ಕೋನದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ನಂತರ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ 60º ಇರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಕೇಳಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಚರ್ಚೆಗಳ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ತಲುಪಬಹುದು:

(i) ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವು ಸಿಗುವುದು.

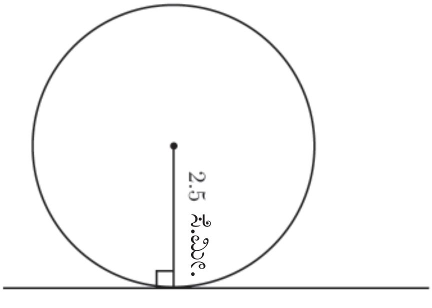
(ii) ಈ ರೀತಿಯ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು ವ್ಯಾಸದ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವುದು.

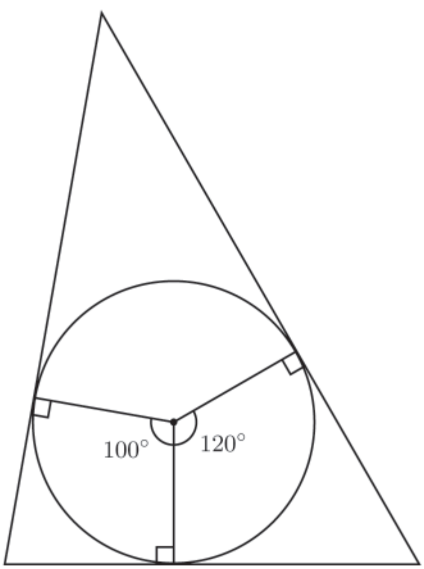
ಆಗ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವುದು, ಕೋನಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮ ಚತುರ್ಭುಜ ಅಂದರೆ ಚೌಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗೆ ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ಕಿತು. ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಈ ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕವೇ ದೊರೆಯುವುದಲ್ಲವೇ.

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು, ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗುವಂತೆ ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

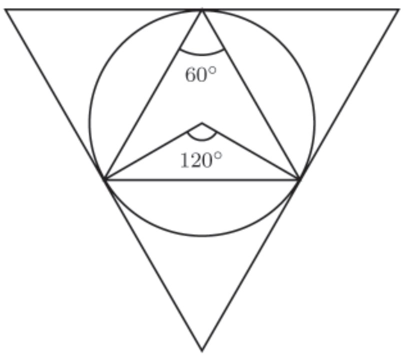
ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವಂತೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗೆ ಇರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರ ಮೊದಲು, ಅದರ ಒಂದು ಕರಡು ಚಿತ್ರ ಬಿಡಿಸಿ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಪರಿಪೂರಕವಾದ 140°, 120°, 100° ಆಗಿರುವುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬೇಕು. ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ಬಾಗದೆ ಎಳೆಯಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಆಲೋಚಿಸುವ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು, ನೆಟ್ಟಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಲಂಬವನ್ನೂ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಬೇಕು. ನಂತರ ಈ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ 100°, 140° ಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸೇರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು.

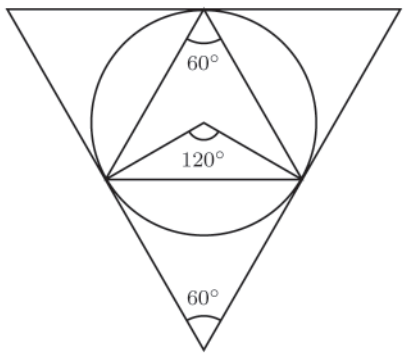




ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನೂ ಚರ್ಚಿಸುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಎಂಟನೇ ಕ್ಲಾಸಿನ, **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. (ಅಥವಾ ಹೀಗೆ ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಈ ಪುಸ್ತಕದ **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ) ಈಗ ನೋಡಿದ್ದು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನದ ಅಳತೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಂತಃವೃತ್ತವಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂದು. ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತಃವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇವುಗಳು ಹೇಗೆ ಎಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈ ಪಾಠಭಾಗದ **ಗೆರೆಯೂ ವೃತ್ತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

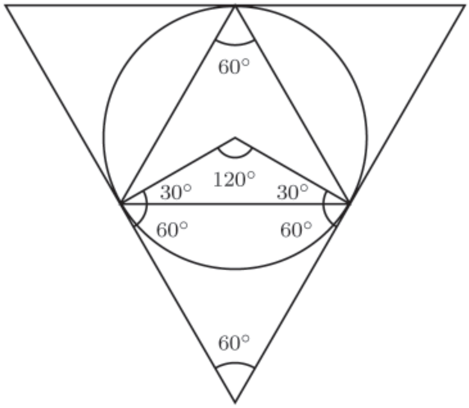
ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $2 \times 60^{\circ} = 120^{\circ}$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.





ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿ 60° ಆಗಿದೆ ಎಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜವೂ ಸೇರಿದಾಗ ಲಭಿಸುವುದು. ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು 30° ಯಂತೆ ಇರುವುದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಭುಜಗಳೂ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $90 - 30 = 60^{\circ}$ ಆಗಿರುವುದು.

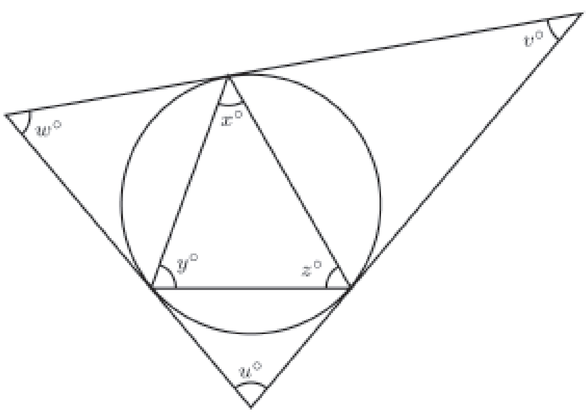


ಹಾಗೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾದ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಇದರಿಂದ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀಡುವಾಗ, ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಲ್ಲದ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು 40°, 60°, 80° ಎಂದಾದರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು 100°, 60°, 20° ಎಂದಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಆದರೆ ಆಸಕ್ತಿಯುಳ್ಳ ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇದೊಂದು ಸಂಶೋಧನೆಯ ವಿಷಯವಾಗಬಹುದು. ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನವು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವು ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗುವುದು ಹಾಗೂ ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು. ಆಗ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಲ್ಲ.

ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಲಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಚಿತ್ರವು ಲಭಿಸುವುದು.



ಇದರಲ್ಲಿ

$$u = 180 - 2x \quad v = 180 - 2y \quad w = 180 - 2z$$

ಎಂದಾಗಿದೆ. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನನುಸರಿಸಿ x, y, z ಎಂಬ ಮೂರು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

- $x + y + z = 180$
- $180 - 2x$, $180 - 2y$, $180 - 2z$, ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ x, y, z ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕು.

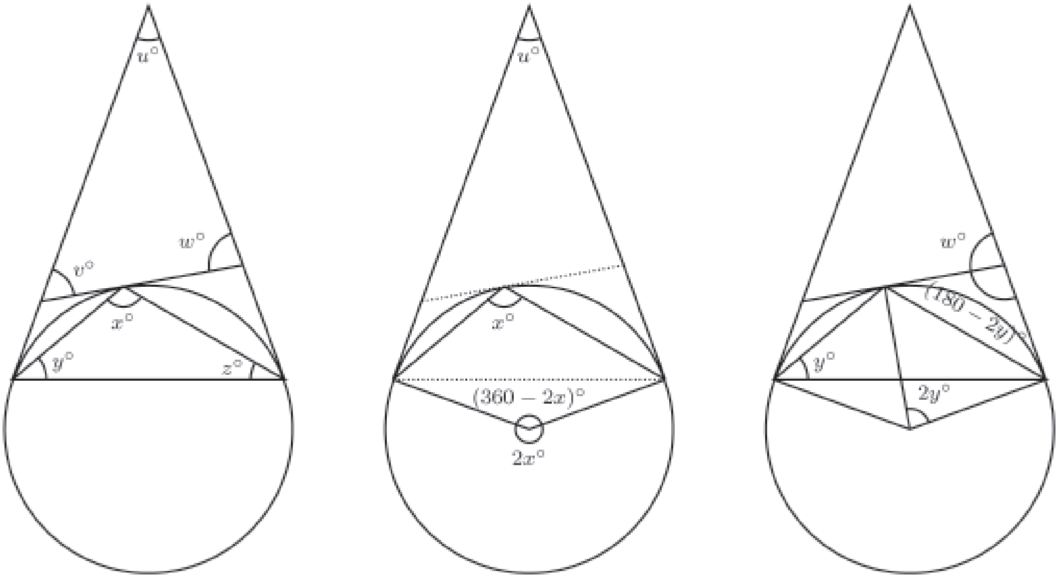
ಇದನ್ನು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಬೇಕು. $180 - 2x = x$, $180 - 2y = y$, $180 - 2z = z$ ಎಂದು ಸಿಗಬೇಕಾದರೆ $x = 60$, $y = 60$, $z = 60$ ಎಂದೇ ಆಗಬೇಕು.

$180 - 2x = x$, $z = 180 - 2y = z$, $180 - 2z = y$ ಎಂದಾದರೋ? $x = 60$, $2y + z = 180$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. $x + y + z = 180$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $x + y + z = 2y + z$, ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. $x = y$, ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ $x = 60$, $y = 60$ ಆಯಿತು. ಇನ್ನು $z = 60$ ಆಗಲೇಬೇಕಲ್ಲವೇ.

$180 - 2x = y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ? ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ $2x + y = 180$, $x + y + z = 180$ ಎಂಬಿವುಗಳಿಂದ $x + y + z = 2x + y$ ಎಂದೂ ಇದರಿಂದ $x = z$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನು $180 - 2y$ ಎಂಬುದು x ಅಥವಾ z ಆಗಬೇಕು. $180 - 2y = x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x + 2y = 180$, $x + y + z = 180$. ಇವುಗಳಿಂದ $y = z$ ಎಂದಾಗುವುದು. $180 - 2y = z$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇದೇ ರೀತಿ $y = x$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಹೇಗೇ ಆದರೂ $x = y = z$ ಎಂದೇ ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳೂ ಲಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದು.

ಇನ್ನು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾದರೆ? ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಹಾಗೂ ಅದರ ಬೀಜಗಣಿತಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು.



ಮಧ್ಯದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ,

$$u = 180 - (360 - 2x) = 2x - 180$$

ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಿಂದ $w = 2y$ ಎಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು ಇದೇ ರೀತಿ $v = 2z$ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆಗುವುದು.

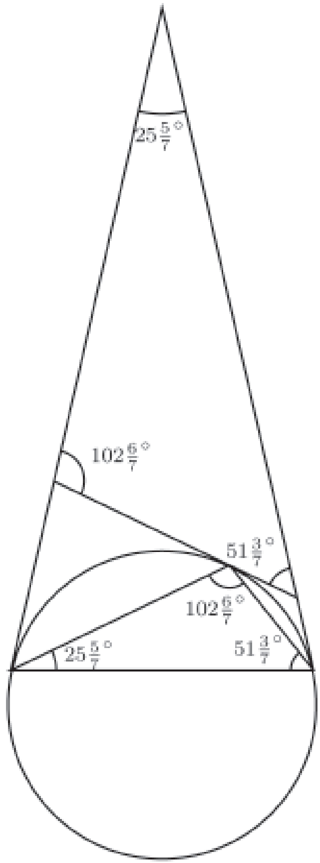
ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸೂಚನೆಗಲನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, x, y, z ಎಂಬ ಮೂರು .... ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

- $x + y + z = 180$
- $2x - 180$, $2y$, $2z$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ x, y, z ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕು.

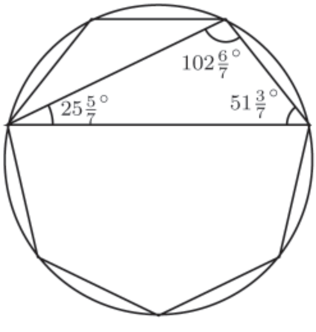
$2 = 2x - 180 = z$ ಎಂದಾದರೆ $x = 180^{o}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. $y = 2z$, $z = 2y$ ಎಂದಾದರೆ $y = 4y$ ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ $y = 0$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

$x = 2y$, $y = 2z$, $z = 2x -180$ ಎಂದಾದರೋ? ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ $x = 4z$, ಎಂದೂ ಇದನ್ನು ಮೂರನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $z = 8z - 180$ ಎಂದೂ ಇದರಿಂದ $z = \frac{180}{7}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ನಂತರ $y = \frac{360}{7}$, $x = \frac{720}{7}$ ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು $25\frac{5}{7}^\circ$, $51\frac{3}{7}^\circ$, $102\frac{6}{7}^\circ$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಇದೇ ಕೋನಗಳಿರುವುದು.

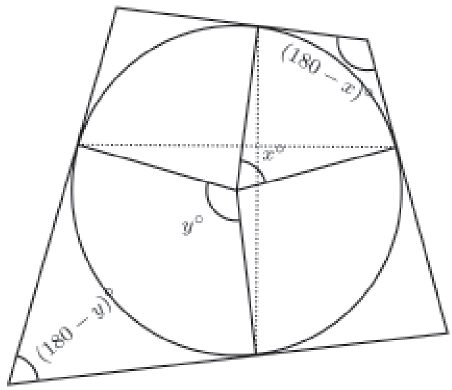


ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಒಂದು ಸಮಸಪ್ತಭುಜದ ಕೆಲವು ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದು ಎಂಬುದು ಕುತೂಹಲಕರವಾದ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ.



ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕರ್ಣ ಹಾಗೂ ಸಣ್ಣ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳ ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಇವುಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನಾಗಿ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಮೂರನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿರುವ ಈ ಗೆರೆಯು ಜ್ಯಾದ ಸಮಭಾಜಕವೂ ಆಗಿರುವುದು.

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಚಾಪಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಅರ್ಧವೃತ್ತವು ಸಿಗುವುದೆಂದು **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. (**ಜ್ಯಾವೂ ಕೋನವೂ ಚಾಪವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ 7ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆ) ಅಂದರೆ, ಹೀಗಿರುವ ಚಾಪಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಆಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.



ಇದರಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳಾದ $x°, y°$ ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$(180 - x) + (180 - y) = 360 - (x + y) = 180.$$

ಅಂದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವ್ಯಾಸವಾದರೆ ಅದರ ತುದಿಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಲಂಬವಾಗಿರುವುದು. ಅದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬವಾಗಿದೆ. (**ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ವೃತ್ತವೂ ಚತುರ್ಭುಜವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗದ ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆ)

ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳೂ ವ್ಯಾಸವಾಗುವಾಗ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಜೊತೆ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗುವುದು. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು. ಹಾಗೆ ಅದು ಒಂದು ಆಯತವಾಗುವುದು. ಅದರೊಳಗೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವೂ ಇರುವುದರಿಂದ ಅದೊಂದು ಚೌಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜ್ಯಾಗಳೂ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವಾಗ ಚತುರ್ಭುಜವು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಚಲನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಿದ ನಂತರ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯ ಗಣಿತದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ ಪಾಠವು ಮನೋಹರವಾದ ಅನುಭವವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಜ್ಯಾವೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೂ

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ಆ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಳೆದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆಯೂ ಹೇಳಬಹುದು:

> ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ, ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತಾಗಿ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 100° ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ 50° ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಈ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು.

ನಂತರ ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಜ್ಯಾಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಮತ್ತು ಯಾಕೆ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೆಂಬುದರ ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ನಂತರ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವೂ ಅದು ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಲಿತಂತೆ ನೆನಪಿಸಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಬದಲಾಗಿ ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜ್ಯಾವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಇದರೊಂದಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ಕುರಿತಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು.

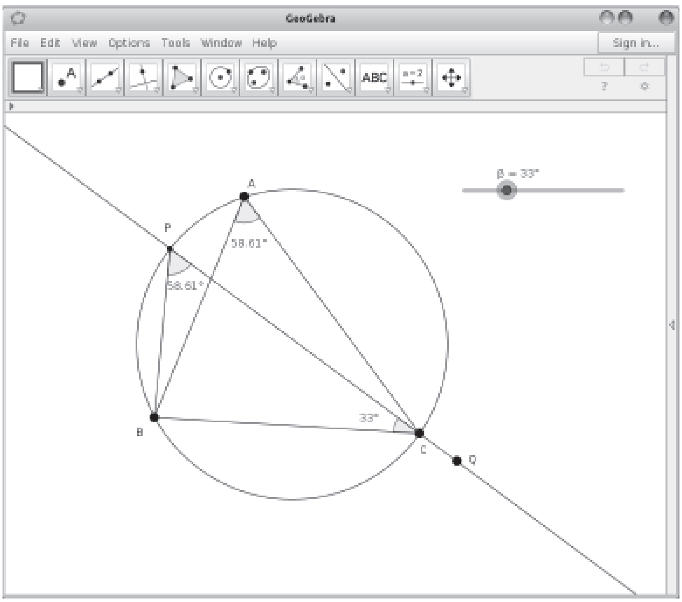
ಕೊನೆಗೆ ಈ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಯಗಳನ್ನೂ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಭಾಷಾರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ

ಸಂಗ್ರಹಿಸಬೇಕು. **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ, ಈ ಆಶಯಗಳ ದೃಶ್ಯಭಾಗಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಭಾಷಾ ರೂಪಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯು ಒಂದು ದೃಶ್ಯ ಕಲೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಅದನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಷಾ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

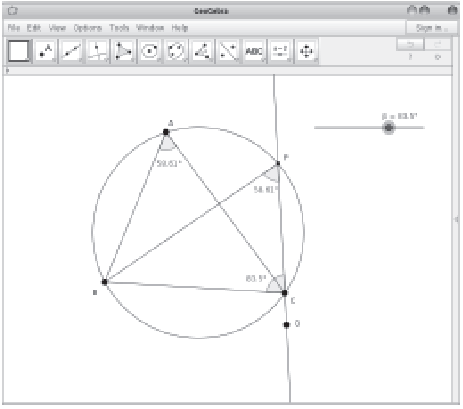
ಈ ತತ್ವಗಳ ಒಂದು ಉಪಯೋಗವಾಗಿ, ಕೇಂದ್ರ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

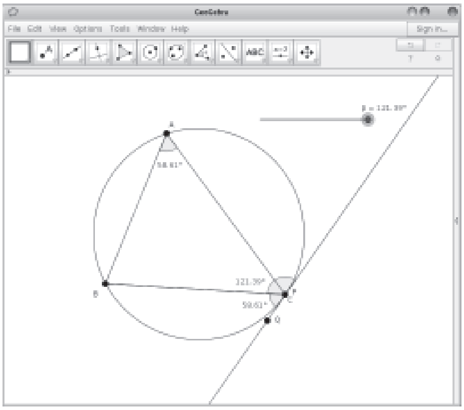
ಜ್ಯಾವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಯಾಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದರ ದೃಶ್ಯರೂಪದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಆ ಪುಟದ ಬದಿಯಲ್ಲಿ **ಬದಲಾಗದ ಕೋನ** ಎಂಬ ಬೋಕ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಡೆಸುವುದು ಉತ್ತಮ.

ಅಂದರೆ ಇದನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು Point on Object ಉಪಯೋಗಿಸಿ *A, B, C* ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು (*A* ಮೇಲೆ *B, C* ಕೆಳಗೆ ಇರಬೇಕು). ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿ *A* ಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು Angle ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಇನ್ನು 0^o ಯಿಂದ ಈ ಕೋನದ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನದ ವರೆಗೆ ಬದಲಾಗುವ ಒಂದು Angle Slider ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ನಂತರ Angle with Given Size ತೆಗೆದುಕೊಂಡು *B, C* ಯಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ, ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿ ಈ ಸ್ಲೈಡರಿನ ಹೆಸರು ನೀಡಬೇಕು. ಆಗ ಸಿಗುವ ಬಿಂದುವನ್ನೂ *C* ಯನ್ನೂ Line ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ *P* ಎಂದು ಹೆಸರು ನೀಡಬೇಕು. ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ, *BC* ಯ ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದು *Q*ವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Angle ಉಪಯೋಗಿಸಿ *B, P, Q* ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ, *P* ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.



ಇನ್ನು ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ಸರಿಸುವುದೋ ಅದಕ್ಕೆ Animation on ನೀಡಿದರೋ, P ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಚಲಿಸಿ Cಗೆ ತಲಪುವಾಗ PQ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುವುದೂ ಸಂಪೂರ್ಣ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ P ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಬದಲಾಗದಿರುವುದನ್ನೂ ನೋಡಬಹುದು.





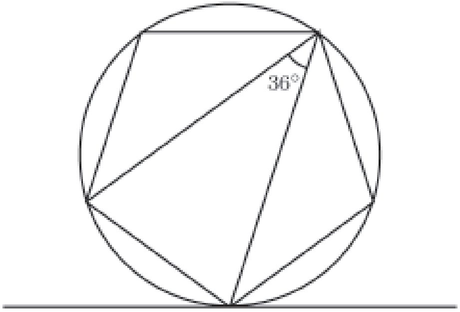
ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು $40°$, $60°$, $80°$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಇವುಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿರುವ $80°$, $120°$, $160°$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ....

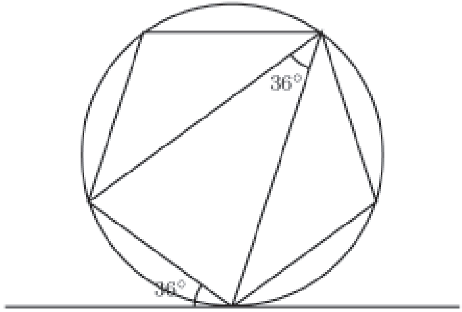
ಇದರ ವಿಲೋಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $40°$, $60°$, $80°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾದ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಚಾಪಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾದ $140°$, $120°$ $100°$ ಆಗಿರುವುದು. ಇದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಇವುಗಳ ಅರ್ಧವಾದ $70°$, $60°$, $50°$ ಆಗಿರುವುದು.

ಜ್ಯಾವು ಅವುಗಳ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\angle PAC$, $\angle PBC$ ಎಂಬೀ 6 ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಲ್ಲದೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\angle PAC$, $\angle TAC$ ಎಂಬೀ 3 ಜೊತೆಗಳಿರುವುದು. ಒಟ್ಟು 9 ಜೊತೆಗಳಾಗುವುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.





ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮ ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನವು 36° ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಬಹಭುಜಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾದ ನಡುವಿನ ಕೋನ 36° ಎಂದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಿಗುವುದು.

ಹೊರಗಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದು, ಮೊದಲ ಬಿಂದುವಿನ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಬಂದು ಕೊನೆಗೆ ಅದರೊಂದಿಗೆ ಸೇರುವಾಗ ಗೆರೆಯು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುವುದು ಎಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಠದ ಮೊದಲ ಭಾಗವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಜೊಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವುದು. ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ತಿರುಗಿಸಿದರೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಬರುವುದು. ಕೊನೆಗೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದಾಗುವಾಗ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುವುದು.

ಹೀಗೆ ನೋಡಿದರೆ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವ ರೀತಿಯ್ನೂ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನಂತರ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೂ ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಆ ತತ್ವದ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗವನ್ನೂ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

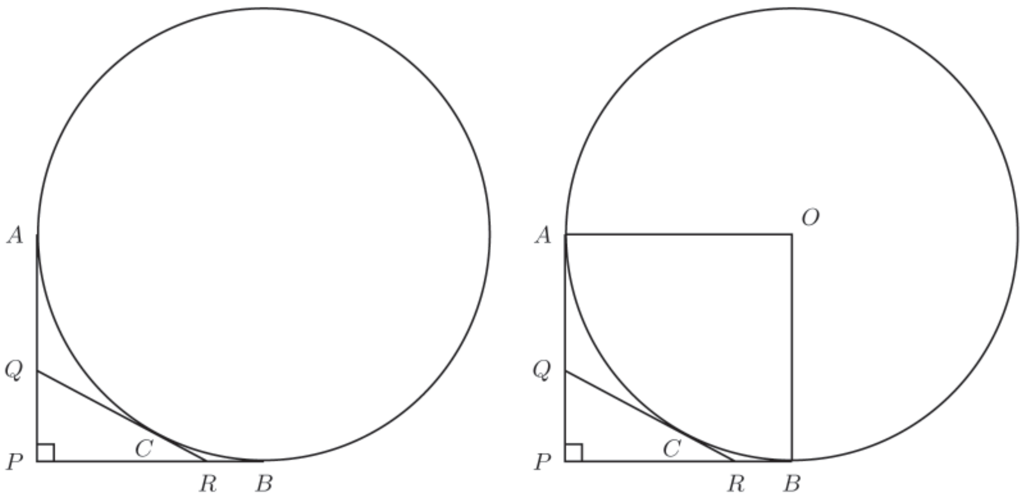
ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂಬ ತತ್ವವನ್ನೂ ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ರೀತಿಯನ್ನೂ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮಂಡಿಸುವುದು.

ನಂತರ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಈ ತತ್ವದ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಾನವೆಂದು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯೂ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕೊನೆಗೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ಕುರಿತು ಕಲಿತ ನಂತರ ಚರ್ಚಿಸುವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ನಂತರದ ಆಶಯವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದರ ಮೊದಲು, ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ.

ಮೊದಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರದ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಎಡಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಹೆಸರಿಸುವ.



ಎಡಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ

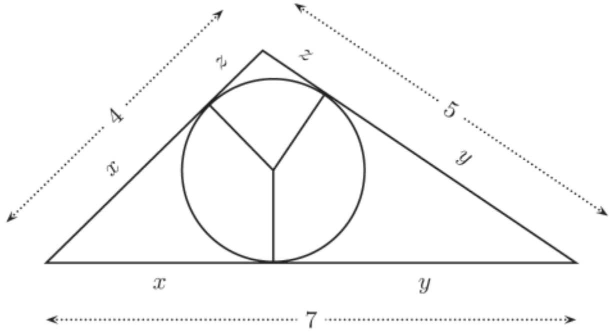
$$PQ + QR + RP = PQ + (QC + CR) + RP$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. QC, QA ಎಂಬಿವುಗಳು Q ನಿಂದ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ RC, RB ಎಂಬಿವುಗಳು R ನಿಂದಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿದರೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$PQ + (QA + BR) + RP = (PQ + QA) + (BR + RP) = PA + BP$$

ಇನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು O ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಿಂದ $OAPB$ ಚೌಕವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಅದರ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಎರಡನೇಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು x, y, z ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದಾದರೆ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು:



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 16 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗ x, y, z ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ:

$$(x + y) + (y + z) + (z + x) = 2\,(x + y + z)$$

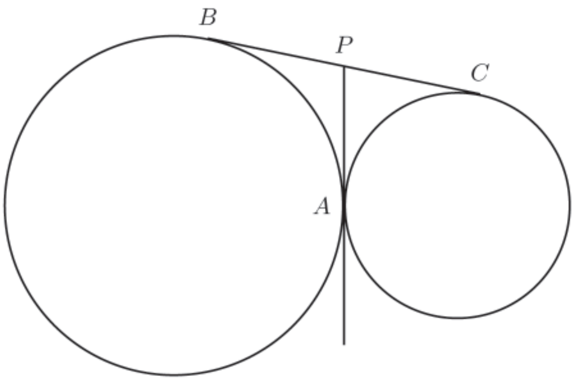
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ $x + y + z = 8$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆಗ,

$$x = (x + y + z) - (y + z) = 8 - 5 = 3$$

$$y = (x + y + z) - (z + x) = 8 - 4 = 4$$

$$z = (x + y + z) - (x + y) = 8 - 7 = 1$$

ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೊದಲ ಉಪಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೆಸರಿಸುವ:



P ಯಿಂದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $PA = PB$ ಎಂದೂ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $PA = PC$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಇವುಗಳಿಂದ $PB = PC$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು P ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, BC ವ್ಯಾಸವಾದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು P ಆಗಿದೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ $PA = PB$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ವೃತ್ತವು Aಯ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗುವುದು. BC

ವ್ಯಾಸವೂ A ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಒಂದು ಬಿಂದುವೂ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle BAC$ಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

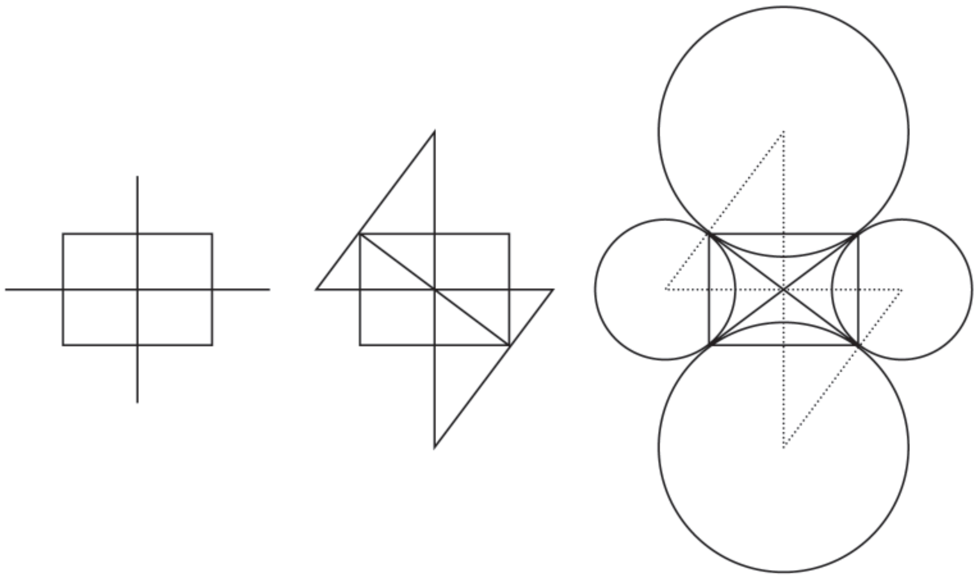
ಹೀಗೆಯೇ ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉಪಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಅದೊಂದು ಆಯತವಾಗಿದೆ.

ಇಂತಹ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಟುಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು ಮೊದಲು ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತವು ಆಯತದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ ಕೇಂದ್ರವು ಆ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣವೂ ಕೆಲವು ವೃತ್ತಗಳ್ನು ಆಯತಗಳ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ಈ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಾಗಿರಬೇಕು. ಆಗ ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(i) ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಭುಜಗಳ ಲಂಬಸಮಬಾಜಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ಆಯತದ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನೆಳೆದು ಅದರ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಲಂಬಗಳು ಸಮಭಾಜಕದೊಂದಿಗೆ ಸಾಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

(iii) ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಆಯತದ ಇದೇ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



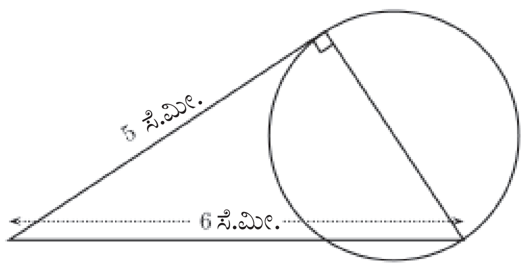
ಇನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನಂತರದ ಆಶಯವನ್ನು ನೋಡೋಣ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿಯೂ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸಿ

ಹಾದುಹೋಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡೆವು. ಆಗ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆ ತಮ್ಮೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯೂ ಸ್ವಾಬಾವಿಕವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಕುರಿತು ಇರುವ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮಂಡಿಸಬಹುದು.

ನಂತರ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ವ್ಯಾಸ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ $8(8-x)=16$ ಎಂದೂ ಆದರಿಂದ $x=6$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಮೊದಲನೇಯ ಚಿತ್ರದಿಂದ $4(x+4)=30$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ $x=5$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದದ ವರ್ಗವು $(5+5)\times 5=50$ ಎಂದೂ ಉದ್ದವು $5\sqrt{2}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಆಯತದ ಎರಡನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು 6 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ 5ರ ವರ್ಗ ಸಿಗಬೇಕು. ಈ ಉದ್ದವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಅದರ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಬೇಕು. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಎಳೆಯುವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ.

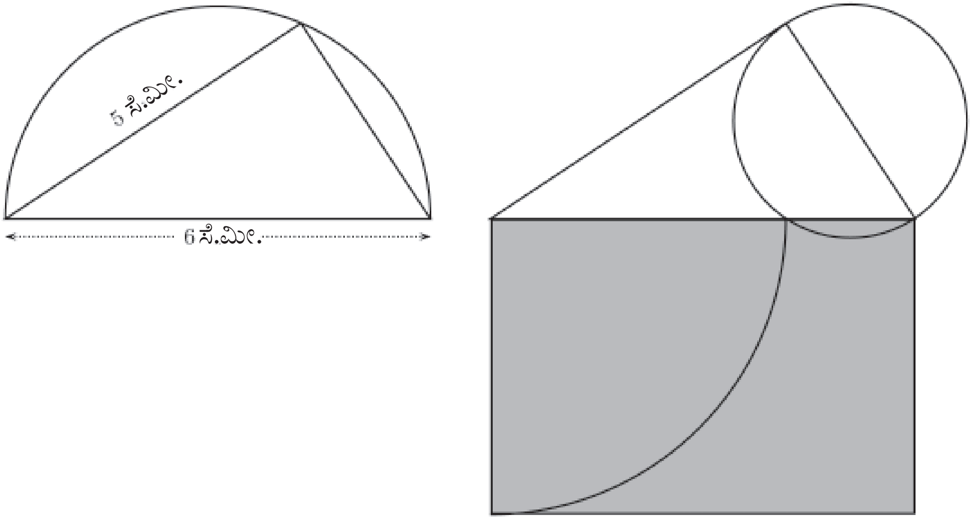


ಇಂತಹ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಹೀಗೆ ಅಳೆಯಬಹುದು:

(i) ಕರ್ಣ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಂಬಭುಜವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಇದಕ್ಕೆ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು).

(ii) ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡನೇ ಲಂಬಭುಜವು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) ಈ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಕರ್ಣದ ಭಾಗವು ಭಾಗವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಆಯತದ ಎರಡನೇ ಭುಜವಾಗಿದೆ.

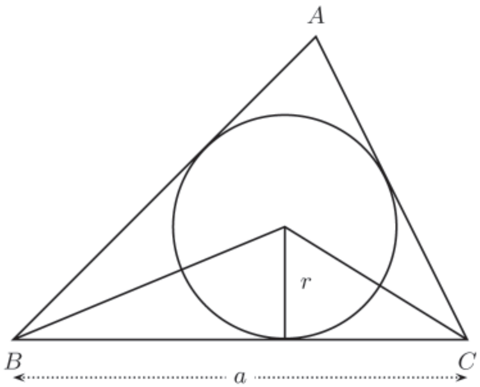


ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತ

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಿರುವ ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಾಯಿತು. ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಕುರಿತು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸುಲಭ. ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ. ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೆಳೆಯಲು, ಈ ಗೆರೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತೆಗೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದು ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ತತ್ವವಾಗಿದೆ. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾದ ಮೂರು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಲು, ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಯೂ ಉಂಟಾಗುವುದು. ನಂತರ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತದ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡುವರು.ಈ ತಾಂತ್ರಿಕ ಚಿಂತನೆಗಳ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವರು.

ಈ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಕಳೆದ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೆನಪಿಸುವ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೂ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವೂ ಹೇಗೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು ಎಂದು ವಿವರಿಸುವ:



ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$$a = r\left(\frac{1}{\tan\frac{B}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುವ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ, ಯಾವ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಎಂಬ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಸಬಹುದು. ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಬಹುದೆಂದು ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವು. ಕಳೆದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕುರಿತು ತಿಳಿದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಹೀಗೆಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

> ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಲ್ಲಾ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಅಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಹೀಗಾಗುವುದು.

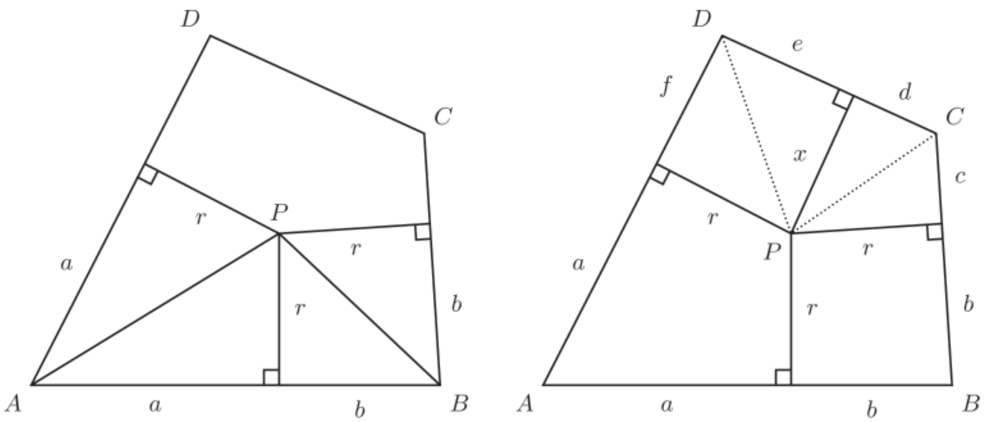
> ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

ಇದೂ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಲು, $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ

$$AB + CD = AD + BC$$

ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಊಹಿಸಿರಿ A ಮತ್ತು B ಯ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು P ಆಧರೆ, P ಯಿಂದ AB, BC, AD ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನು r ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ,

ಈ ಲಂಬಗಳ ಬುಡಕ್ಕೆ A ಮತ್ತು B ಯಿಂದಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಡಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.



ಇನ್ನು p ಯಿಂದ CD ಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು x ಎಂದೂ ಇತರ ಕೆಲವು ದೂರಗಳನ್ನು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

$$x^2 + d^2 = c^2 + r^2$$

$$x^2 + e^2 = f^2 + r^2$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ? ಒಂದನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಳೆದರೆ $d^2 - e^2 = c^2 - f^2$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$(d + e)\,(d - e) = (c + f)\,(c - f)$$

ಇನ್ನು $AB + CD = AD + BC$ ಎಂಬುದನ್ನು $(a + b) + (d + e) = (a + f) + (b + c)$ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ,

$$d + e = c + f$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಒಂದನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ

$$d - e = c - f$$

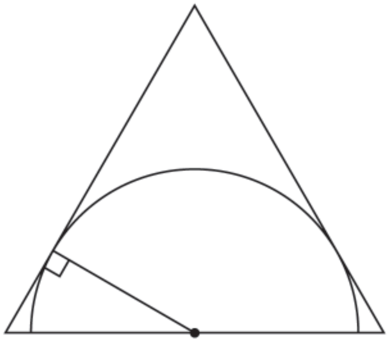
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಈ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ

$$d = c \qquad e = f$$

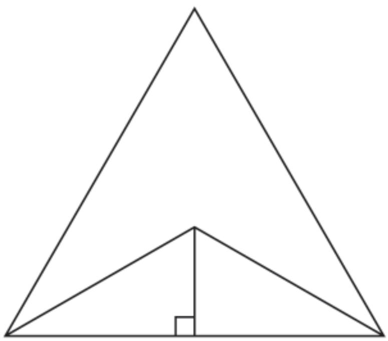
ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು $x^2 + d^2 = c^2 + r^2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ $d = c$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $x = r$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

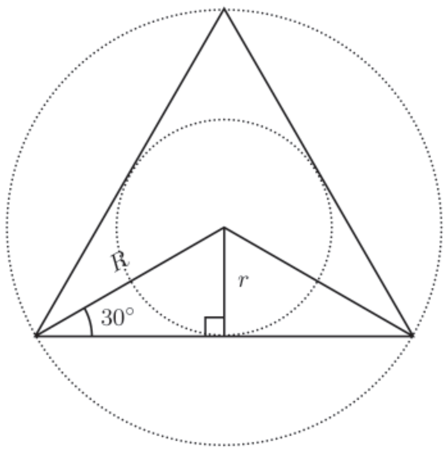
ಅಂದರೆ, P ಯಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳಿಗಿರುವ ಲಂಬದೂರಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಕೇಂದ್ರವೂ ಈ ಲಂಬದೂರವು ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಅಥವಾ ಅದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಂತವೃತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಎರಡರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ರಚಿಸಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ. ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನೂ ರಚಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ ಅದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು.



ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, ಮೊದಲು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವೇ ಅಂತವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

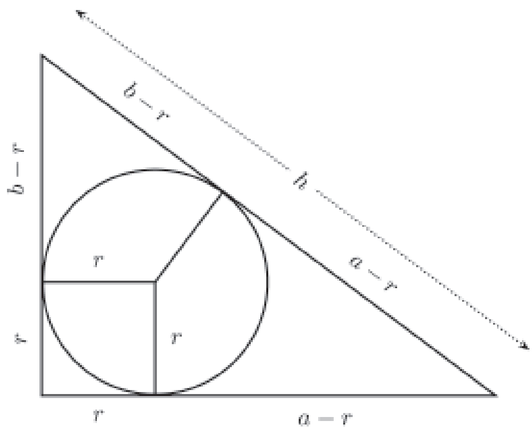




ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳನ್ನೆಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವು ಮೇಲಿನ ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವು ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳೂ, ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.

ಇನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಅಂತವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮೇಲಿನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.



ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು c, b ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.

ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸುತ್ತಳತೆ ಹಾಗೂ ಅಂತವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{1}{2} r\,(a + b + h)$$

ಇನ್ನು ಚಿತ್ರದಿಂದ $h = (a - r) + (b - r) = a + b - 2r$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ

$$a + b = 2r + h$$

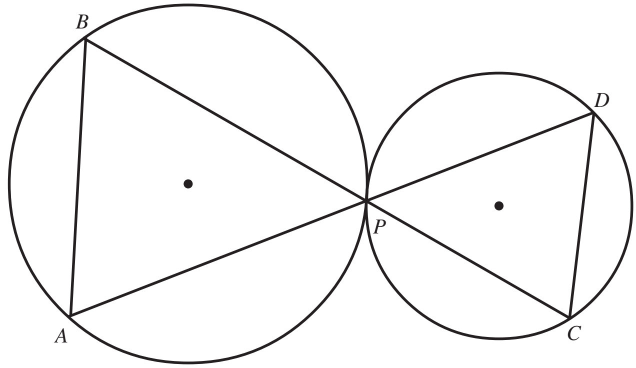
ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\frac{1}{2} + (2r + 2h) = r\,(r + h)$$

ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಹೆರೋನ್ ಸೂತ್ರ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದು.

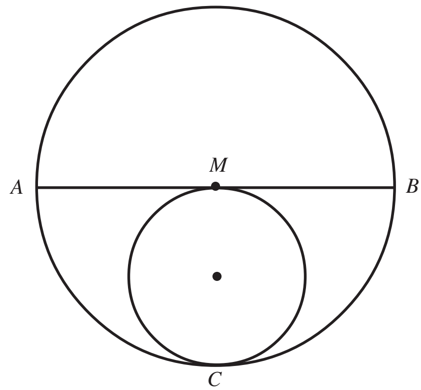
ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳು

1.

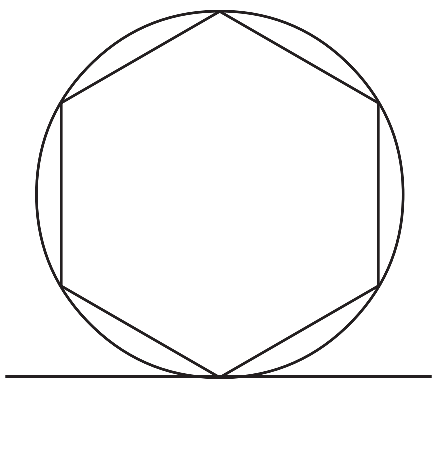


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು P ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು *A*, *D*, *C*, *D* ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು. *AB* ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ *C*, *D* ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

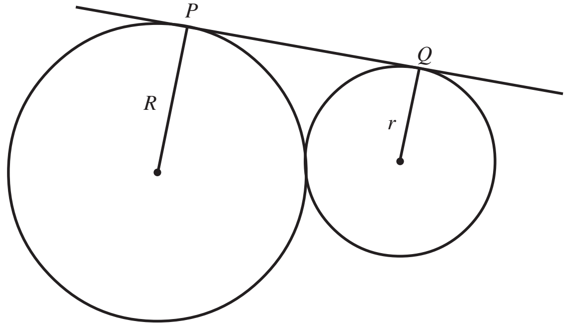
2. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು c ಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ *AB* ಎಂಬ ಜ್ಯಾವು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ m ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r . ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ R ಹಾಗೂ $MA = MB = a$ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ $a^2 = 4r\ (R - r)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



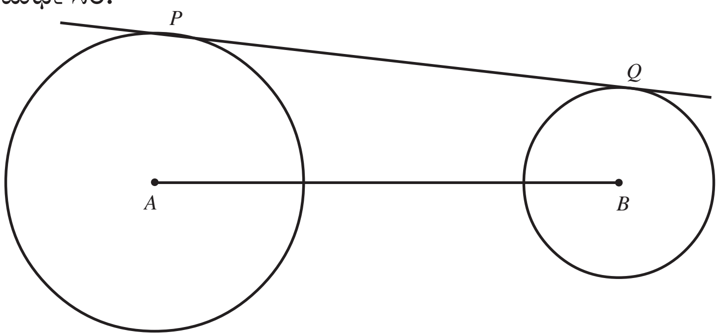
3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಷಡ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.



4.

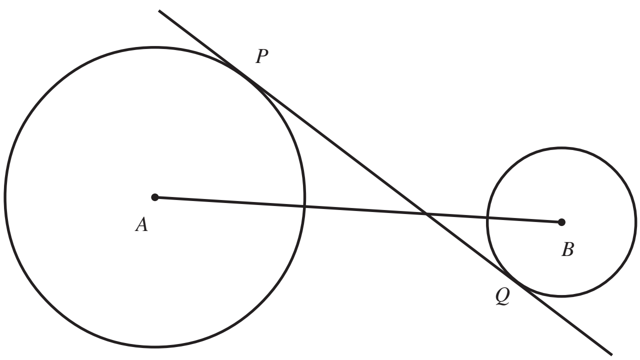


R, r ಆಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. PQ ಆಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. $PQ = 2\sqrt{Rr}$ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.



5.

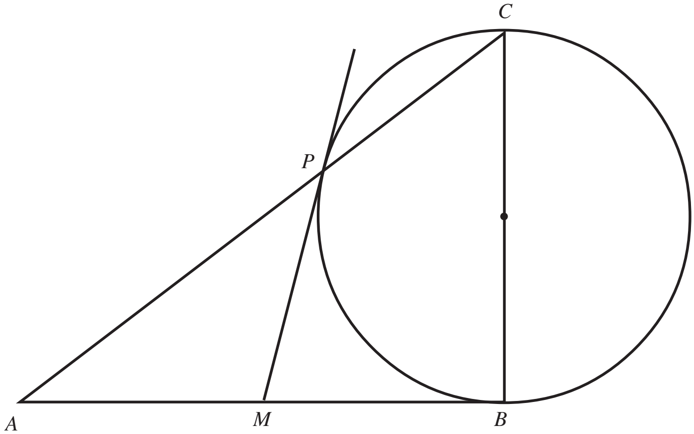
A, B ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. PQ ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. A, B ಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು 13 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. PQ ವಿನ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?



6.

A, B ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದೆ PQ. ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿವೆ. A, B ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. PQ ವಿನ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

7. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ B ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. C ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತವನ್ನು P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು P ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ AB ಯನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.



AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ M ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8

ಘನಾಕೃತಿಗಳು

ಪೀಠಿಕೆ

ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಈ ಅಧ್ಯಾಯ. ಸ್ತಂಭಗಳ ಕುರಿತು ಮಾತ್ರವೇ ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು ಮತ್ತು ಗೋಳಗಳು ಕಲಿಕಾ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿಯೇ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ವಿವರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡದೆ, ಒಂದು ಅನುಬಂಧವಾಗಿ ಪಾಠದ ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಅಭಿರುಚಿಯಿರುವ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಓದಲು ಮತ್ತು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಲು ಹೇಳಬಹುದು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಘನಾಕೃತಿಗಳು)

ಆಶಯಗಳು

- ಪಿರಮಿಡ್ಡು ಎಂಬ ಆಶಯ
- ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
- ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಎತ್ತರ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಕರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ
- ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲ

ಕಲಿಕಾ–ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ

- ಪಿರಮಿಡ್‌ನ(ಚೌಕ) ಬಿಡಿಸಿದ ರೂಪವನ್ನು ಕಾಗದದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
- ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರ ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
- ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
- ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅಂಚನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
- ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ, ಪಾದದ ಅಂಚು, ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು, ಪಾದದ ಕರ್ಣ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ (ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
- ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಚೌಕ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲದ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಪ್ರಯೋಗ.
- ಪಾದದ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
- ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚು, ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು

- ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚು, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು, ಉನ್ನತಿ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.
- ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಚೌಕ ಮತ್ತು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು
- ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು
- ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಲುಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಘನಾಕೃತಿಗಳು)

<table>
<tr><th>ಆಶಯಗಳು</th><th>ಕಲಿಕಾ–ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ</th><th>ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು</th></tr>
<tr>
<td>• ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡು ಎಂಬ ಆಶಯ
• ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
• ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ
• ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ.</td>
<td>• ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
• ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
• ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನದ ಚರ್ಚೆ.
• ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
• ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ.
• ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.
• ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ದದ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.</td>
<td>• ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲವು ಅಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ
• ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ, ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು.
• ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು.</td>
</tr>
</table>

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಘನಾಕೃತಿಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ–ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ • ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ • ಗೋಳದ ಘನಫಲ • ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ	• ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವನ್ನು 4π ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಚಿಕೆ. • ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಅಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಘನವನ್ನು $\frac{4}{3}\pi$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಗೋಳದ ಘನಫಲದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಇತರ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ ಅದರ ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಹೊಸ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಆ ಹೊಸ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ಗೋಳದ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು

ಆಶಯವಿಕಾಸ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಎಂಟು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು ಎಂಬ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಕಲಿತ ಸ್ತಂಭಗಳು ಎಂಬ ಘನಾಕೃತಿಗಿರುವ ಸಾಮ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನೂ ವಿಶದೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪಾದವು ಬಹುಭುಜವಾಗಿರುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಕುರಿತು ಮಾತ್ರವೇ ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿರುವುದು.

ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಭಾಗವಾಗಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬ ಆಶಯ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು. ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮೂರನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ.

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಒಂದು ಭೌತಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಬಂಧವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಐದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದು ಇಲ್ಲಿನ ಪ್ರಧಾನ ಆಶಯವಾಗಿದೆ. ಸೆಕ್ಟರಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನೂ ಇದನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಆರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ.

ಏಳನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಮೂಲಕ ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಬಂಧವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪಾಠಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಭಾಗವು ಗೋಳದ ಕುರಿತಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗದ ಮೂಲಕ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಣೆಯಿಲ್ಲದೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ಇದಕ್ಕೆ ತಲುಪುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆ. ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಸ್ತಂಭಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ದಪ್ಪ ಕಾಗದವನ್ನು ಬೇಕಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ಮಡಚಿ ಈ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ಇವುಗಳ ಕುರಿತು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಸಣ್ಣಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಿನ್ನ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಚೌಕಗಳನ್ನು, ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಅಂಟಿಸಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು

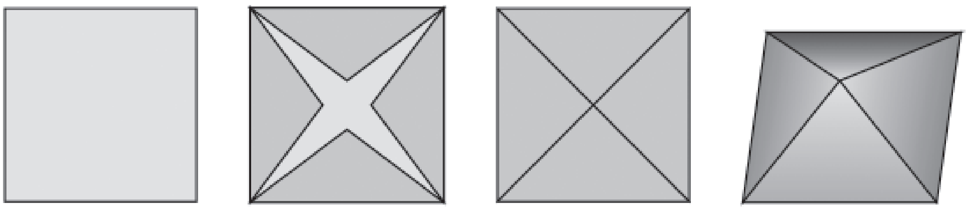
ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಇವರಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ಚೌಕ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತು ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

(i) ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಒಂದು ಚೌಕ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಬೇಕಾಗಿದೆ.

(ii) ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪಾದವು ಚೌಕದ ಪಾದವಾಗಿರಬೇಕು.

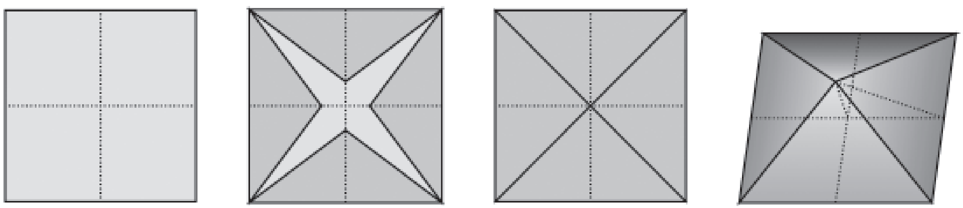
(iii) ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೋನವು ಲಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ಪಾದ ಕೋನಗಳು 45^0 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕು

ಕೊನೆಗೆ ಹೇಲಿದ ವಿಷಯವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು 90. ಮತ್ತು 90. ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಅವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಚೌಕದ ಪಾದದಲ್ಲಿಯೇ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೇ ಹೊರತು ಪಿರಮಿಡ್ಡಾಗಿ ಮೂಲಕ್ಕೆ ಉಬ್ಬಿ ನಿಲ್ಲುವುದಿಲ್ಲ.



ಇದನ್ನು ಕೋನಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಭುಜಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೇಳೋಣ.

(iv) ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉನ್ನತಿಯು ಅವುಗಳ ಪಾದದ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕು.



ಚೌಕವೂ ತ್ರಿಕೋನವೂ ಸೇರಿಸುವ ನಕ್ಷತ್ರ ಆಕೃತಿಯು ಒಂದೇ ಚೌಕದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲು **ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದ ಸ್ಥಾನವೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೇಳಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಭಾಗವಾಗಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂಬುವುದು ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ ಎಂಬುವುದರಿಂದ ಈ ಭಾಗವು ಆರಂಭಗೊಳ್ಳುವುದು. ಆಗ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಹೆರೋನ್‌ನ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಅದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಮೊದಲಿಗಿಂದ ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಉನ್ನತಿಯು ಪಿರಮಿಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕಾಣಲ್ಪಡುವುದು ಎಂಬುವುದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬ ಆಶಯವು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು. ಆಗ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಪಾದದ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದರಂಗವಾಗಿ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ತತ್ವದೆಡೆಗೆ ತಲುಪುವುದು. ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ a ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ l ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}\ al$; ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$4 \times \frac{1}{2}\ al = \frac{1}{2} \times 4a \times l$$

ಅಂದರೆ,

> ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ದದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗಿರುವ ಒಂದನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 25 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 20 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಬಳಿಕ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $25 + 80 = 105$ ಎಂದು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲೇ ಊಹಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $256 + 320 = 576$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರುಬೇಕಾಗಿದೆ. 500 ಆಟಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಚದರ ಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ

$$\frac{576 \times 500}{10000} = \frac{576 \times 5}{100}$$

ಎಂದು ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚಾಗಿರುವ ಹಣವು

$$\frac{576 \times 5 \times 80}{100} = 576 \times 4 = 2304$$

ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು

ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಲು, ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಭುಜದ ವರ್ಗದ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ನೆನಪಿಸಬೇಕು. (ಉನ್ನತಿಯ ಭುಜದ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೆನಪಿಸಿದರೆ ಸಾಕು) ಆಗ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಚದರ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ

$$900 + \left(4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 900\right) = \left(\sqrt{3} + 1 \ \ \right)900$$

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಪಾತವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜ 10 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಅದರಿಂದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 100 ಚದರ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂಬುದಾಗಿ ಮೊದಲು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ $92 - 40 = 52$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳಾದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳು $52 \div 4 = 13$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಉನ್ನತಿ $\sqrt{13^2 - 5^2} =$ 12 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $5 \times 12 = 60$ ಚದರ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$100 + (4 \times 60) = 340 \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮಾನವಾದ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆಯುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದವಾಗಿ ತೆಗೆಯುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಚೌಕವನ್ನು ಕರ್ಣಗಳ ಮೂಲಕ ಖಂಡಿಸಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನಪಾದವಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದರಿಂದ ಅವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

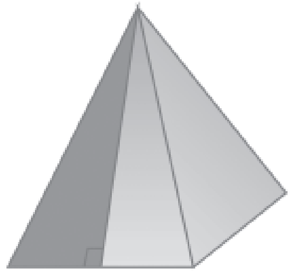
ಆಗ ಮೊದಲು ತಿಳಿದಂತೆ ಇವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಿಯ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಯು ಕಳೆದರೆ, ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಪಾದದ ಅಂಚು a ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ l ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ a^2, ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $2al$. ಆಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕಾದರೆ $a = 2l$ ಆಗಬೇಕು. ಆಗ ಉನ್ನತಿಯ $\sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 0$ ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

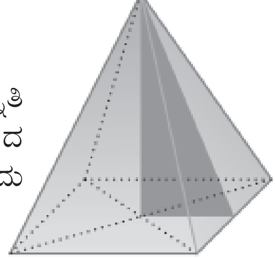
ಉನ್ನತಿಯೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯೂ

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳುವುದು ಪಾದದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯನ್ನಾಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಎತ್ತರವು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಚೌಕ ಮತ್ತು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವಾಗ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರ ಅಳತೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಕರ್ಣವಾಗಿಯೂ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧವು ಒಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಒಳಗೆ ಸಂಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿಯು ಈ ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಇದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವ ಆಶಯವು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಅಂಚು, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ, ಉನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಲವು ಬೀಜ ಗಣಿತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸದೆ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ ಲಂಬ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು ಕರ್ಣವಾಗಿಯೂ ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್‌ನೊಳಗೆ ಸಂಕಲ್ಪಿಸೋಣ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಶಯಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಒತ್ತನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲಿನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ವಾಚಕಗಿಂತ ದೃಶ್ಯಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯಿದೆ.

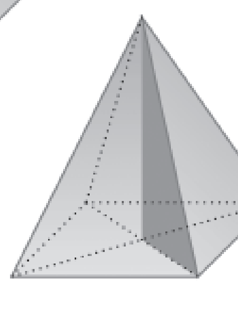
ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಮೂರು ಲಂಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ

- ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಕರ್ಣವಾಗಿಯೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅಂಚೆ ಅರ್ಧವನ್ನು ಲಂಬ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ





- ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳೊಳಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಕರ್ಣವಾಗಿಯೂ, ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಲಂಬಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ.



- ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನೊಳಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಕರ್ಣವಾಗಿಯೂ, ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಲಂಬ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ.

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ View ನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ, Menu ವಿನಿಂದ 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಬೇಕು. ಇದರಲ್ಲಿ right click ಮಾಡಿ ಲಭಿಸುವ Menu ವಿನಲ್ಲಿ Graphics ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ, Use clipping, Show clipping ಇವುಗಳ ನೇರವಾಗಿ ✓ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ, ಅವುಗಳ ಎದುರಿರುವ ಗುರುತನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಇನ್ನು Graphics ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಇದು ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈಯಾಗಿ 3D Grapics ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. Extrude to Pyramid or Cone ತೆಗೆದು, ಈ ತಲದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ Altitude ಕೇಳುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಆಗ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಒಂದು ಚಿತ್ರವು ಲಭಿಸುವುದು. ಇನ್ನು ಇದರೊಳಗೆ ಒಂದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಪಿರಮಿಡ್‌ನ Opacity ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿಯೂ, ತ್ರಿಕೋನದ್ದು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, ಪಿರಮಿಡ್‌ನೊಳಗೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು. Rotate 3D Graphics View ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯದರ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಅಂಚು 24 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು, ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು 30 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ವರ್ಗ

$$18^2 - 12^2 = (18 + 12)\ (18 - 12\ ) = 180$$ ಎಂದೂ ಲಭಿಸುವುದು.

ಆಗ ಉನ್ನತಿಯು $3\sqrt{20}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು. ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚು 24 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ವರ್ಗ $30 - 12^2$ ಎಂದೂ ಆಗ ಉನ್ನತಿ,

$$(30^2 - 12^2) - 12^2 = 30^2 - (2 \times 12^2\ ) = (6^2)\ (5^2 - 2^3\ ) = 6^2 \times 17$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ ಉನ್ನತಿ $6\sqrt{17}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ಎರಡನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಪಾದವು 10 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು. ಸಮಾನ ಭುಜಗಳು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಉದ್ದ $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ವರ್ಗವು ಲಭಿಸುವುದು. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಪುನಃ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚಿನ ವರ್ಗವು ಲಭಿಸುವುದು. ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಯ ವರ್ಗ

$$25^2 - 15^2 = (25 - 15)\ (25 + 15) = 10 \times 40 = 20^2$$

ಇದು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿಯ

$$20^2 - 15^2 = (20 + 15)\ (20 - 15) = 35 \times 5$$

ಉನ್ನತಿ $5\sqrt{7}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿಯೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಪಾದ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಉನ್ನತಿಯ ವರ್ಗವು

$$25^2 - 20^2 = (25 - 20)\ (25 + 20) = 5 \times 45 = 15^2$$

ಉನ್ನತಿಯ 15 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು. ಇದು ಪಾದದ ಅರ್ಧವಾದ 20ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸದರೆ, ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ ಅದು $\sqrt{15^2 - 20^2}$ ಎಂಬ ಅಸಂಬಂಧವಾಗುವುದು.

ಅಧ್ಯಾಯದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದಾಗ ಗುರುತಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಚರ್ಚೆಗಾಗಿ ಹೇಳಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರವಾಯಿತು. ಉನ್ನತಿಯು ಪಾದದ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾತ್ರವೇ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದು.

ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘಲಫಲ

ಪಿರಡಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಆಸಕ್ತಿಯಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅದನ್ನು ಅನುಬಂಧವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಎತ್ತರ $\sqrt{15^2 - 5^2} = 10\sqrt{2}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಬಳಿಕ ಘನಫಲವು $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 10\sqrt{2} = \frac{1000\sqrt{2}}{3}$ ಘನ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ಲಭಿಸುವುದು.

ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವಾಗ ಘನಫಲವು ಎಷ್ಟು ಮಾಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗವಾಗುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಎತ್ತರವು ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವಾಗ ಘನಫಲವು ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಪಾದವು ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವಾಗ ಘನಫಲವು ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಎಂಬ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ತಲುಪಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉನ್ನತಿಯು ಬದಲಾಗುವ ಅದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಘನಫಲವು ಬದಲಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಪಾದವು ಬದಲಾಗುವ ಪ್ರಮಾಣದ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಘನಫಲವು ಬದಲಾಗುವುದು.

ಆಗ ಎರಡನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಪಾದದ ಅಂಚು ಮಾತ್ರ ಅರ್ಧವಾದರೆ ಘನಫಲವು ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದಾಗುವುದು. ಆಗ ಘನಫಲವನ್ನು ಮೊದಲಿನಂತೆ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಅಂಚು ಎರಡು ಮಡಿ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ಮೂರು ಮಡಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಘನಫಲವು $4 \times 3 = 12$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ $180 \times 12 = 2160$ ಘನಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ಎರಡು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಅದು ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಚರ್ಚೆಗಳ ಬಳಿಕ ಮಾಡುವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲವಾದರೆ ಯಾಂತ್ರಿಕವಾದ ಲೆಕ್ಕ ಚಾರಗಳಿಂದ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವಿರಕ್ತಿ ಉಂಟಾಗಬಹುದು. ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಕಾರ್ಯ ಕಾರಣ ಸಂಬಂಧಗಳ ಸೌಂದರ್ಯವು ನಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು 18 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಭಜವಾದ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿದೆ. ಆಗ ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಿ $9\sqrt{3}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯಾಗಿ ರುವುದರಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿಯ ವರ್ಗವು.

$$(9^2 \times 3) - 9^2 = 9^2 \times 2$$

ಎಂದೂ ಉನ್ನತಿ $9\sqrt{2}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ಲಭಿಸುವುದು.

$$\text{ಘನಫಲ } \frac{1}{3} \times 18^2 \times 9\sqrt{2} = 972\sqrt{2} \text{ ಘನ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು.}$$

ಐದನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಅಂಚು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ x^2 ಚದರ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $4 \times \frac{1}{2} x \times 25 = 50x$ ಎಂದೂ ಲಬಿಸುವುದು. ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 896 ಚದರ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$x^2 + 50x = 896$$

ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿದರೆ

$$(x+25)^2 = 896 + 625 = 1521 = 39^2$$

ಇದರಿಂದ ಪಾದದ ಅಂಚು 14 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದೂ ಬಳಿಕ ಉತ್ತರ $\sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎದೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಘನಫಲ $8 \times 14^2 = 1568$ ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ಆರನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಾದದ ಅಂಚು x ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು. ಆಗ ಉನ್ನತಿಯ

$$\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}x$$

ಇದು 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪಾದದ ಅಂಚು $12\sqrt{2}$ ಎಂದೂ ಲಭಿಸುವುದು. ಘನಫಲವು $4 \times 144 \times 2 = 1152$ ಘನ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು.

ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಾದದ ಅಂಚು $64 \div 4 = 16$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಅದರಿಂದ ಉನ್ನತಿಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗ $1280 \div 256 = 5$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉನ್ನತಿಯ 15 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು.

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡು

ಒಂದು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದೆಂದು ಗುರುತಿಸಿ ಅದರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಅಳತೆಗಳೂ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ.

ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಸೆಕ್ಟರುಗಳನ್ನು ದಪ್ಪ ಕಾಗದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅಂಟಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀಡಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯಾಗವುದೆಂದೂ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪವು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದ ವೃತ್ತವಾಗುವುದೆಂದೂ ನೋಡಿ ತಿಳಿಯುವುದು.

ಬಳಿಕ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕು.

(i) ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಬಗ್ಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಾದ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು.

(ii) ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಯಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಅಳತೆಗಳು ಏನಾಗಿರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರೇ ಆಗಿರುವುದು. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿರಲಿ.

(i) ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ.

(ii) ಈ ಚಾಪದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 360^0 ಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಬೇಕು. ಸೆಕ್ಟರು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಈ ಭಾಗವು ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ.

(iii) ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 45^0 ಎಂಬುದು 360^0 ಯ $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪವು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

(iv) ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದವಾದ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

(v) ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $12 \div 8 = 1.5$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ಇದರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವ ಯುಕ್ತಿಯು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೆ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ $2\pi r$. ಇದು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ $\frac{1}{8}\times 2\pi\times 12 = 3\pi$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗ $2\pi r = 3\pi$ ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ $r = 1.5$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 15 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 15 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದ ಯುಕ್ತಿಯಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ.

(i) ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಚಾಪವು ಪೂರ್ತಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. 360^0 ಯ ಈ ಭಾಗವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

(ii) ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪವು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ.

(iii) ಪಾದದ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಪಾದ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

(iv) ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪವು ಪೂರ್ತಿ ವೃತ್ತದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

(v) ಸೆಕ್ಟರಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $\frac{1}{3} \times 360^0 = 120^0$.

ಅದರಲ್ಲಿಯೂ ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪಾದ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 10π ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ 30π ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆದ್ದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{10\pi}{30\pi} = \frac{1}{3}$ ಭಾಗ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಬಳಿಕ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 10 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇದರ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾದ $1\frac{2}{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪವು ವೃತ್ತದ $\frac{2}{5}$ ಭಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $360 \times \frac{2}{5} = 144^o$ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದ ವೃತ್ತವು ಸೆಕ್ಟರಿನ ತೆಗೆದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 1:2 ಆಗಿದೆ.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾದ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿಯ ಕುರಿತು ಇಲ್ಲಿಯೇ ಹೇಳಬಹುದಾಗಿದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಕರ್ಣವಾಗಿಯೂ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಗಳನ್ನು ಲಂಬ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ:

(i) 6 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದ 60. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವಿರುವ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಯಿತು. ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಂದು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 4 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರಾಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಯಿತು. ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸೆಕ್ಟರಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಂತೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಂತೆ ಈ ಭಾಗವು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಕುರಿತಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಆಗಿದೆ. ಆಗ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಮೊದಲು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಅದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಬದಲು ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೂ ಮೊದಲು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದ. ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನಂತೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನಲ್ಲೂ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವು ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದವಾದ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{12}{25}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 360^0 ಯ ಇಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಇಡೀ ವೃತ್ತದ ಇಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆಗ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{12}{25} \times 25^2 \pi = 12 \times 25\pi = 300$$ ಚ.ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಇದು ನೇರವಾಗಿ

$$\frac{1}{2} \times 50\pi \times 12 = 300$$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಎರಡನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಳೋಣ.

> ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 30 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 40 ಸೆ.ಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

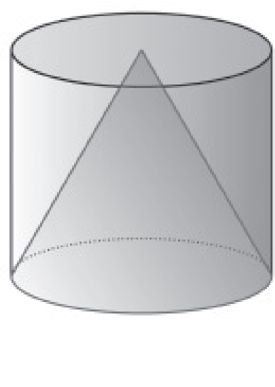
ಇದರಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ಆದುದರಿಂದ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $30\pi \times 50 = 1500\pi$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ, ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $900\pi + 1500\pi = 2400\pi$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ $\sqrt{15^2 + 40^2} = 5\sqrt{3^2+8^2} = 5\sqrt{73}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದೂ, ಆದುದರಿಂದ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $15\pi\times5\sqrt{73}=75\sqrt{73}$ ಚ. ಸೆ. ಮೀ. ಎಂದೂ, ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $(225+5\sqrt{73})\pi$ ಚದರ ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೂದಾನಿಯ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ಚ. ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಒಂದು ಹೂದಾನಿಯ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $5\pi\times 13 = 65\pi$ ಚ. ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ಹೂದಾನಿಯ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $25\pi + 65\pi = 90\pi$ ಚದರ ಮೀಟರ್. 10,000 ಹೂದಾನಿಗಳನ್ನು ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದದಿಂದ ಅಂಟಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 80 ಚ. ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಬೆಲೆಯು $90 \times 314 \times 2 = 565.20$ರೂ. ಆಗಿದೆ.

ಕೊನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು πr. ಆಗಿದೆ. ಇದು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಹಾಗೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ r ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವಕ್ರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\pi r^2$. ಆಗಿದೆ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $\pi r \div 2\pi = \frac{1}{2}r$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{4}\pi r^2$ ಆಗಿದೆ.

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲ



ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲದಂತೆ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಮೂಲಕ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಗಣಿತ ಪರವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತೆಗೆಯಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವುದು.

ಅದರ ಘನಫಲವು,

$$\frac{1}{3}\pi \times 15^2 \times 40 = 3000\pi \text{ ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.}$$

ಎರಡನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಯಿತೆಂದು ಊಹಿಸಿರಿ. ದೊಡ್ಡ ಸ್ತಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 3 ಮಡಿ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ 4 ಮಡಿಯೂ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಘನಫಲವು $3^2 \times 4 = 36$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ದೊಡ್ಡ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 36 ಸಣ್ಣ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಣ್ಣ ಸ್ತಂಭಗಳಿಂದ 3 ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಒಟ್ಟು ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ $36 \times 3 = 108$ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳು.

ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 25 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 25 ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರುರಾಗಿರುವುದರಿಂದ $25\times\frac{216}{360} = 15$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಉನ್ನತಿಯು

$$\sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{5^2(5^2 - 3^2)} = \sqrt{5^2 4^2} = 20$$

ಘನಲಫಲ $\frac{1}{3}\pi 15^2 \times 20 = 1500\pi$ ಘನಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಮೊದಲನೆಯ ದರ $\frac{5}{3}$ ಮಡಿ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ $\frac{3}{2}$ ಮಡಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಘನಫಲವು $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{3}{2} = \frac{25}{6}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ 6:25 ಆಗಿರುವುದು.

ಐದನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ $x : y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು $16x:25y$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಘನಫಲಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $16x=25y$ ಎಂದೂ ಇದರಿಂದ $x:y= 25:16$ ಎಂದೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಗೋಳ

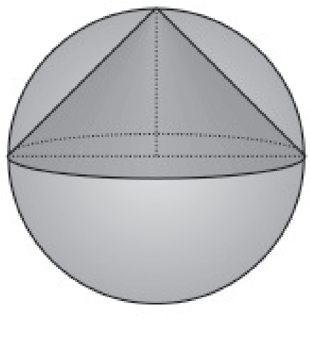
ಗೋಳಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳ ಕುರಿತು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ತನಕ ಪರಿಚಯಿಸಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳಂತೆ ಗೋಳವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿ ಇಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (Differential geometry ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಕುರಿತಾದ ನಿಖರವಾದ ನಿರ್ವಚನಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ Non-developable surfaces ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಸರಳವಾದ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವು ತ್ರಿಜ್ಯದೊಡನೆಯಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. (ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಮೊದಲು ಆರ್ಕೆಮಿಡಿಸ್ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿರುವನು ಎನ್ನುವಾಗ ಮಾನವನ ಚಿಂತನೆಗಳ ಬಹುದೊಡ್ಡ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಎದುರಲ್ಲಿ ನಾವು ಚಿರಋಣಿಯಾಗಿದ್ದೇವೆ.)

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಗೋಳದ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ಅಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತವು ಸೇರಿರುವ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಅರ್ಧಗೋಳ ಎಂಬುದಾಗಿ ಮೊದಲು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಕಾಲು ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಇಡೀ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮುಕ್ಕಾಲು ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಇದು $120\times\frac{3}{4} = 90$ ಚ. ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಗೋಳಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಗಿನ (ಮೂರನೆಯ ಘಾತಗಳು) ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ತಿಳಿಯಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಬಹುದು. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $27 = 3^3$ ಮತ್ತು $64 = 4^3$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 3:4 ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 9:16 ಆಗಿದೆ.

ಮೂರನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು 160π ಘನಸೆಂಟಿ ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಘನಫಲ $\frac{32}{3}\pi$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಗೋಳಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $160 \div \frac{32}{3} = 15$ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಗೋಳದ ಘನಫಲದ $27 = 3^3$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡಗೋಳದ ಘನಫಲ. ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸಣ್ಣ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ 3 ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಸಣ್ಣ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $12 \div 3 = 4$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್.

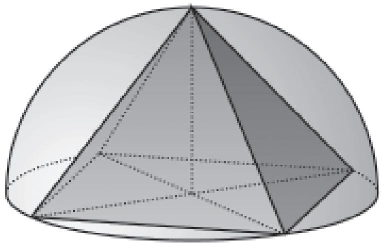


ಐದನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಗೋಳದಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತೆಗೆಯಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಮೊದಲು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಆಗ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲವು $\frac{1}{3}\pi r^3$ ಇದು ಗೋಳದ ಘನಫಲದ ಕಾಲುಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಯಾವುದೇ ಗೋಳಕ್ಕೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿನ ಗೋಳದಲ್ಲಿಯೂ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲವು ಗೋಳದ ಕಾಲುಭಾಗವಾಗಿರವುದು.

ಐದನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿನ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಟ್ಯಾಂಕಿಯು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭ ಮತ್ತು ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉದ್ದ $6 - 2 = 4$ ಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಆ ಭಾಗದ ಘನಫಲವು 4π ಘನಮೀಟರು ಮತ್ತು ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಇಡಿ ಗೋಳವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವು $\frac{4}{3}\pi$ ಘನಮೀಟರು. ಒಟ್ಟು $\frac{16}{3}\pi$ ಘನಮೀಟರು. ಅಂದರೆ $\frac{16000\pi}{3}$ ಲೀಟರು.

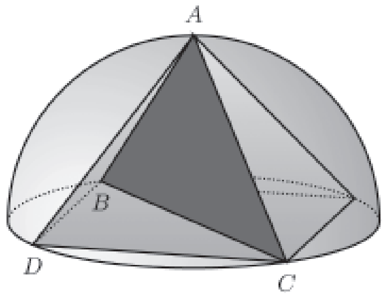
ಏಳನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಕರ್ಣವು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಉನ್ನತಿಯ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಆಗಿದೆ.



ಆಗ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2} \times 4r^2 = 2r^2$.ಆಗಿದೆ.

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಘನಫಲವು $\frac{1}{3}\pi r^3$. ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು $2 : \pi$.

ಇನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆಗಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪಿರಮಿಡ್‌ನೊಳಗೆ ABC ಯನ್ನು ಸಂಕಲ್ಪಿಸಿರಿ. ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\angle BAC$ ಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. $AB = AC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಾದದ ಅರ್ಧವಾದ ΔBCD ಯೂ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಕರ್ಣವು BC ಆಗಿದೆ. ಆಗ, ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $AD = CD$ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಮುಖವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $AD = AC$ ಅಂದರೆ, ACD ಯು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆದರೆ, ಪಿರಮಿಡ್ ಪಾದದ ಅಂಚು $\frac{2r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ r$ ಎಂದೂ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು $\sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\ r$ ಎಂದೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

9 ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ

ಮುನ್ನುಡಿ

ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಹಾಗೂ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಿವರಣೆಯ ಮೂಲ ಆಶಯಗಳನ್ನು ***ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು*** *ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಈ ಪಾಠ. ತಲದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿಯೂ ತಿರುಗಿಸಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ತಲದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬೀಜೀಯವಾಚಕಗಳಾಗಿಯೂ ತಿರುಗಿಸಿಯೂ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಿವರಣೆಯಾಗಿದೆ ಮುಂದಿನ ಪಾಠ.*

ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ವಿಶೇಷವಾದ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗುಂಪಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಈ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಂಬಂಧವು ಸಂಖ್ಯಾಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬೀಜೀಯ ವಾಚಕಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ವಿಲೋಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುವಾಗ ಬೀಜೀಯ ವಾಚಕಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ವಿಶಾಲವಾದ ಈ ವಿಷಯದ ಕೆಲವು ಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹನ್ನೊಂದನೇ ಕ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಲಿರುವ ಸಂಕಲನ (Calculus) *ಪದವಿ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವ ಗಣಿತ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ* (Mathematical Analysis) *ಎಂಬ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಗಳೂ, ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಹಾಗೂ ಬೀಜಗಣಿತದ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವು ಈ ಮೂಲಕವೇ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಗಣಿತದ ಈ ಶಾಖೆಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಮೂಲಕ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಶಕ್ತಿಯುತವಾಗಿಸುತ್ತದೆ.*

ಯೂನಿಟ್‌ಫ್ರೇಂ (ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ • ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯ	• ಆಯತದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು. • ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು. • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಬಿಂದುಗಳ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು. • ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಯುಕ್ತಿ ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಕಾರಣಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮರ್ಥಿಸುವರು. • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿ ಬರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂಥು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು. • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ ರೂಪಿಸುವುದು. • ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ, ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು.

ಯೂನಿಟ್‌ಫ್ರೇಂ (ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು	ಕಲಿಕಾಸಾಧನೆಗಳು
	• ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯು x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು. • ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು. • ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು. • ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. • ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಆ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬೇರೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಬಾಗುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಆ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಆ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು (x, y) ಆಗುವುದಾದರೆ ಅದರ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಕೇಂದ್ರವು ಮೂಲಬಿಂದುವಲ್ಲದ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	

ಆಶಯದ ಬೆಳವಣಿಗೆ

ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದರೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುವುದು. ಹೀಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲಿನ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಮಡುಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಈ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಪಾಠದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಎಲ್ಲಾ ಆಶಯಗಳನ್ನೂ ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಿರುವ ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿವೆ ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನೂ ಅದರ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನೂ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಳೆಯುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೂ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯು x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೆಂಬ ಪ್ರಮುಖ ತತ್ವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದು.

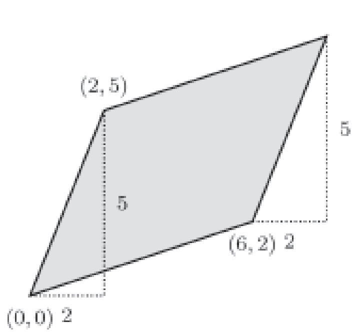
ಪಾಠಭಾಗಗಳು

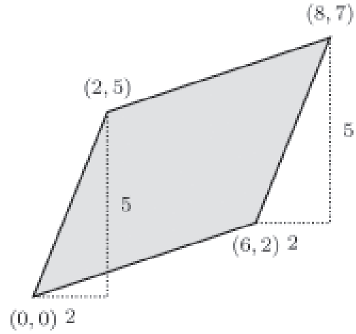
ತ್ರಿಕೋನ ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಯಾವುದೇ ತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದೂ ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದೂ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

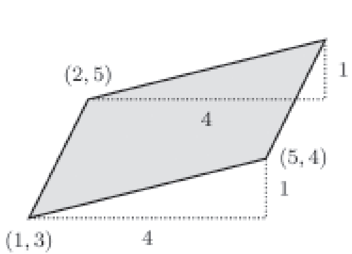
ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಭುಜಗಳು ಕರ್ಣಗಳಾಗಿಯೂ ಅವುಗಳ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳು ಲಂಬ ಭುಜಗಳಾಗಿಯೂ ಇರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

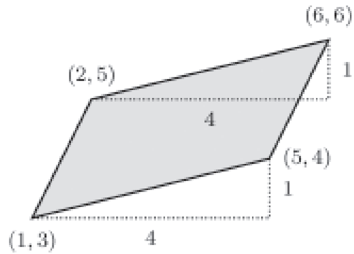
ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಉಳಿದ ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.





ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

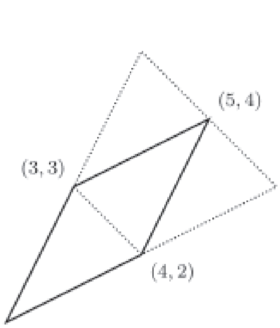


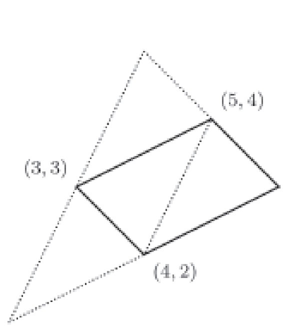


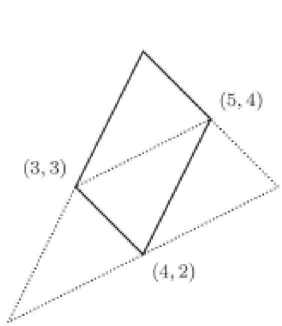
ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಒಂದು ಆಶಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಬೇಕು:

> ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಮೂರನೇ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಅದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟೂ ಆಗಿರುವುದು.

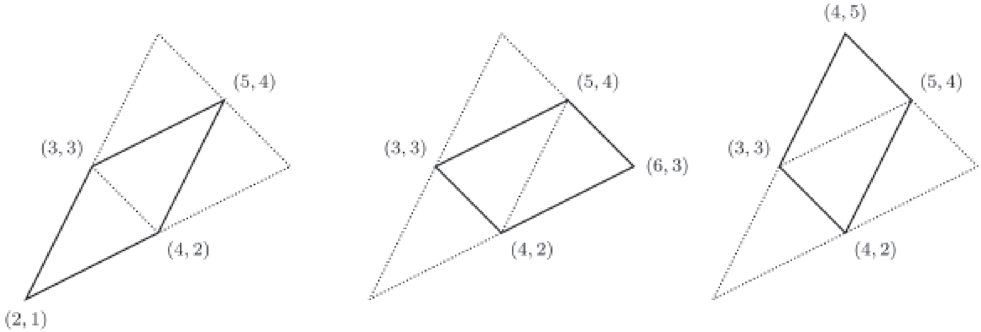
ಆಗ ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಬರುವುದು.



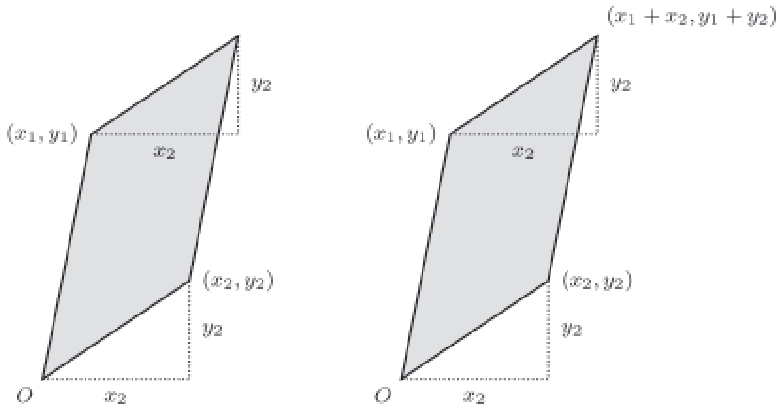




ಇನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೆಳೆದು ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



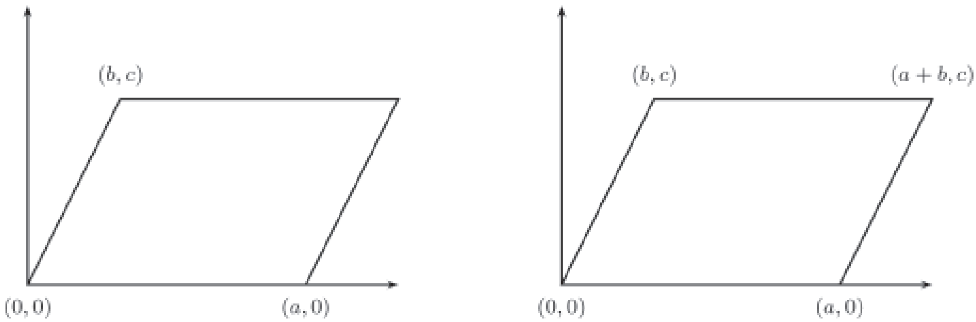
ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

> (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ಆಗಿರುವುದು.

ಹನ್ನೊಂದನೇ ಕ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿ Complex numbers ನ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲೂ Vectors ನ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲೂ ಇದು ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಉಪಯುಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದೆಂದು ಮೊದಲ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಾಗಲೂ ಬೇಕಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಆ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಶಿರವು ಮೂಲಬಿಂದು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಭುಜ x ಅಕ್ಷವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಉತ್ತಮ. ಆಗ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಡಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.



ಈ ಹಿಂದಿನ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $(a + b, c)$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳು a^2 ಮತ್ತು $b^2 + c^2$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$2\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳ ವರ್ಗಗಳು, $(a + b)^2 + c^2$ ಎಂದೂ $(a - b)^2 + c^2$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(a + b)^2 + c^2 + (a - b)^2 + c^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

ನಿಷ್ಪತ್ತಿ

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಿಗುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು.

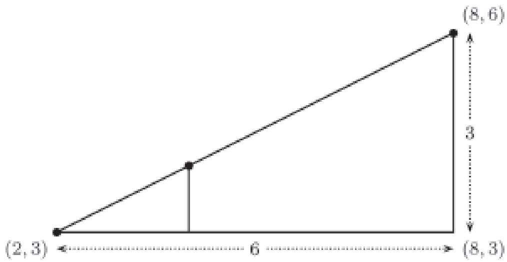
ಮೊದಲ ಭಾಗದ ಲೆಕ್ಕಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾದುರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕಣಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿದರೆ, ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಪರಿಹರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಹೀಗಿರುವ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯು

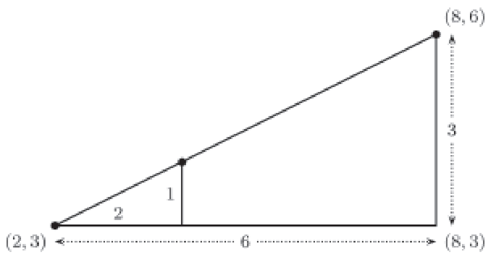
ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (x_1, y_2), (x_2, y_2) ಎಂದಾದರೆ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಇಲ್ಲಿಯೇ ಸಾಧಿಸಬಹುದು (ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದ ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭವಾಗಿ ಇದನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ)

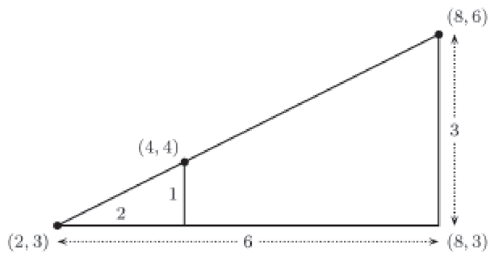
ನಂತರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೀಗಿರುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಗಿಂತ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ನೀಡಿದುದಲ್ಲದೆ, ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ನೀಡಿಲ್ಲ, ಬದಲಾಗಿ, ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾ ರೀತಿಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ರೂಪೀಕರಿಸಲು ಇದನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಆದರೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬಹುದು.



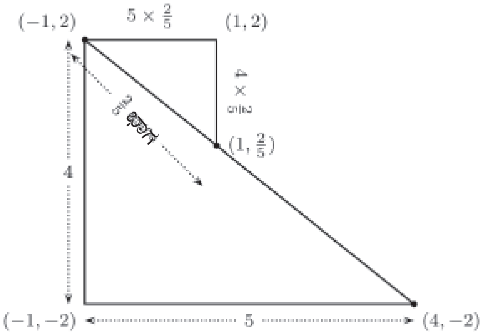
ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವಂತೆ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಲಂಬ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ಭಾಗಗಳಾಗಿವೆ. ಆಗ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

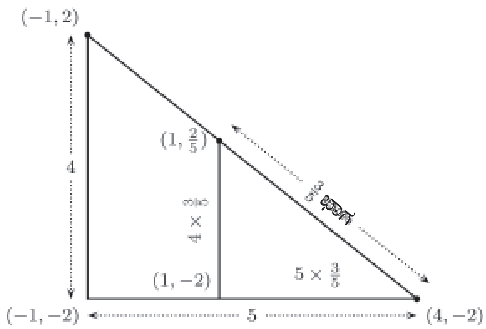




ಹೀಗಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ನಂತರ ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಮಂಡಿಸಬಹುದು.

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ರೀತಿ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆಯಾದರೂ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವಾಗ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಆಲೋಚಿಸುವುದು ಒಳ್ಳೆಯದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $(-1, 2)$, $(4, -2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $2 : 3$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.





(x_1, y_1), (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ (x_1, y_1) ನಿಂದ (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು ಗೆರೆಯ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದದ $\frac{p}{w}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದಾದರೆ,

$$x = x_1 + \frac{p}{w}(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{p}{w}(y_2 - y_1)$$

ಎಂದು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವುದು. (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು $m : n$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದಾದರೆ,

$$\frac{p}{w} = \frac{m}{m+n}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಲೆಕ್ಕವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆಗುವುದು.

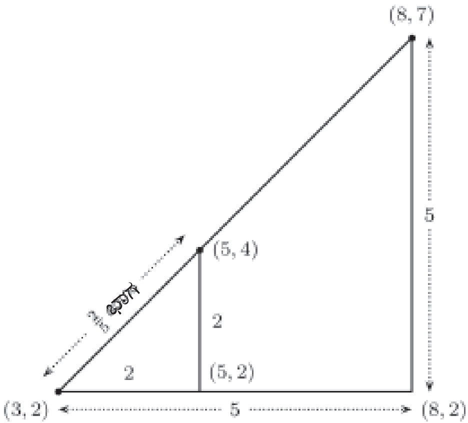
$$x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1) = \frac{(m+n)\,x_1 + m\,(x_2 - x_1)}{m+n} = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

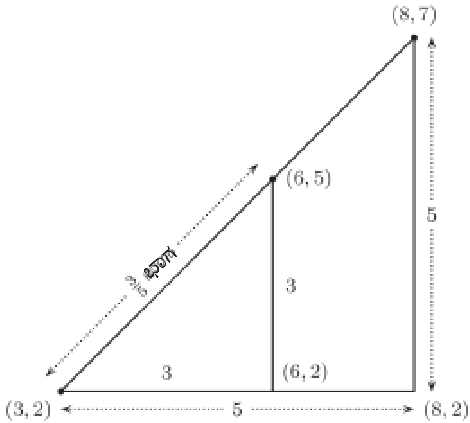
$$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1) = \frac{(m+n)\,y_1 + m\,(y_2 - y_1)}{m+n} = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

ಎಂದರೆ, ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು $m : n$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$.

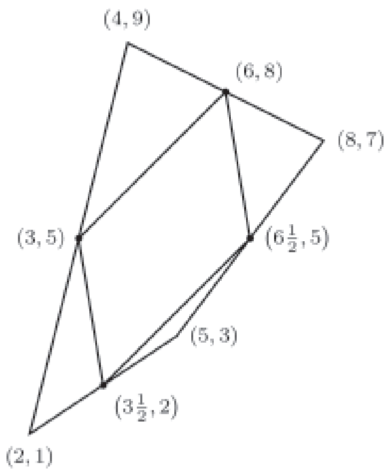
ಹನ್ನೊಂದನೇ ಕ್ಲಾಸಿನ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬೀಜಗಣಿತದ ರೂಪವು ಸರಳವಾಗಿಯೂ ಅಂದವಾಗಿರುವುದಾದರೂ, ಮೊದಲ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡದೆ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಕಾರ್ಯಕಾರಣ ಸಂಬಂಧಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಮೂಲಕ ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವುದರಿಂದ ಗಣಿತದ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗೆ ಇರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಎರಡು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಮಾಡಬಹುದು.





ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವುದು:



ಗಣಿತ

ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಿಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಎರಡು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಒಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ವರ್ಗಗಳು

$$\left(6\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}\right)^2 + (5-2)^2 = 18$$

$$(6-3)^2 + (8-5)^2 = 18$$

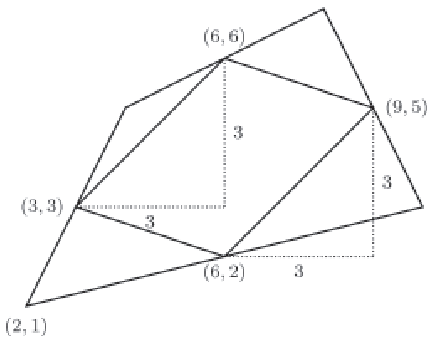
ಎಂದೂ ಉಳಿದ ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ವರ್ಗಗಳು

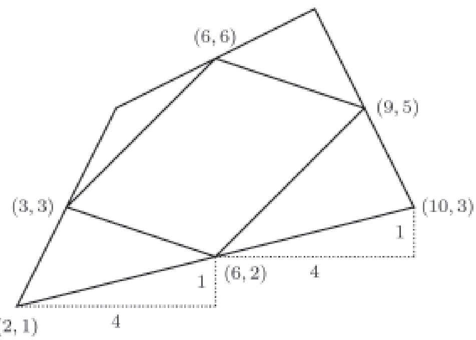
$$\left(6\frac{1}{2}-6\right)^2 + (8-5)^2 = 9\frac{1}{4}$$

$$\left(3\frac{1}{2}-3\right)^2 + (5-2)^2 = 9\frac{1}{4}$$

ಎಂದೂ ಆಗುವುದಲ್ಲವೇ.

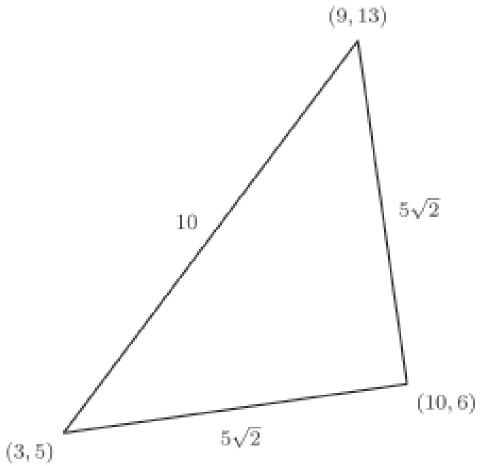
ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಒಳಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಅದರ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.





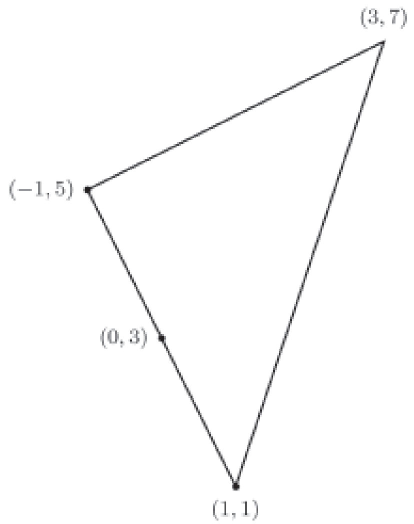
ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅದರ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

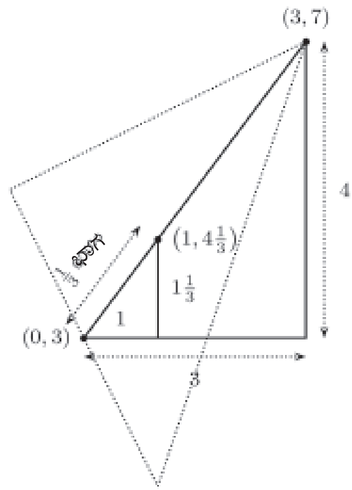
ನಾಲ್ಕನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ, ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಬರೆಯುವ:



ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $1:1:\sqrt{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು. ಆಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ 10ರ ವರ್ಗದ ಅರ್ಧದ ಅರ್ಧವಾದ 25.

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಮೂರು ಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದೆಂದೂ ಈ ಬಿಂದುವು ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ, ಶಿರಗಳಿಂದ 2:1 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು 9 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರ, (centroid) ಎಂದು ಹೆಸರು ಆಗ ಐದನೇ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಶಿರವೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು. $2:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಸಾಕು.





ಅಂದರೆ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು. ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯೂ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅದರ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿರುವುದು. ಇನ್ನು x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 3ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದರ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ1. ಆಗ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $1 \times 2 - 3 = 1$. ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿ $(-1, 2)$.

ಗೆರೆ ಲೆಕ್ಕ

ಮೊದಲ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಒಂದು ಗೆರೆಯೂ ಅದರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯುವುದು. ಇದರಿಂದ, ಹೀಗಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುವ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು, x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಪ್ರಧಾನ ತತ್ವವು ರೂಪೀಕರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗಿರುವ ಬಾಗುವಿಕೆ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ನಿರ್ವಚಿಸಲಾಗುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವಾಗ, ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೂ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಬದಲಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಬದಲಾಗುವಾಗ, y ಯ ಬದಲಾವಣೆಯು x ನ ಬದಲಾವಣೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಅಧಿಕವಾಗಿರಬಹುದು x ಹೆಚ್ಚುವುದನ್ನನುಸರಿಸಿ y ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆಯೋ ಆಗುವುದು. ಈ ರೀತಿಯ ವಿಭಿನ್ನ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಆರಂಭಿಸುವುದು. ಬದಲಾವಣೆಯು ಯಾವುದೇ ವಿಧದಲ್ಲಾಗಿದ್ದರೂ, ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು:

> ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು.

ನಂತರ ಈ ತತ್ವವನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಚಿಸಬಹುದು:

- ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ y ಬದಲಾಗುವುದು ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು.

- ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ y ಬದಲಾವಣೆಯು x ನ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು.

ಮೊದಲನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಿರವಾದ ದರ, ಅಥವಾ ಎರಡನೇ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು x ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ

ನಿರ್ವಚನವನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಗೆರೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ tan ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಲಂಬಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಗಳ tan ಅಳತೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಚಿಸಬೇಕಾಗಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಹನ್ನೊಂದನೇ ಕ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ತತ್ವದ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನವೇ ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆ.

ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವೂ ತಿಳಿದುಬರುವುದು. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಹಣೆಗಳಂತೆ ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಬದಲಾಗಿ, ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನನುಸರಿಸುವ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೇರವಾಗಿ ಹೇಳಿಲ್ಲವಾದರೂ ಸಾಧಿಸುವ ರೀತಿಯು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ (x_3, y_3)ಯ ಮೂಲಕ y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇದರ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ x_3 ಆಗಿದೆ. y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು ಹೀಗೆ ಆಲೋಚಿಸುವ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ y ಬದಲಾಗುವ ದರವು $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. ಆಗ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗೆ x_2 ನಿಂದ x_3 ಗೆ ಬದಲಾಗುವಾಗ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗೆ y_2 ನಿಂದಿರುವ ಬದಲಾವಣೆ ಸಿಗಲು, $(x_3 - x_2)$ ವನ್ನು ಈ ದರದಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ x_3 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯು

$$y_2 + (x_3 - x_2)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ಮೊದಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$y_2 + (x_3 - x_2)\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = y_2 + (y_3 - y_2) = y_3$$

ಆದುದರಿಂದ (x_3, y_3) ಈ ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಉದಾಹರಣೆಯ ನಂತರ ಚರ್ಚಿಸಲು ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ $(3,5)$ ಗೆರೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ y ಬದಲಾಗುವುದು 3ರಲ್ಲಿ 2 ಎಂಬ ಅಳತೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗಲು 3 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ 3ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ದೊರೆಯುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಬರೆದರೆ ಸಾಕು:

$$(3, 5), (6, 7), (9, 9), (12, 11), \dots$$

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಹಳಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$(2, 4\frac{1}{3}), (3, 5), (4, 5\frac{2}{3}), \dots$$

$$(2\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}), (3, 5), (3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{3}), \dots$$

ಹೀಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಬಹಳ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

$$(3.3, 5.2), (3.6, 5.4), (3.9, 5.6), \dots$$

$$(3.03, 5.02), (3.06, 5.04), (3.09, 5.06), \dots$$

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು (ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬಾರದು) ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ, y ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು x ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, $(1, 3)$, $(2, 5)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅಳತೆಯು 1 ರಲ್ಲಿ 2 ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ 3 ಆಗುವಾಗ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ 7 ಆಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ$(3,7)$ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗೆ 2 ಕೂಡಿಸಿ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ಕಡಿಮೆಮಾಡಿದರೆ $(3,0)$, $(5,-2)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದು. 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿಯೂ ಕಡಿಮೆಯೂ ಮಾಡಿದರೆ $(2,1)$, $(3,0)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದು.

ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, x ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು d ಎಂದೂ y ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಸವು e ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ d ಬದಲಾಗುವಾಗ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ e ಬದಲಾಗುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $x_3 = x_2 + d$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $y_3 = y_2 + e$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $x_4 = x_2 + 2d$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $y_4 = y_2 + 2e$ ಎಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳೂ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 1 ಬದಲಾಗುವಾಗ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು k ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = k$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$(y_2 - y_1) = k\,(x_2 - x_1);\ (y_3 - y_2) = k\,(x_3 - x_2)$

ಆಗ $(3x_1 + 2y_1, 3x_1 - 2y_1), (3x_2 + 2y_2, 3x_2 - 2y_2), (3x_3 + 2y_3, 3x_3 - 2y_3)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ,

$$\frac{(3x_2 - 2y_2) - (3x_1 - 2y_1)}{(3x_2 + 2y_2) - (3x_1 + 2y_1)} = \frac{3(x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1)}{3(x_2 - x_1) + 2(y_2 - y_1)} = \frac{3(x_2 - x_1) - 2k(x_2 - x_1)}{3(x_2 - x_1) + 2k(x_2 - x_1)} = \frac{3 - 2k}{3 + 2k}$$

ಎಂದೂ ಇದೇ ರೀತಿ

$$\frac{(3x_3 - 2y_3) - (3x_2 - 2y_2)}{(3x_3 + 2y_3) - (3x_2 + 2y_2)} = \frac{3 - 2k}{3 + 2k}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಎಂದರೆ, ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇಯದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬದಲಾಗುವಾಗ ಹಾಗೂ ಎರಡನೇಯದರಿಂದ ಮೂರನೇಯದ್ದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುವಾಗ x ನ ಬದಲಾವಣೆಗನುಗುಣವಾಗಿ y ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಆಕೃತಿಗಳೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೂ

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಬೀಜೀಯ ವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೊದಲನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, ಗೆರೆಗಳನ್ನೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಂದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಎಂದು ಕಳೆದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದೂ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳು ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳೂ ಇದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದೂ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ ಎಂಬ ಆಶಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ $2x - 3y + 8 = 0$ ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ ಎರಡು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

- ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ (p, q) ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ x ಆಗಿ p ಯನ್ನೂ. y ಆಗಿ q ವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $2p - 3q + 8$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಅದು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು.
- ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ x ಆಗಿ p ಯನ್ನೂ y ಆಗಿ q ವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $2x - 3y + 8$ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವಾಗ ಸೊನ್ನೆ ದೊರೆತರೆ, (p, q) ಎಂಬ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದು $2x - 3y + 8 = 0$ ಎಂಬ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರ ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ನೀಡಿ ಇದನ್ನು ಗಟ್ಟಿಗೊಳಿಸಬೇಕು.

ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಗಳ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಮೊದಲು, ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಆರು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ. ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $(1,2)$, $(2,4)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{4-2}{2-1}$$

ಎಂದು ದೊರೆತರೆ, ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$y = 2x$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು

ಇದರ ಅರ್ಥವು, ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದೂ ವಿವರಿಸಬೇಕು.

ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅವುಗಳ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿರುವುದೆಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಇದೇ ರೀತಿ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು $2x - 3y + 11 = 0$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ. ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಎರಡನೇ ಭಾಗವನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು $(-1, 3)$, $(2,5)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ y ಬದಲಾಗುವುದು 3ಕ್ಕೆ 2 ಎಂಬ ಅಳತೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ (x, y) ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದಾದರೆ $(x + 3, y + 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು (p, q) ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದಾದರೆ $2p - 3q + 11 = 0$ ಆಗಿರುವುದು. ಇನ್ನು x ಆಗಿ $p + 3$ ಹಾಗೂ, y ಆಗಿ $q + 2$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $2x - 3y + 11$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ

$$2(p + 3) - 3(q + 2) + 11 = 2p - 3q + 11$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. $2p - 3q + 11 = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯದಂತೆ.

$$2(p + 3) - 3(q + 2) + 11 = 0$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ $(p + 3, q + 2)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯೂ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು. ಆಗ $(p + 3, q + 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 3 ನ್ನೂ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2ನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವೂ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದು.

ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು (x, y) ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\frac{y-2}{x+1} = \frac{7-2}{2+1}$$

ಎಂದೂ ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ, ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು,

$$y = 2x + 3$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ (x, y) ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯು ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದಾದರೆ, (x, y) ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು. ಇನ್ನೂ x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ y ಆಗಿ $2x + 3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, (x, y) ಎಂಬ ಜೊತೆ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $(x, 2x + 3)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯು ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಜೊತೆಯು ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವೇ ಆಗಿರುವುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬದ ಪಾದ $(3,0)$ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ಹಾಗೂ ಅತೀ ಸಣ್ಣ ಭುಜ 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬ ಭುಜ $2\sqrt{3}$ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ $(3, 2\sqrt{3})$.

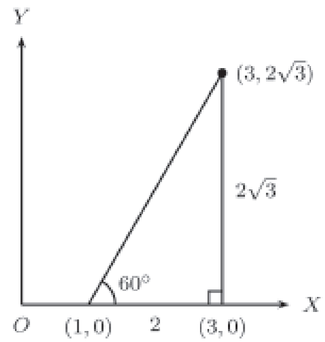
ಚಿತ್ರದಿಂದ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ $\sqrt{3}$ ಎಂದೂ, ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$\frac{y}{x-1} = \sqrt{3}$$

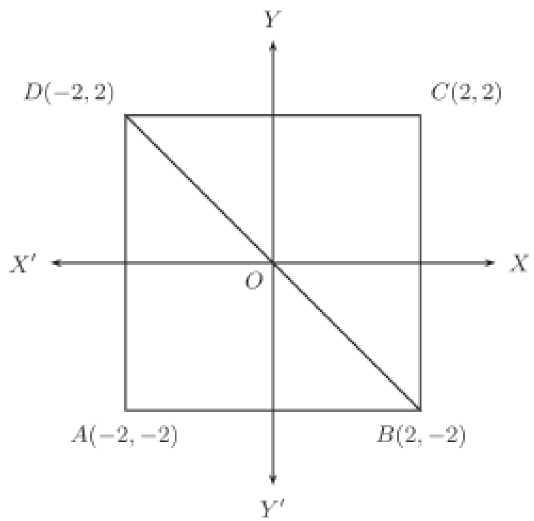
ಎಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು. ಸಮವಾಕ್ಯ

$y = \sqrt{3}\ (x-1)$

ಎಂದೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.



ಐದನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಚೌಕದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶಿರಗಳು $(2,-2)$, $(-2,2)$ ಎಂದೂ, **ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.



ನಂತರ, B, D ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$\frac{y+2}{x-2} = \frac{2+2}{-2-2}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ,

$$y + x = 0$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಾಗೂ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$\frac{y}{x-3} = \frac{3}{-3}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ,

$$x + y = 3$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಾಗೂ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತವು 3 ಆಗಿದೆ.

ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಭಾಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಲಭಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗಲೂ ಹೀಗೆ ಹೇಳುವುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿಸಬೇಕು.

ಅನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಗಳ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ಆ ನಂತರ, ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಏಳನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವು $x^2 + y^2 = 25$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. (3,4,5) ಎಂಬ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯಾ ತ್ರಯಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು $(3, 4)$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ನಂತರ **ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಅಂತರ** ಎಂಬ ಭಾಗದ ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿದಂತೆ, ಬೇರೆ ಏಳು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಎಂಟನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $(0,1)$, $(2,3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ವ್ಯಾಸದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾದ $(1,2)$ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವು $1^2 + 1^2 = 2$, ಆಗ (x, y) ಈ ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದಾದರೆ,

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

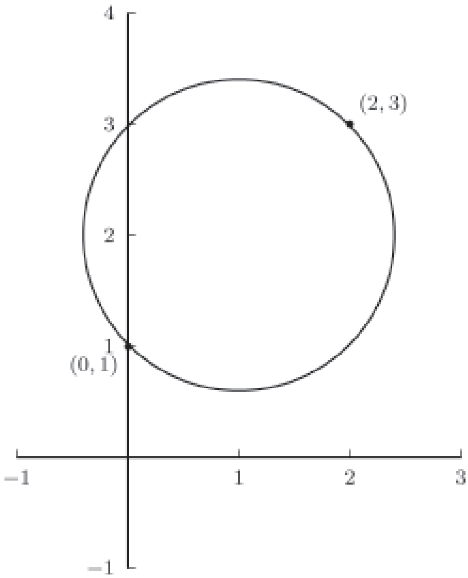
ಈ ವೃತ್ತವು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದು $(x, 0)$ ಎಂದಾದರೆ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ.

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ವರ್ಗ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಬರೆದಾಗ,

$$(x-1)^2 = -2$$

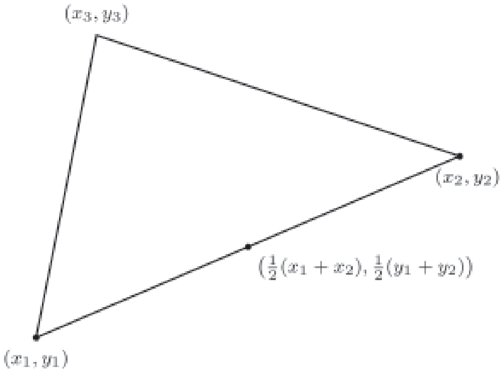
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವೃತ್ತವು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ.

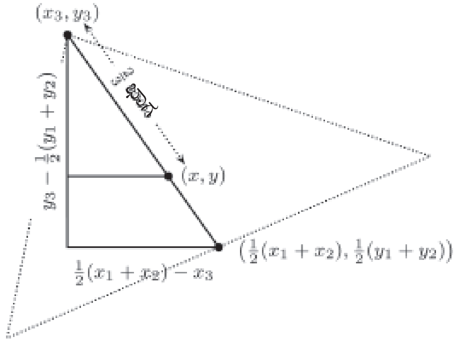


ಒಂಭತ್ತನೇ ಲೆಕ್ಕದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, O ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯುವ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ $(0,2)$, $(4,0)$. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ (**ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಲಂಬವೂ ವ್ಯಾಸವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ). ಆಗ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಂತೆ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ $(2,1)$ ಎಂದೂ, ಅದರ ವರ್ಗವು 5 ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ, ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳ ಕೊನೆಗೆ ಚರ್ಚೆಗಾಗಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ ಪಾಠದ **ನಿಷ್ಪತ್ತಿ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಐದನೇ ಲೆಕ್ಕದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವಾಗಿದೆ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನೂ (x_3, y_3) ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು $1 : 2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.





ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$x = x_3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_3\right) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

ಎಂದೂ,

$$y = y_3 - \frac{2}{3}\left((y_3 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರ $\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)\right)$

10 ಬಹುಪದಗಳು

ಮುನ್ನುಡಿ

ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಹಲವು ಸಂಬಂಧಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವಾಗಿ ಬಹುಪದಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಗಣಿತ ಪರವಾಗಿ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದೆಂದು ***ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮ ವಾಕ್ಯಗಳು*** *ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. (****ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೂ ಬಹುಪದಗಳೂ*** *ಎಂಬ ಭಾಗ). ಇಂತಹ ಒಂದು ದೃಷ್ಟಿಕೋನವು ಉಂಟಾಗುವುದು ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಅಳತೆಯ ವರ್ಗವು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಆರಂಭದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂದಾಜು ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಎರಡು ಸಾವಿರದ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಬಾಬಿಲೋನಿಯಾದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಅಳತೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು (ಮೂರನೇ ಘಾತಗಳು) ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕ್ರಿ.ಶ. 16ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಇಟಲಿಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ನಂತರ ಅಳತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸದ, ತಿಳಿಯದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕನೇ ಘಾತದ ವರೆಗೆ ಒಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಈ ಚಿಂತನೆಗಳು ಬಹುಪದ ಎಂಬ ಆಶಯಕ್ಕೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುವುದು.*

ಒಂದು ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ a *ಗೆ,* $x - a$ *ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವು* $p(x)$ *ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾ ದರೆ* $p(a) = 0$ *ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ* $p(a) = 0$ *ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ* a *ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ* $x - a$ *ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವು* $p(x)$ *ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು. ಇದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಥಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳು, ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ, ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು.*

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಬಹುಪದಗಳು)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆ
• ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು ಎರಡು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು. • ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು • ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು • ಬಹುಪದದ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಶೇಷ	• ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $p(a) = 0$ ಆದರೆ $x - a$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬ ತತ್ವದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು $ax - b$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ r ಆದರೆ $p(x) = (ax - b)\, q(x) + r$ ಎಂದು ಬರೆದು ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತಾರತಮ್ಯಗೊಳಿಸಿ $q(x)$ ಹಾಗೂ r ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು $(x - a)$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ $p(a)$ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು. • $x - a, x + a$ $p(x)$ ಎಂಬಿವುಗಳು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನ ವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸು ವುದು. • ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ ನೋಡದೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು.

ಆಶಯ ವಿಕಾಸ

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಮೊದನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುವುದು. $x - a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, $p(a) = 0$ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದು. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಾಣಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಭಾಗದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ, $p(a) = 0$ ಆದರೆ $x - a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ಮತ್ತು $x - a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(x) = (x - a)\,q(x) + b$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ $q(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ ಹಾಗೂ b ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು. ಇದರಿಂದ ಮೊದಲೇ ವಿವರಿಸಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಪಾಠಭಾಗಗಳು

ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಪರಿಹಾರಗಳೂ

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಬಹುಪದಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುವುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸರ್ವಸಮ ವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾತತ್ವವನ್ನು ಹೊಸದೊಂದು ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

x ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

> $x^2 - 1$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವು $x - 1$, $x + 1$ ಎಂಬೀ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಒಂದೋ ಎರಡೋ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ ನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಬೇಕು. ನಂತರ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಐದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಿಸಬೇಕು. ಆನಂತರ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅಪವರ್ತನಗಳು, ಸೊನ್ನೆಗಳು, ತಮ್ಮೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕು.

> $x - a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $p(a) = 0$ ಆಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ನೀಡಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. $x - a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ

ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು, $p(x)$ ನ್ನು $x-a$ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದಲ್ಲವೇ. ಈ ಬಹುಪದವು $q(x)$ ಎಂದಾದರೆ,

$$p(x) = (x-a)\, q(x)$$

x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಇದು ಸರಿಯಾದೀತು. ಆಗ x ಆಗಿ a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$p(a) = (a-a)\, q(a) = 0 \times q(a) = 0$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಮುಂದುವರಿದು ಅಪವರ್ತನಾ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಿರುವ ಈ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸುವ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಮಂಡಿಸಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಇದುವರೆಗೆ ನೋಡಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು:

(i) $p(1) = 0$ ಆಗಲು, $x-1$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಸಾಕು.

(ii) $p(-2) = 0$ ಆಗಲು, $x+2$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಸಾಕು.

(iii) $p(1) = 0, p(-2) = 0$ ಎಂಬ ಎರಡೂ ಸರಿಯಾಗಲು $(x-1)(x+2)$ ಅಪವರ್ತನಗಳಾದರೂ ಸಾಕು.

(iv) ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವು ಬೇಕಾದುದರಿಂದ $p(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ ಸಾಕಾದೀತು.

$x^2 + x - 2$ ನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಬಹುಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ಬಹುಪದ ಸಿಗುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕು.

$p(1) = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $x-1$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕು

ಎಂಬುವುದು ನಿಜವಾದರೂ ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಇನ್ನು ಮುಂದೆಯಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, $x-1$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $p(1) = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ $p(1) = 0$ ಆಗಲು $x-1$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಸಾಕು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ತಾರ್ಕಿಕ (logic) ಆಲೋಚನೆಯಿಂದ ಹೇಳುವುದಾದರೆ

$x-1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕಾದರೆ $p(1)$ ನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ನಿಬಂಧನೆ ಬೇಕು.

(That $x-1$ is a factor of $p(x)$ is a necessary condition for $p(1)$ to be zero)

ಎಂದು ತಿಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆದರೆ,

$x-1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕು ಎಂಬುದು $p(1)$ನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ನಿಬಂಧನೆಯಾಗಿದೆ.

(That $x-1$ is a factor of $p(x)$ is a sufficient condition for $p(1)$ to be zero)

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿಯಾಯಿತು.

ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, x^2+x-2 ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಹುಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸಿಗುವ ಬಹುಪದಗಳೆಲ್ಲಾ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರಗಳಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯ. ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಉತ್ತರಗಳು ಯಾವ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಇಲ್ಲಿ ಅದರ ಆಗತ್ಯವಿಲ್ಲ).

ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ

$$p(x) = (x-(1+\sqrt{3})(x-(1-\sqrt{3}) = ((x-1)-\sqrt{3}))((x-1)+\sqrt{3}))$$
$$= (x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ

$$p(x) = (x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = (x-1)(x^2-2) = x^3 - x^2 - 2x + 2$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ

$$x^2 + x + 1 = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

ಬರೆದರೆ,

$$a + b = -1 \qquad ab = 1$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದರಿಂದ

$$(a-b)^2 = 1^2 - (4 \times 1) = -3$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆಗ ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಬಹುಪದ ಶೇಷ

$x-a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $p(a)=0$ ಆಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಆರಂಭ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವು. ಇದಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೂ ಸರಿಯಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ $p(a)=0$ ಆದರೆ $x-a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಆವರ್ತನವಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಈ ಭಾಗದ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು $p(x)$ ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಹುಪದವನ್ನು ಮತ್ತು $x-a$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(x) = (x-a)\,q(x) + b$ ಆಗುವಂತೆ $q(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ ಹಾಗೂ b ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬ ತತ್ವವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ $q(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $p(x)$ ನ್ನು $x-a$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ, b ಯು ಈ ಭಾಗಾಕಾರದ ಶೇಷವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರಣೆ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಶೇಷ ಎಂಬಿವುಗಳ ಅರ್ಥವು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಭೌತಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದೆ. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ **ಆಶಯವೂ ಅರ್ಥವೂ** ಎಂಬ ಸೈಡ್ ಬೋಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಬಹುಪದಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಭೌತಿಕವಾಗಿ ನಡೆಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಗಣಿತ ಪರವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಷ್ಟೆ. (ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗಲೂ ಈ ಆಶಯಗಳಿಗೆ ಭೌತಿಕವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಶೇಷ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನಿರ್ವಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು **ಶೇಷವೆಂದರೆ, ಶೇಷಪೂರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ** ಎಂಬ ಸೈಡ್ ಬೋಕ್ಸಿನಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ).

ಹಲವು ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಂತಿರುವ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಬಹುಪದವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ ಶೇಷವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಯಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ನಡೆಸುವ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯ ಅರ್ಥವನ್ನಾಗಲೀ ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ ಪದಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನಾಗಲೀ ವಿವರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ ಶೇಷವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿದ ನಂತರ ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಆದರೂ ಇಂತಹ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೇ ಆಶಯವಾಗಿ ತಪ್ಪು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಶೇಷ ಎಂಬ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲು ಉದ್ದೇಶಿಸಿದ ಆಶಯಗಳಿರುವ ದಾರಿಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ವಿಚಾರದ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಏನನ್ನೂ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಇನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, $p(x)$ ನ್ನು $x-a$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ $p(a)$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದ ನಂತರ ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ನ್ನು $x+2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $p(-2)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗದಿದ್ದರೆ ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹೇಳಬೇಕು. ಇದರಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ b ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$p(x) = (x+2)\,q(x) + b$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. x ಆಗಿ -2 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$p(-2) = (-2+2)\,q(-2) + b = \big(0 \times q(-2)\big) + b = b$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ $p(x)$ ನ್ನು $2x-1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ರೀತಿಯನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಹಾಗೂ ಶೇಷ b ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$p(x) = (2x-1)\,q(x) + b$$

ಇಲ್ಲಿ $(2x-1)\,q(x)$ ನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಸಿ b ಯನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಉಳಿಯುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ x ಆಗಿ $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು. ಆಗ,

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\left(2\times\frac{1}{2}\right)-1\right)\; q\left(\frac{1}{2}\right) + b = b$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಚರ್ಚೆಗೊಳಪಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದಂತೆ x ನ್ನು $x+\frac{b}{a}$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಶೇಷ $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ ಎಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಾಗ,

$$p(x) = \left(x+\frac{b}{a}\right)\, q(x) + p\left(\frac{-b}{a}\right)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ

$$p(x) = \frac{1}{a}\,(ax+b)\, q(x) + p\left(-\frac{b}{a}\right)$$

ಎಂದು ಬರೆದು, $\frac{1}{a}q(x) = r(x)$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಶೇಷ $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಅಥವಾ, $p(x)$ನ್ನು $ax+b$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ c ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ನಿರ್ವಚನಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ,

$$p(x) = (ax+b)\, q(x) + c$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ $x = \frac{-b}{a}$ ನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(a \times\left(\frac{-b}{a}\right)+b\right)\ q\left(-\frac{b}{a}\right) + c = c$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ $p(a) = 0$ ಆದರೆ $x - a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಮಂಡಿಸಿದ ನಂತರ ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $p(x) = x^2 - 2x - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳು $x - a, x - b$ ಆದರೆ, $p(a), p(b)$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ, a, b ಇವುಗಳು $x^2 - 2x - 1 = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಬೇಕು. ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪರಿಹಾರಗಳು

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})\,(x - 1 + \sqrt{2})$$

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ನೀಡಬೇಕು.

- $x^2 + 2x - 1$
- $x^2 - x - 1$
- $2x^2 + 5x + 3$

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಂತೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $p(x) = x^3 + x^2 + x$ ನ್ನು $x - 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಶೇಷವು 3 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ,

$$p(x) = (x - a)\ r(x) + 3$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಇದನ್ನೇ

$$p(x) - 3 = (x - a)\ r(x)$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $x - 1$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಸಿಗಲು $p(x)$ ನಿಂದ 3ನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕು. ಅಥವಾ -3ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಇದೇ ರೀತಿ $p(x) = x^3 + x^2 + x$ ನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ -1 ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು

$$p(x) = (x + 1)\ r(x) - 1$$

ಎಂದು ಬರೆದು ಇದನ್ನೇ

$$p(x) + 1 = (x + 1)\ r(x)$$

ಎಂದು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, $x + 1$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಲು ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $p(x) = x^n - 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(1) = 0$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ n ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ x-1 ಎಂಬ ಬಹುಪದವು x^n-1 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು.

ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ $p(x) = x^n + 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ , $p(1) = 2$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ n ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ x-1 ಎಂಬ ಬಹುಪದವು x^n+1 ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ $p(x) = x^n - 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$p(-1) = (-1)^n - 1 = \begin{cases} -2, n & \text{ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ} \\ 0, n & \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ} \end{cases}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಾತ್ರವೇ x+1 ಎಂಬ ಬಹುಪದವು x^n-1 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ $p(x) = x^n + 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$p(-1) = (-1)^n + 1 = \begin{cases} 0, n & \text{ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ} \\ 2, n & \text{ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ} \end{cases}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ n ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಾತ್ರವೇ x+1 ಎಂಬ ಬಹುಪದವು x^n+1ರ ಅಪವರ್ತನವಾದೀತು.

ಇದರ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ x^2-1 ಎಂಬ ಬಹುಪದವು x^n-1 ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಲು x-1 ಮತ್ತು x+1 ಇವುಗಳು x^n-1 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕು. n ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ x-1 ಎಂಬ ಬಹುಪದವು x^n-1 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು ಎಂದು ಒಂದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, n ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಾತ್ರವೇ x+1ಎಂಬ ಬಹುಪದವು x^n-1ರ ಅಪವರ್ತನವಾದೀತು ಎಂದು ಮೂರನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿಯೂ ನೋಡಿದೆವು. ಆಗ n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಾತ್ರವೇ x^2-1 ಅಪವರ್ತನವಾದೀತು.

ಐದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ x^2-1 ಎಂಬ ಬಹುಪದವು ax^3+bx^2+cx+d ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ x-1,x+1 ಇವುಗಳೆರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಆಗ

$$a + b + c + d = 0$$
$$-a + b - c + d = 0$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 2b+2d=0 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ b=-d ಮುಂದುವರಿದು ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ a+c=0 ಎಂದೂ a=-c ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 + (ax+b) = (x^2 - 1)\ q\ (x)$$

ಎಂದು ಬರೆದು, $x = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $5 + a + b = 0$, ಅಂದರೆ

$$a + b = -5$$

ಎಂದೂ $x = -1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $-9 - a + b = 0$ ಅಂದರೆ

$$-a + b = 9$$

ಸಿಗುವುದು. ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ $a = -7$, $b = 2$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ ರೊಂದಿಗೆ $-7x + 2$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ $x^2 - 1$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಸಿಗುವುದು.

ಕೊನೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನೀಡಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು x^2-4 ಇದರ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ x-2,x+2 ಎಂಬಿವುಗಳೆರಡು ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕು. ಆಗ p(2),p(-2) ಎಂಬಿವುಗಳೆರಡು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$$8a + 4b + 2c + d = 0$$

$$-8a + 4b - 2c + d = 0$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$4b = -d \qquad 4a = -c$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ x^2-9 ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ

$$9b = -d \qquad 9a = -c$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

11 ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್

ಮುನ್ನುಡಿ

ಒಂದು ಸ್ಥಿತಿ ವಿಶೇಷಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು, ಕ್ರಮೀಕರಿಸುವುದು, ಗಣಿತ ಪರವಾದ ವಿಶೇಷತೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಹಾಗೂ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಹೇಳುವುದು ಎಂಬಿವುಗಳು ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್ (Statistics) ಎಂಬ ವಿಜ್ಞಾನದ ಕಾರ್ಯವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಒಂದು ದೇಶದ ಎಲ್ಲ ಜನರ ಆದಾಯ, ಪ್ರಾಯ, ಶಿಕ್ಷಣ ಗುಣಮಟ್ಟ ಎಂಬಿವುಗಳ ಕುರಿತಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಯನದ ಮೂಲಕ ದೇಶದ ಒಟ್ಟು ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿ, ಆಯುಷ್ಯ ಕಾಲ, ಮಾನವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಎಂಬಿವುಗಳ ಕುರಿತಾದ ತೀರ್ಮಾನಗಳಿಗೆ ಬರುವುದಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ ಇವುಗಳನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸಲಿರುವ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಆಯೋಜಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾಜಿಕ ಮೌಲ್ಯವಿರುವ ವಿಜ್ಞಾನದ ಒಂದು ಶಾಖೆಯು ಇದಾಗಿದೆ.

ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಒಂದು ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಸ್ಥಿತಿ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಇವುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿಕೊಂಡು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುವುದು ಬಹುತೇಕ ಅಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅಳತೆಗಳ ಗಾತ್ರ, ವಿತರಣೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ಒಲವು ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಮೊದಲ ಹಂತವಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ (Average), ಅಥವಾ ಮಧ್ಯ ಒಲವು (Measure of central tendency). ಒಂದಾಗಿದೆ. ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿರುವವುಗಳೆಂದರೆ ಮಧ್ಯಮಾನ (Arithmetic mean) ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮ (Median). ಮಧ್ಯಮಾನ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನೂ ಅದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಾಠವು ಮಧ್ಯಮದ ಕುರಿತಾಗಿದೆ.

ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರೇಂ (ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್)

ಆಶಯಗಳು	ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ	ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು
• ಸರಿಯಲ್ಲದ ಸರಾಸರಿ • ಆವೃತ್ತಿಯೂ ಮಧ್ಯಮಾನವೂ • ವಿಭಾಗಗಳೂ ಮಧ್ಯಮಾನವೂ	• ಗುಂಪಿನ ಇತರ ಅಳತೆಗಳಿಗಿಂತ ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಅಥವಾ ತೀರಾ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವ ಅಳತೆಗಳು ಮಧ್ಯಮಮಾನದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುತ್ತದೆ. • ಮಧ್ಯಮವೆನ್ನುವುದು ಒಟ್ಟು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ. • ಒಟ್ಟು ಇರುವ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಳತೆಯು ಯಾವ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಆ ವಿಭಾಗದ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆ.	• ಒಂದು ಗುಂಪು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧೀಕರಿಸಲು ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಲ್ಲದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಒಂದು ಗುಂಪು ಅಳತೆಗಳ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. • ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

ಆಶಯದ ಬೆಳವಣಿಗೆ

ಒಂದು ಗುಂಪು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿ ಮಧ್ಯಮಾನ ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನ ಮಾತ್ರ ಇದಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವ ಹೆಸರು 'ಸರಾಸರಿ' ಎಂದೂ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯಾದ ಮಧ್ಯಮದ ಕುರಿತು ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಒಂದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮಾನ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯಕತೆ ಹಾಗೆ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಳತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಗಳಾಗಿಸಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯುವುದು ವಾಡಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇದು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಗಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಳತೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದು ಒಂದು ರೀತಿ. ಇದರಿಂದ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಾಗಿಸಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು. ಅಳತೆಗಳು ಆವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದರೆ ಇದು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸುಲಭವಾಗುವುದು. ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಗಳಿವೆ. ಸ್ಥಿತಿ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೊಡ್ಡ ಸಂಗ್ರಹಗಳು ನಮಗೆ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಇಂತಹಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯದಿರುವ ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಯಾವ ಊಹೆಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದೆಂದೂ ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದೆಂದೂ ಪಾಠದ ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಾಠ ಭಾಗಗಳು

ಸರಿಯಲ್ಲದ ಸರಾಸರಿ

ಒಂದು ಗುಂಪು ಅಳತೆಗಳ ಸರಿಸುಮಾರು ಅಳತೆಯನ್ನೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲು ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಒಂದು ಸರಾಸರಿಯು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಮಧ್ಯಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಇದು ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತು ಸರಿಯಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡದ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಳತೆಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಬಹಳ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅಥವಾ ತೀರಾ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಕೆಲವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೆಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇಂತಹಾ ಇತರ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅನೇಕ ಚಿಕ್ಕ ಮಕ್ಕಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಅಥವಾ ಮೂರು ಮಂದಿ ವಯಸ್ಕರಿರುವ ಗುಂಪಿನ ಸದಸ್ಯರ ಪ್ರಾಯದ ಮಧ್ಯಮಾನ, ಹಲವು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಸ್ಪರ್ಧೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮಾತ್ರ ರನ್ ಗಳಿಸಿ, ಒಂದೋ ಎರಡೋ ಸ್ಪರ್ಧೆಗಳಲ್ಲಿ ಶತಕ ಗಳಿಸಿದ ಕ್ರಿಕೆಟಿಗನ ಸ್ಕೋರಿನ ಮಧ್ಯಮಾನ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಇತರ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಸರಾಸರಿ

ಮೊದಲ ಭಾಗದ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಮಧ್ಯಮ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಿರ್ವಚಿಸಿ, ಹಿಂದೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಮಧ್ಯಮಾನದ ಪರಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ಇದು ಹೇಗೆ ಬಗೆಹರಿಸುವುದೆಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ಇರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಒಂದನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಮಧ್ಯಮಾನ 6.17 ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಮಧ್ಯಮ 6.19 ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಇದರ ದೂರಗಳೆಲ್ಲ ಸರಿಸುಮಾರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆ. ಇತರ ದೂರಗಳಿಗಿಂತ ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ತೀರಾ ಚಿಕ್ಕದಾದ ದೂರಗಳಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮಧ್ಯಮಾನ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮಾನ 50 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಮಧ್ಯಮ 54.8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮಾನವು ಯಾಕೆ ಸಣ್ಣದಾಗಿದೆಯೆಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ. ಈ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಆರು ಅಳತೆಗಳೂ 50 ಮತ್ತು 60ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಉಳಿದ ಎಂಟರಲ್ಲಿ ಐದು ಅಳತೆಗಳು 50ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದೂ, ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು 60ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದೂ ಆಗಿವೆ. ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಅಳತೆಗಳು ಮಧ್ಯಮಾನದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುವುದರಿಂದ ಅದು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರಾಸರಿಗಳು ಮಳೆಯ ಅಳತೆಯ ಕುರಿತು ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆಯೆಂದು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ಈ ಸರಾಸರಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಮಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣವು ಆರು ಜಿಲ್ಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವಿದೆಯಲ್ಲವೆ? ವಾಸ್ತವಾಂಶದ ಕುರಿತು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆ ಲಭಿಸಲು ಕೇವಲ ಸರಾಸರಿ ಸಾಕಾಗದು ಎಂಬುದು ಇದಕ್ಕಿರುವ ಉತ್ತರವಾಗಿದೆ. ಮುನ್ನುಡಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಅಳತೆಗಳ ವಿತರಣೆಯನ್ನೂ ಒಲವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವಿಷಮವಾದರೆ ಮಧ್ಯದ ಪದವನ್ನು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವುದೆಂದು **ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. (**ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜ ಗಣಿತ ರೂಪ** ಎಂಬ ಭಾಗ) ಆದುದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದರೆ ಮಧ್ಯಮವಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಲು ಕಷ್ಟವೇನಲ್ಲ (ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಸಾಗುವಾಗ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದದಿಂದ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಸಾಗಿದರೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಂತೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು). ಹಾಗಾದರೆ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮಧ್ಯದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಒಟ್ಟು ಪದಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಮಧ್ಯಮಾನ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಆವೃತ್ತಿಯೂ ಮಧ್ಯಮವೂ

ದೊಡ್ಡ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುವುದೆಂದೂ ಅವುಗಳು ಎರಡು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆಗಬಹುದೆಂದೂ ಎಂಟನೇ ತರಗತಿ ಮತ್ತು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಕಂಡುಕೊಂಡಿರುವರು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಳತೆಯು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಆವರ್ತಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಸುಲಭ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸಲು, ಪಟ್ಟಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ ಇರುವ ಮಕ್ಕಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಸೇರಿಸಿ ಇಡುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಕರಿಹಲಗೆಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ ಅಳತೆಯು ಎಷ್ಟರ ವರೆಗೆ ಆಯಿತೆಂದು ನೋಡುವುದು.

ಆಗ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಸಂಚಿತವಾಗುವ ಪಟ್ಟಿಯು ಚಿತ್ರದೊಂದಿಗೆ ಮೂಡಿ ಬರುವುದು.

ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನೂ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ತಯಾರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಯಾರಿಸಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ವಿಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮ

ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಳತೆಯು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬರುವುದೆಂದು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳದೆ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಳತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೋರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಎಂಟು ಮತ್ತು ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಕಂಡಿರುವರು. ಇಂತಹಾ ಪಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಮಾಹಿತಿಗಳು ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಇದುವರೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಿರುವಾಗ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಕುರಿತು ಕೆಲವು ಊಹೆಗಳು ಬೇಕಾಗುವುದು. ಈ ಊಹೆಗಳು ಯಾವುದೆಂದೂ, ಅವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆಂದೂ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಎತ್ತರಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿದರೆ 23ನೇ ಮಗುವಿನ ಎತ್ತರವು ಮಧ್ಯಮವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಈ ಮಗುವಿನ ಎತ್ತರವು 145 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 150 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯ. ಪಟ್ಟಿಯ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿಖರವಾದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮಾಹಿತಿಗಳ ಕುರಿತು ಎರಡು ಊಹೆಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದಾಗಿದೆ. (ಈ ರೀತಿಯ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೂ ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಒಂದು ಊಹೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಎಂದು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ನೆನಪಿಸಬಹುದು)

(i) 145 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 150 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎತ್ತರವಿರುವ 12 ಮಕ್ಕಳಿದ್ದಾರೆ. 145 ರಿಂದ 150ರ ವರೆಗಿರುವ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಸಮಾನವಾದ 12 ಉಪ ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಒಂದು ಮಗು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪವಿಭಾಗದ ಮಗುವಿನ ಎತ್ತರ ಆ ಉಪವಿಭಾಗದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

14ನೇ ಮಗುವಿನಿಂದ 25ನೇ ಮಗುವಿನ ವರೆಗಿರುವ 12 ಮಂದಿ 145ರಿಂ 150ರ ವರೆಗಿರುವ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವರು. ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಊಹೆಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಇವರ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. 23ನೇ ಮಗುವಿನ ಎತ್ತರವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವಂತೆ ಇವರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಎರಡು ಮೂರು ಮಕ್ಕಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ ಒಂದು ಮಗುವಿನಿಂದ ನಂತರದ ಮಗುವಿನಲ್ಲಿಗೆ ಹೋಗುವಾಗ ಎತ್ತರವು $\frac{5}{12}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು. ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುವುದು.

ಎತ್ತರಕ್ಕನುಸಾರ ನಿಂತಿರುವ ಕೆಲವು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಮಗುವಿನ ಎತ್ತರ $145\frac{5}{24}$ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮಕ್ಕಳ ನಡುವಿನ ಎತ್ತರದ ವ್ಯತಾಸ $\frac{5}{12}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. 10ನೇ ಮಗುವಿನ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

ಇದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮಕ್ಕಳು ತಿಳಿಯುವರು.

ಮೊದಲ ಪದ $145\frac{5}{24}$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\frac{5}{12}$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ 10ನೇ ಪದ ಯಾವುದು?

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ, ನಂತರ ಪಾಠ ಪುಸ್ತಕದ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆ, ಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಬೇಕು.

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನು ಬರೆದು ನೋಡುವ, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದ ಅಂತರವನ್ನು cಎಂದೂ, ಮಧ್ಯಮ ಅಳತೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡು ವಿಭಾಗದ ಆರಂಭದ ಸಂಖ್ಯೆ l ಎಂದೂ ಆ ವಿಭಾಗದ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು m ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು(ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $c = 5, l = 145, m = 12$). ಆಗ, l ನಿಂದ $l + c$ ವರೆಗಿರುವ ವಿಭಾಗವನ್ನು m ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದಲ್ಲೂ ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಂತೆ ಎಂಬುದು ಊಹೆಯಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪವಿಭಾಗದ ಅಂತರ $\frac{c}{m}$, ಮಧ್ಯಮ ವಿಭಾಗದ ಮೊದಲ ಅಳತೆ $l + \frac{c}{2m}$. ಇನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ n ಎಂದೂ ಮಧ್ಯಮ ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ವಿಭಾಗದ ವರೆಗಿರುವ ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿ f ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ (ಎತ್ತರ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $n = 45, f = 13$). ಆಗ ಮಧ್ಯಮ ವಿಭಾಗವು $(f+1)$-ನೇ ಸ್ಥಾನದ ಅಳತೆಯಿಂದ ಆರಂಭಗೊಳ್ಳುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ n ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಧ್ಯಮವು $\frac{n+1}{2}$ ನೇ ಸ್ಥಾನದ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇದಾಗಿದೆ:

$(f + 1)$-ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ $l + \frac{c}{2m}$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\frac{c}{m}$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ $\frac{n+1}{2}$-ನೇ ಪದ ಯಾವುದು?

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು

$$\left(l+\frac{c}{2m}\right) + \left(\frac{n+1}{2}-(f+1)\right) \frac{c}{m} = l + \left(\frac{\frac{n}{2}-f}{m}\right) c$$

n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಶ್ರೇಣಿಯ $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+1$ ಎಂಬೀ ಸ್ಥಾನಗಳ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ $\frac{n}{2}$-ನೇ ಪದ.

$$\left(l+\frac{c}{2m}\right) + \left(\frac{n}{2}-(f+1)\right) \frac{c}{m}$$

ಎಂದೂ $\frac{n}{2}+1$-ನೇ ಪದ

$$\left(l+\frac{c}{m}\right) + \left(\frac{n}{2}+1-(f+1)\right) \frac{c}{m}$$

ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ

$$\left(l+\frac{c}{2m}\right) + \left(\frac{n+1}{2}-(f+1)\right) \frac{c}{m} = l + \left(\frac{\frac{n}{2}-f}{m}\right) c$$

ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ n ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಮಧ್ಯಮ

$$l + \left(\frac{\frac{n}{2}-f}{m}\right) c$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

> ಕೆಲವು ಪಾಠಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಒಂದು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣವನ್ನು ನೀಡದೆ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಈ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಇಂತಹಾ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಅರ್ಥ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಿರುವ ಕೇವಲ ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುತ್ತವೆ. ಈ ರೀತಿಯ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ ಚಿಂತನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವೇನೂ ಇಲ್ಲದೆ ಯಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ಕಾರ್ಯವೆಸಗುವ ಒಂದು ತಲೆಮಾರಿನ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗಬಹುದು.

ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದ

ಎತ್ತರ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಒಟ್ಟು 45 ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಎತ್ತರವು 140 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ 5, 145 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ 13 ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದರ ಬದಲು ಇವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರ ಎತ್ತರವು 140 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{5}{45} = \frac{1}{3}$, ಎತ್ತರವು 145 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{13}{45} = \frac{1}{3}$ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಎತ್ತರ	ಸಾಧ್ಯತೆ
140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	$\frac{1}{3}$
145ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	$\frac{13}{45}$
150ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	$\frac{5}{9}$
155ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	$\frac{4}{5}$
160ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	$\frac{41}{45}$
165ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	1

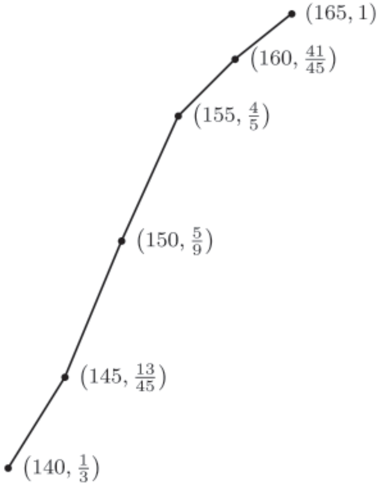
ಮಧ್ಯಮ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಎತ್ತರ ಹೆಚ್ಚಲೂ, ಕಡಿಮೆಯಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಸಾಧ್ಯತೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ವಚನವಾಗಿದೆ. ಎಂದರೆ ಮಧ್ಯಮ ಎತ್ತರವಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿರಬೇಕು. ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಎತ್ತರವು 145 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{13}{45}$ ಎಂದೂ, 150 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{5}{9}$ ಎಂದೂ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. $\frac{13}{45} < \frac{1}{2} < \frac{5}{9}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮಧ್ಯಮ ಎತ್ತರವು 145 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 150 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಎತ್ತರದ ವಿಭಾಗಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಎತ್ತರದ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಊಹಿಸುವುದು. ಆಗ, ಮಧ್ಯಮ ಎತ್ತರವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅನುಪಾತಿಕ ಊಹೆಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಸಿ.

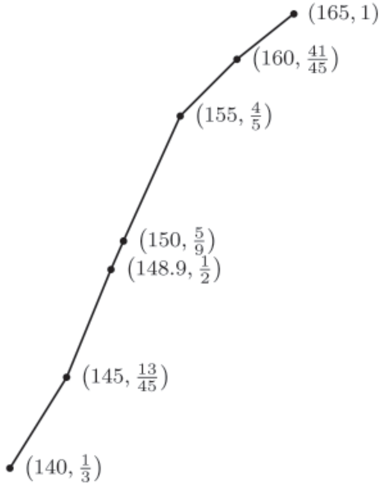
$$\frac{x-145}{\frac{1}{2}-\frac{13}{45}} = \frac{150-145}{\frac{5}{9}-\frac{13}{45}}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದರಿಂದ x ನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

$$x = 145 + \left(5 \times \frac{45}{12} \times \frac{19}{90}\right) = 145 + \frac{95}{24} = 148\frac{23}{24} \approx \ 148.9$$

ಇದನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಎತ್ತರದ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಬದಲಾವಣೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದಲ್ಲೂ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೆಂಬ ಸಂಖ್ಯಾ ಊಹೆಯು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವುದು ನೇರ ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಊಹೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು. ಅದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರವು ಲಭಿಸುವುದು.





ಈಗ ಮಧ್ಯಮ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗುವುದು.

$\left(145\frac{13}{45}\right), \left(150\frac{5}{9}\right)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ , y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾಗ ಈ ಹಿಂದೆ ಬರೆದ ಸಮವಾಕ್ಯವೇ ಸಿಗುವುದು.